Redactor MARIA BORICEAN
Coperta de GHEORGHE MARINESCU

Ioan Pop

TOPOLOGIE ALGEBRICĂ

EDITURA ŞTIINŢIFICĂ
BUCUREŞTI, 1990

ISBN 973—29—0107—1

CUPRINS

PREFAȚĂ

Topologia algebrică a început să se dezvolte sistematic odată cu lucrările, dintre anii 1895—1904, ale ilustrului matematician francez Henri Poincaré *), avînd ulterior cea mai rapidă dezvoltare dintre toate ramurile matematicii secolului al XX-lea.

Influența topologiei algebrice asupra altor ramuri ale matematicii, ca algebra (algebra omologică), teoria numerelor (teoria corpurilor locale), geometria algebrică (coomologia varietăților algebrice, coomologia Galois etc.), geometria diferențială (clasele caracteristice etc.) și analiza (integrarea pe varietăți etc.), este uriașă.

Cartea de față este menită să completeze literatura românească [9], [39], [53] în acest domeniu atît de activ al matematicii contemporane.

Lucrarea este împărțită în patru capitole. Primul capitol este dedicat chestiunilor fundamentale de topologie generală și de teoria omotopiei, accentuîndu-se o serie de construcții fundamentale și exemple geometrice importante.

În capitolul II se studiază grupurile de omotopie (absolută și relativă) mergîndu-se pînă la calcule concrete pentru toate spațiile topologice uzuale (utilizînd fibrări și spații de acoperire) și pînă la aplicații (teorema fundamentală a algebrei, teorema Borsuk-Ulam etc.).

Capitolul III cuprinde studiul topologic, omotopic și combinatoric al CW-complexelor și complexelor simpliciale, sisteme Postnikov, clasificarea 2-varietăților com-

*) *Analysis Situs* în J. École Polytech., Paris (2), 1 (1895), 1—121; *Complemente* în Rend. Circ. Mat. Palermo **13** (1899), 285—343; **18** (1904), 45—110; Proc. London Math. Soc. **32** (1900), 277—308; Bull. Soc. Math. France **30** (1902), 49—70; J. Math. Pures Appl. (5), **8** (1902), 169—214.

pacte (cu sau fără bord) şi o introducere în teoria complexelor semisimpliciale.

Ultimul capitol constituie o introducere în teoria omologiei, fiind prezentate elemente de algebră omologică, omologia simplicială şi omologia singulară. Teoria este însoţită de calcule concrete (omologia suprafeţelor, metoda blocurilor simpliciale, omologia Cw-complexelor etc.) şi de aplicaţii (teoreme de punct fix, problema colorării hărţilor etc.). În încheierea capitolului, ca o generalizare a teoriei omotopiei, se face o introducere în teoria formei (în sens Borsuk) pentru spaţii metrice compacte şi în omologia Vietoris, ca un invariant al „formei", obţinîndu-se ca aplicaţie o clasificare a continuumurilor plane.

Fiecare paragraf este însoţit de exerciţii, cele mai dificile fiind chiar rezolvate.

Sperăm ca detaliile în demonstraţii, numeroasele exemple, desenele, aplicaţiile şi exerciţiile să facă lucrarea utilă şi accesibilă atît tinerilor cercetători, cît şi începătorilor (studenţi şi specialişti în alte domenii ale matematicii).

Mulţumesc referenţilor ICEMAT-ului, cercetătorii dr. Ştefan Papadima şi dr. Alexandru Buium pentru atenţia cu care au citit manuscrisul şi pentru valoroasele sugestii ce-au contribuit la îmbunătăţirea formei finale a cărţii. Mulţumesc, de asemenea, tuturor acelora care au contribuit la publicarea acestei lucrări.

Iaşi, 1 iunie 1986

Conf. Ioan POP

CAPITOLUL I

SPAŢII TOPOLOGICE

Acest capitol cuprinde o prezentare standard a principalelor chestiuni de topologie generală, accentul punîndu-se pe construcţiile fundamentale şi pe descrierea detaliată a unor exemple geometrice importante, incluzînd banda lui Möbius, trompeta lui Klein, spaţiile proiective, spaţiile lenticulare etc. ca spaţii cît. Se continuă cu prezentarea spaţiilor AR, ANR, AN şi ANE, cu o introducere în teoria omotopiei şi cu discutarea proprietăţii de extensie a omotopiei. Demonstraţiile simple, pe care cititorul le poate face uşor, sînt omise.

§ 1. Definiţia spaţiilor topologice

Dacă A şi B sînt două mulţimi, notăm prin B^A mulţimea funcţiilor $f: A \to B$. Dacă X este o mulţime, 2^X sau $\mathscr{P}(X)$ notează mulţimea părţilor (submulţimilor) lui X.

DEFINIŢIA 1. Fie X o mulţime şi $\mathscr{T} \subseteq 2^X$, satisfăcînd condiţiile:

1) $\emptyset$, $X \in \mathscr{T}$;

2) O reuniune arbitrară de mulţimi din $\mathscr{T}$ aparţine lui $\mathscr{T}$;

3) Orice intersecţie finită de mulţimi din $\mathscr{T}$ aparţine lui $\mathscr{T}$.

O asemenea familie $\mathscr{T}$ se numeşte o *topologie în* (*pe*) X. Mulţimea X împreună cu $\mathscr{T}$ se numeşte *spaţiu topologic* şi se notează $(X, \mathscr{T})$; uneori se scrie prescurtat X sau $\mathscr{T}$. Elementele lui $\mathscr{T}$ se numesc *mulţimi deschise*.

EXEMPLE. 1. X o mulţime arbitrară. Atunci $\mathscr{T}_0 = \{\emptyset, X\}$ este o topologie în X, numită *minimală* sau *trivială*.

2. X o mulţime arbitrară. Atunci $\mathscr{T}_1 = 2^X$ este o topologie în X, numită *maximală* sau *discretă*.

3. X o mulțime arbitrară și $\mathscr{T} \subset 2^X$ definită astfel: $D \in \mathscr{T} \Rightarrow D = \emptyset$ sau $D = X$ sau $X \setminus D$ este finită. Se obține o topologie, numită *topologia complementarelor finite*.

4. Fie $(X, \mathscr{T})$ un spațiu topologic și $A \in 2^X$. Se poate defini o topologie $\mathscr{T}_A$ pe A, numită *topologia indusă de $\mathscr{T}$ pe A*, spațiul $(A, \mathscr{T}_A)$ numindu-se *subspațiu topologic*, dacă $D' \in \mathscr{T}_A \Leftrightarrow D' = D \cap A$, pentru $D \in \mathscr{T}$.

5. $X = \mathbb{R}$, mulțimea numerelor reale, $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\} \cup \cup \{(-\infty, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

6. $X = \mathbb{N}$, mulțimea numerelor naturale, $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\} \cup \cup \{O_n \mid n \geqslant 0\}$, unde $O_n = \{n, n+1, n+2, \ldots\}$.

7. $X = \mathbb{R}$ și $D \in \mathscr{T} \Leftrightarrow D \subseteq \mathbb{R}$ și $\forall s \in D$, $\exists t > s$, încît $[s, t) \subseteq D$, unde $[s, t) = \{x \in \mathbb{R} \mid s \leqslant x < t\}$.

DEFINIȚIA 2. Dacă $(X, \mathscr{T})$ este un spațiu topologic, atunci o submulțime $F \subseteq X$ este numită *închisă* dacă complementara sa, $\mathscr{C}F = X \setminus F$, este deschisă, deci $\mathscr{C}F \in \mathscr{T}$.

Următoarele proprietăți pentru mulțimi închise rezultă imediat din Def. 1 și 2.

TEOREMA 1. *În orice spațiu topologic $(X, \mathscr{T})$:*

1) *$\emptyset$, X sînt mulțimi închise;*

2) *Orice intersecție de mulțimi închise este o mulțime închisă;*

3) *O reuniune finită de mulțimi închise este o mulțime închisă.*

OBSERVAȚIA 1. Noțiunile de mulțime deschisă și închisă într-un spațiu topologic sînt duale.

Proprietățile 1)—3) din Teorema 1 pot fi folosite pentru a defini spațiul topologic.

Topologiile pe o aceeași mulțime formează o mulțime parțial ordonată în raport cu următoarea relație.

DEFINIȚIA 3. Date topologiece $\mathscr{T}$ și $\mathscr{T}'$ pe X, se spune că $\mathscr{T}$ este *mai slabă decît $\mathscr{T}'$* și vom scrie $\mathscr{T} \prec \mathscr{T}'$ dacă $\forall D \in \mathscr{T} \Rightarrow D \in \mathscr{T}'$ (deci $\mathscr{T} \subseteq \mathscr{T}'$). Se spune că $\mathscr{T}'$ este *mai tare decît $\mathscr{T}$*.

Pentru orice topologie $\mathscr{T}$, pe o mulțime X, avem $\mathscr{T}_0 \prec \mathscr{T} \prec \mathscr{T}_1$.

Este evident că nu oricare două topologii sînt comparabile.

DEFINIȚIA 4. Fie $(X, \mathscr{T})$ un spațiu topologic și $\mathscr{B} \subseteq \mathscr{T}$. Vom spune că $\mathscr{B}$ este o *bază pentru $\mathscr{T}$* dacă orice mulțime deschisă este o reuniune de mulțimi din $\mathscr{B}$.

TEOREMA 2. *Fie X o mulțime și $\mathscr{B} \subseteq 2^X$, satisfăcînd condițiile următoare:*

1) $X = \bigcup_{B \in \mathscr{B}} B$;

2) *Orice intersecție finită de mulțimi din $\mathscr{B}$ este o reuniune de mulțimi din $\mathscr{B}$.*

Atunci, există o singură topologie $\mathscr{T}$ pe X, a cărui bază este $\mathscr{B}$.

Demonstrație. Se definește $D \in \mathscr{T} \Leftrightarrow D = \bigcup_{B' \in \mathscr{B}' \subseteq \mathscr{B}} B'$, pentru $\mathscr{B}'$ o submulțime oarecare a lui $\mathscr{B}$ (inclusiv $\emptyset$ și $\mathscr{B}$). Se verifică ușor condițiile Def. 1. Unicitatea topologiei $\mathscr{T}$ este evidentă, două topologii diferite neputînd avea o aceeași bază.

DEFINIȚIA 5. Vom spune că *topologia $\mathscr{T}$ satisface axioma a 2-a a numerabilității* dacă admite o bază numărabilă.

DEFINIȚIA 6. Fie $(X, \mathscr{T})$ un spațiu topologic și $\mathscr{S} \subseteq \mathscr{T}$. Vom spune că $\mathscr{S}$ este o *subbază pentru $\mathscr{T}$* dacă orice mulțime deschisă este o reuniune arbitrară de intersecții finite de mulțimi din $\mathscr{S}$.

TEOREMA 3. *Fie X o mulțime și $\mathscr{S} \subseteq 2^X$, încît $X = \bigcup_{S \in \mathscr{S}} S$. Atunci există o topologie și numai una pe X, pentru care $\mathscr{S}$ este o subbază.*

Demonstrație. După Teorema 2, este suficient să se arate că intersecțiile finite de mulțimi din $\mathscr{S}$ satisfac condițiile 1) și 2) ale acestei teoreme, ceea ce se verifică imediat.

EXERCIȚII

1. Să se determine numărul de topologii pe o mulțime cu trei elemente.

2. Să se arate că nici una din următoarele familii de submulțimi ale lui $\mathbb{R}$ nu este topologie: $\mathscr{U}_1 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x] \mid x \in \mathbb{R}\}$; $\mathscr{U}_2 = \{\emptyset, \mathbb{R}\} \cup \cup \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\}$.

Indicație. $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(-\infty, -\frac{1}{n}\right] = (-\infty, 0) \notin \mathscr{U}_1$ și $(1, 2) \cup (3, 4) \notin \mathscr{U}_2$.

3. Să se arate că dacă $\mathscr{B}$ este o bază pentru topologia $\mathscr{T}$ pe X și dacă $A \subseteq X$, atunci $\mathscr{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathscr{B}\}$ este o bază pentru topologia indusă $\mathscr{T}_A$. Să se enunțe rezultatul pentru subbaze.

4. Cum putem defini noțiunile de bază și subbază pentru mulțimile închise? Să se enunțe dualele Teoremelor 2 și 3.

5. Fie X o mulțime și $x_0 \in X$. Definim $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\} \cup \{D \subset X \mid x_0 \notin D\}$. Să se arate că $\mathscr{T}$ este o topologie pe X (numită *topologia punctului exclus*).

6. Fie $X = \mathbb{R}^n$ (sau $X = \mathbb{C}^n$). O submulțime F este numită închisă dacă există o mulțime de polinoame în n variabile, cu coeficienți din $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}$), încît F este mulțimea punctelor în care se anulează toate aceste polinoame. Să se arate că sînt satisfăcute condițiile 1)—3) din Teorema 1 și să se deducă topologia corespunzătoare.

Această topologie este numită *topologia Zariski*. În cazul $n = 1$ se obține topologia complementarelor finite (exemplul 3).

Indicație. Mulțimea vidă corespunde unui polinom constant nenul. Mulțimea X corespunde polinomului identic nul. Să scriem $Z(T) = \{x \in X \mid f(x) = 0, \forall f \in T\}$, pentru T o mulțime de polinoame în n variabile. Dacă $F_i = Z(T_i)$, $i \in I$, atunci $\bigcap_{i \in I} F_i = Z(\bigcup_{i \in I} T_i)$ și $F_1 \cup F_2 = Z(T_1 T_2)$, unde $T_1 T_2 = \{g = f_1 f_2 \mid f_1 \in T_1, f_2 \in T_2\}$. Pentru a verifica formula referitor la reuniune, fie $x \in Z(T_1 T_2)$ și $x \notin F_1 \Rightarrow \exists f \in T_1$, cu $f(x) \neq 0$. Atunci, $\forall g \in T_2$, avem $(gf)(x) = g(x) f(x) = 0 \Rightarrow g(x) = 0$, deci $x \in F_2$.

7. Să se arate că: a) Dacă D este deschisă în X și D' este deschisă în D, atunci D' este deschisă în X; b) Dacă F este închisă în X și F' este închisă în F, atunci F' este închisă în F.

§ 2. Vecinătăți

Fie $(X, \mathscr{T})$ un spațiu topologic și $x_0 \in X$.

DEFINIȚIA 1. Se numește *vecinătate a punctului* x_0 orice submulțime $V \subseteq X$ cu proprietatea că există $D \in \mathscr{T}$, încît $x_0 \in D \subseteq V$.

Analog se definește o *vecinătate a unei submulțimi oarecare*, $A \subseteq X$.

Notăm cu $\mathscr{V}(x_0)$ mulțimea tuturor vecinătăților lui x_0.

TEOREMA 1. *Pentru orice spațiu topologic $(X, \mathscr{T})$ și orice punct $x_0 \in X$ au loc proprietățile:*

1) $\mathscr{V}(x_0) \neq \emptyset$ *și* $\forall V \in \mathscr{V}(x_0) \Rightarrow x_0 \in V$;

2) *Dacă* $V' \in 2^X$, *încît există* $V \in \mathscr{V}(x_0)$, *cu* $V' \supset V$, *atunci* $V' \in \mathscr{V}(x_0)$;

3) *Dacă* $V_1, V_2 \in \mathscr{V}(x_0) \Rightarrow V_1 \cap V_2 \in \mathscr{V}(x_0)$;

4) $\forall V \in \mathscr{V}(x_0)$, $\exists V' \in \mathscr{V}(x_0)$, *încît, pentru orice* $y \in V'$, *avem* $V \in \mathscr{V}(y)$.

Demonstrație. 1) $X \in \mathscr{V}(x_0)$ (și orice deschisă care conține x_0 este vecinătate). 2)—3) Rezultă imediat. 4) Putem lua $V' = D =$ mulțimea deschisă din Def. 1.

OBSERVAȚIA 1. Dacă fiecărui punct x al unei mulțimi X i se asociază cîte o familie de părți $\mathscr{V}(x) \subseteq 2^X$, satisfăcînd fiecare proprietățile 1)—4) din Teorema 1, atunci există o topologie și numai una în raport cu care sistemul de vecinătăți ale lui x este $\mathscr{V}(x)$. Se definește $D \in \mathscr{T} \Leftrightarrow \forall x \in D \Rightarrow D \in \mathscr{V}(x)$.

TEOREMA 2. *Fie $(X, \mathscr{T})$ un spațiu topologic și $A \subseteq X (A \neq \emptyset)$. Atunci, A este deschisă dacă și numai dacă $\forall x \in A$ avem $A \in \mathscr{V}(x)$.*

TEOREMA 3. *Fie $(X, \mathscr{T})$ un spațiu topologic și $A \subseteq X (A \neq \emptyset)$. Atunci, A este închisă dacă și numai dacă pentru orice punct $x \in X$, cu proprietatea că $\forall V \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset$, avem $x \in A$.*

DEFINIȚIA 2. Fie $(X, \mathscr{T})$ un spațiu topologic și $A \subseteq X$.

a) *Interiorul mulțimii* A (în raport cu $\mathscr{T}$) se definește prin $\operatorname{Int} A = \mathring{A} = \{x \in A \mid A \in \mathscr{V}(x)\}$. Avem $\operatorname{Int} A \subseteq A$ și, din Teorema 2, $A \in \mathscr{T} \Leftrightarrow A = \operatorname{Int} A$.

b) *Închiderea mulțimii* A se definește prin $\bar{A} = \{x \in X \mid \forall V \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow V \cap A \neq \emptyset\}$. Avem $A \subseteq \bar{A}$ și, din Teorema 3, A este închisă dacă și numai dacă $A = \bar{A}$. Punctele mulțimii $\bar{A}$ se numesc *puncte aderente mulțimii* A, $\bar{A}$ fiind numită și *aderența mulțimii* A.

c) Un punct $x \in X$ este numit *punct de acumulare pentru* A, dacă este punct aderent mulțimii $A \setminus \{x\}$.

d) Un punct $x \in X$ este numit *punct frontieră pentru* A, dacă $x \in \bar{A} \cap \overline{(X \setminus A)}$.

e) Dacă $A \subseteq B \subseteq X$, spunem că A *este densă în* B, dacă $B \subseteq \bar{A}$; A este densă în X dacă $\bar{A} = X$.

Un spațiu topologic X se numește *separabil* dacă conține o submulțime numărabilă densă în X.

DEFINIȚIA 3. Un spațiu topologic $(X, \mathscr{T})$ se numește *spațiu Hausdorff* sau *spațiu separat* dacă $\forall x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$, $\exists V_i \in \mathscr{V}(x_i)$, $i = 1, 2$, încît $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

EXEMPLE. 1. Topologia discretă $\mathscr{T}_1$ este o topologie separată.

2. Topologia minimală $\mathscr{T}_0$ nu este separată dacă spațiul are mai mult decît un punct.

3. Dacă $(X, \mathscr{T})$ este un spațiu Hausdorff, orice subspațiu al său este la fel.

4. Dacă $(\mathbb{R}, \mathscr{Z})$ este spațiul topologic al numerelor reale cu topologia Zariski (exerc. 6 § 1) acesta nu este separat.

TEOREMA 4. *Într-un spațiu Hausdorff X, mulțimea formată dintr-un singur punct, $\{x\}$, este închisă.*

EXERCIȚII

1. Să se arate că:

a) $\text{Int}\, A \cap \text{Int}\, B = \text{Int}(A \cap B)$; $\text{Int}\, A \cup \text{Int}\, B \subseteq \text{Int}(A \cup B)$; $\text{Int}(\bigcap_{i \in I} A_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} \text{Int}\, A_i$; b) $\overline{A \cup B} \supseteq \bar{A} \cup \bar{B}$, $\overline{A \cap B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}$.

2. Fie $\leqslant$ o relație de ordine pe mulțimea X. Pentru $x \in X$, spunem că $V \subseteq X$ este o vecinătate a lui x dacă există un interval deschis $I = \{y \mid a_1 < y < a_2,\ a_1,\ a_2 \in X\}$, încît $x \in I \subseteq V$. Să se arate că vecinătățile astfel definite satisfac condițiile 1)—4) din Teorema 1. Să se descrie topologia obținută (numită *topologia ordinii pe X*).

3. Să se arate că topologia ordinii uzuale pe $\mathbb{Z}$ coincide cu topologia discretă, dar topologia ordinii pe $\mathbb{Q}$ nu este discretă.

Indicație. Pentru orice $m \in \mathbb{Z}$, avem $\{m\} = (m - 1,\ m + 1) \cap \mathbb{Z}$.

4. Să se arate că: a) $\text{Int}\, A$ este reuniunea tuturor mulțimilor deschise incluse în A; b) $\bar{A}$ este intersecția tuturor mulțimilor închise ce conțin pe A.

5. Să se arate că următoarele două proprietăți ale unui spațiu topologic sînt echivalente: i) Închiderea oricărei mulțimi deschise este o mulțime deschisă; ii) Oricare două mulțimi deschise, disjuncte, au închiderile disjuncte. Un asemenea spațiu se numește *discontinuu la extremități*.

6. Să se arate că X este un spațiu Hausdorff dacă și numai dacă $\forall x \in X$, $\{x\} = \bigcap_{V \in \mathscr{V}(x)} V$, V închisă.

§ 3. Aplicații continue. Aplicații deschise (închise). Omeomorfisme și omeorfisme locale. Secțiuni

DEFINIȚIA 1. Fie $(X, \mathscr{T})$ și $(Y, \mathscr{T}')$ două spații topologice și $f : X \to Y$ o aplicație.

a) Dacă $x \in X$, se spune că f este *continuă în punctul x* dacă $\forall V' \in \mathscr{V}(f(x))$, $\exists V \in \mathscr{V}(x)$, încît $f(V) \subseteq V'$ (sau, echivalent, $f^{-1}(V') \in \mathscr{V}(x)$).

b) Dacă f este continuă în orice punct $x \in X$, spunem că f este *continuă*.

TEOREMA 1. *Fie $f : X \to Y$ o aplicație între două spații topologice. Atunci, următoarele afirmații sînt echivalente:*

a) *f este continuă;*

b) *Pentru orice mulțime $A \subseteq X$, $f(\bar{A}) \subseteq \overline{f(A)}$;*

c) *Pentru orice mulțime închisă $F \subseteq Y$, $f^{-1}(F)$ este închisă în X;*

d) *Oricare ar fi mulțimea deschisă D a lui Y, $f^{-1}(D)$ este deschisă în X.*

Demonstrație. a) $\Rightarrow$ b) Fie $x \in \bar{A}$. Deoarece f este continuă, $\forall V' \in \mathscr{V}(f(x)) \Rightarrow f^{-1}(V') \in \mathscr{V}(x) \Rightarrow f^{-1}(V') \cap A \neq \emptyset \Rightarrow V' \cap f(A) \neq \emptyset \Rightarrow f(x) \in \overline{f(A)}$.

b) $\Rightarrow$ c) Fie F închisă în Y. După b), avem $f(\overline{f^{-1}(F)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(F))} = \bar{F} = F \Rightarrow \overline{f^{-1}(F)} \subseteq f^{-1}(F)$, și, cum incluziunea inversă are loc necondiționat, rezultă $f^{-1}(F) = \overline{f^{-1}(F)}$.

c) $\Rightarrow$ d) Fie D deschisă în Y. Atunci, $Y \setminus D$ este închisă în Y și deci $f^{-1}(Y \setminus D)$ este închisă în X. Dar $f^{-1}(Y \setminus D) = X \setminus f^{-1}(D)$, așa încît $f^{-1}(D)$ este deschisă în X.

d) $\Rightarrow$ a) Fie $x \in X$ și $V' \in \mathscr{V}(f(x))$, deci $\exists D'$, deschisă în Y, încît $f(x) \in D' \subseteq V'$. Din d) $\Rightarrow f^{-1}(D')$ deschisă în X, și cum $x \in f^{-1}(D') \subseteq f^{-1}(V') \Rightarrow f^{-1}(V') \in \mathscr{V}(x)$.

COROLAR 1. a) *Pentru orice spațiu topologic $(X, \mathscr{T})$, aplicația identitate 1_X este continuă.*

b) *Compunerea a două aplicații continue este o aplicație continuă.*

c) *Restricția unei aplicații continue, la un subspațiu al domeniului de definiție, este o aplicație continuă.*

DEFINIȚIA 2. a) O aplicație f între două spații topologice se numește *(h)omeomorfism* dacă f este continuă, bijectivă și cu inversa continuă.

b) O proprietate exprimată în termeni topologici și care se păstrează prin homeomorfisme se numește *proprietate topologică*.

De exemplu, proprietatea unei mulțimi de a fi închisă sau deschisă într-un spațiu topologic este o proprietate topologică. Proprietatea unui spațiu topologic de a fi separat Hausfdorff este de asemenea o proprietate topologică.

TEOREMA 2 (lema de lipire). *Fie $(X, \mathscr{T})$ un spațiu topologic, $\{A_i\}_{i \in I}$ o familie de subspații, cu $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ și $f_i : A_i \to Y$ aplicații continue (Y un spațiu topologic arbitrar), încît $f_i | A_i \cap A_j = f_j | A_i \cap A_j$, $\forall i, j \in I$. Atunci este bine definită aplicația $f : X \to Y$ prin $f | A_i = f_i$, iar*

pentru continuitatea funcţiei f este suficientă una din condiţiile următoare:

a) *I este finită şi A_i sînt închise;*

b) *A_i sînt deschise.*

Demonstraţie. Presupunem a) şi fie F închisă în Y. Atunci $f^{-1}(F) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(F)$. Prin ipoteză, $f_i^{-1}(F)$ sînt închise în A_i, care se presupun de asemenea închise. După exerc. 7 § 1, $f_i^{-1}(F)$ sînt închise în X. Mulţimea I fiind finită, $f^{-1}(F)$ este închisă. Dacă presupunem b), fie D deschisă în Y. Atunci, $f^{-1}(D) = \bigcup_{i \in I} f_i^{-1}(D)$. Avem că $f_i^{-1}(D)$ sînt deschise în deschisele A_i. După exerc. 7 § 1, $f_i^{-1}(D)$ sînt deschise în X. Rezultă că $f^{-1}(D)$ este deschisă.

DEFINIŢIA 3. O aplicaţie $f: X \to Y$, între două spaţii topologice, se numeşte *aplicaţie deschisă* (*închisă*) dacă imaginea directă a unei submulţimi deschise (închise) din X este o submulţime deschisă (închisă) în Y.

COROLAR 2. *O bijecţie, $f: X \to Y$, între două spaţii topologice este un homeomorfism dacă şi numai dacă este continuă şi deschisă (închisă).*

DEFINIŢIA 4. O aplicaţie continuă $f: X \to Y$ se numeşte (*h*)*omeomorfism local* dacă, oricare ar fi $x \in X$, există o vecinătate deschisă $D \in \mathscr{V}(x)$, care se aplică prin f homeomorf pe o submulţime deschisă din Y.

OBSERVAŢIA 1. Orice homeomorfism este un homeomorfism local. Reciproc nu este adevărat: fie X şi Y ca în fig. 1 şi f proiecţia. Atunci, f este un homeomorfism local, cum se constată imediat, dar nu este un homeomorfism (nefiind bijecţie).

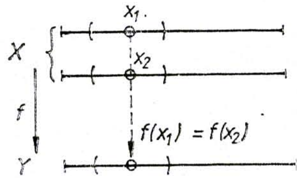


Fig. 1

TEOREMA 3. *Orice homeomorfism local este o aplicaţie deschisă.*

Demonstraţie. Fie $f: X \to Y$ un homeomorfism local şi D o deschisă în X. Atunci, $\forall x \in D$, $\exists D_x$, deschisă şi $D_x \in \mathscr{V}(x)$, încît $f|D_x : D_x \to f(D_x) = D_x'$ este un homeomorfism. Avem $D_x \cap D$ deschisă şi $D = \bigcup_{x \in D} D_x \cap D$. Atunci, $f|D_x \cap D : D_x \cap D \to f(D_x \cap D)$ este un homeomorfism, $\forall x \in D$. Deoarece $f(D_x \cap D)$ sînt deschise în D_x' (fiind imaginile homeomorfe ale unor deschise), deci şi în Y, şi $f(D) = \bigcup_{x \in D} f(D_x \cap D)$, rezultă că $f(D)$ este deschisă în Y.

TEOREMA 4. a) *Dacă $f: X \to Y$ este un homeomorfism local şi A este un subspaţiu al lui Y, atunci $f|f^{-1}(A): f^{-1}(A) \to A$ este de asemenea un homeomorfism local.*

b) *În particular, pentru $A = \{y\}$, $y \in Y$, $f|f^{-1}(y): f^{-1}(y) \to \{y\}$ este un homeomorfism local şi deci $f^{-1}(y)$ este un spaţiu discret, numit* **fibra lui f în punctul** *$y \in Y$.*

DEFINIŢIA 5. Se numeşte *proprietate topologică locală* orice proprietate ce se păstrează prin homeomorfisme locale.

Este evident că orice proprietate topologică locală este o proprietate topologică.

DEFINIŢIA 6. Fie $f: X \to Y$ o aplicaţie continuă şi $A \subseteq Y$. Se numeşte *secţiune a lui f deasupra lui A* o aplicaţie continuă $s: A \to X$, încît $f \circ s = 1_A$.

TEOREMA 5. *Fie $f: X \to Y$ un homeomorfism local. Atunci, pentru orice $y \in Y$ şi orice $x \in f^{-1}(y)$, există o vecinătate deschisă D' a lui y şi o secţiune s deasupra lui D', încît $s(y) = x$.*

Demonstraţie. f fiind un homeomorfism local, există o vecinătate deschisă D a lui $x \in X$, încît $f|D : D \to f(D)$ este un homeomorfism. Avem $D' = f(D)$ o vecinătate deschisă a lui y şi putem defini $s = (f|D)^{-1} : D' \to D \subset X$, care este o secţiune deasupra lui D'. În plus, $s(y) = (f|D)^{-1}(y) = x$.

TEOREMA 6. *Fie $f: X \to Y$ un homeomorfism local, $A \subseteq Y$ şi s o secţiune a lui f deasupra lui A. Atunci, aplicaţia $s: A \to s(A)$ este un homeomorfism.*

Demonstraţie. Aplicaţia $s: A \to s(A)$ este continuă şi surjectivă. În plus, $f \circ s = 1_A$, ceea ce implică faptul că s este şi injectivă. În sfîrşit, deoarece f este continuă, rezultă că s este şi deschisă şi deci un homeomorfism.

TEOREMA 7. *Fie $f: X \to Y$ un homeomorfism local şi s, s' două secţiuni ale lui f deasupra lui Y. Dacă s şi s' sînt egale într-un punct $y \in Y$, atunci ele coincid pe o vecinătate a lui y.*

Demonstraţie. Prin ipoteză, avem $s, s': Y \to X$, cu $s(y) = s'(y) = x$. Aplicaţia f fiind un homeomorfism local,

există o vecinătate deschisă D a lui x, încît $f|D : D \to f(D) = D'$ este un homeomorfism. Dar atunci,

$$s|[s^{-1}(D) \cap s'^{-1}(D) \cap D'] = s'|[s^{-1}(D) \cap s'^{-1}(D) \cap D'] =$$

$$= (f|D^{-1})|[s^{-1}(D) \cap s'^{-1}(D)].$$

Deci, pe vecinătatea $s^{-1}(D) \cap s'^{-1}(D) \cap D'$ a lui y, s și s' coincid.

DEFINIȚIA 7. O aplicație continuă $f : X \to Y$ care este un homeomorfism a lui X cu $f(X)$ se numește *scufundare* (a lui X în Y).

EXERCIȚII

1. Să se formuleze condiții de continuitate cu ajutorul bazelor și a subbazelor de topologii.

2. Să se arate că dacă spațiul topologic X are proprietatea că pentru orice spațiu Y, orice aplicație $f : X \to Y$ este continuă, atunci X are topologia discretă.

Indicație. Se ia $Y = X$, cu topologia discretă și $f = 1_X$.

3. Fie $X = \mathbb{R}$ cu topologia $\{\emptyset\} \cup \{\mathbb{R}\} \cup \{(-\infty, x) | x \in \mathbb{R}\}$. Să se arate că o funcție $f : X \to X$ este continuă dacă și numai dacă este nedescrescătoare ($x > x' \Rightarrow f(x) \geqslant f(x')$) și continuă la dreapta în sens uzual, adică $\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ încît dacă $x \leqslant x' < x + \delta$, atunci $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$.

4. Să se arate că aplicația $1_X : (X, \mathscr{T}_1) \to (X, \mathscr{T}_0)$ este continuă, dar $1_X : (X, \mathscr{T}_0) \to (X, \mathscr{T}_1)$ nu este continuă.

5. Fie X un spațiu topologic și $H(X)$ mulțimea homeomorfismelor $f : X \to X$. Să se arate că $H(X)$ este un grup în raport cu compunerea aplicațiilor. Fie $x \in X$ și $H_x(X) = \{f \in H(X) | f(x) = x\}$. Să se arate că $H_x(X)$ este un subgrup al lui $H(X)$.

6. Fie $f : X \to Y$ o aplicație între două spații topologice, astfel încît $\forall x \in X, \exists V_x \in \mathscr{V}(x)$, cu $f|V_x$ continuă. Să se arate că f este continuă (deci continuitatea are un caracter local).

Indicație. Se poate presupune V_x deschisă și se aplică lema de lipire (Teorema 2 § 3).

7. Fie $f : X \to Y$ o aplicație între două spații topologice. Fie $X = A \cup B$, cu $A \setminus B \subseteq \operatorname{Int} A$; $B \setminus A \subseteq \operatorname{Int} B$. Dacă $f|A$ și $f|B$ sînt continue, atunci f este continuă.

Soluție. Fie $x \in X$ și V o vecinătate a lui $f(x)$. Dacă $x \in A \cap B$, $\exists V'$, $V'' \in \mathscr{V}(x)$, încît:

$$f^{-1}(V) \cap A = (f|A)^{-1}(V) = V' \cap A;\ f^{-1}(V) \cap B = (f|B)^{-1}(V) = V'' \cap B.$$

Avem $V' \cap V'' \subseteq (V' \cap A) \cup (V'' \cap B) = f^{-1}(V)$, deci $f^{-1}(V) \in \mathscr{V}(x)$. Dacă $x \in A \setminus B \subseteq \operatorname{Int} A \Rightarrow A \in \mathscr{V}(x)$ și deci $V' \cap A \in \mathscr{V}(x)$. Rezultă că $f^{-1}(V) = (f|A)^{-1}(V) \cup (f|B)^{-1}(V) = (V' \cap A) \cup (f|B)^{-1}(V) \supseteq V' \cap A$ și deci $f^{-1}(V) \in \mathscr{V}(x)$. Analog, dacă $x \in B \setminus A$, deducem $f^{-1}(V) \supseteq V'' \cap B \in \mathscr{V}(x)$.

8. Din exercițiul 7 să se deducă lema de lipire (Teorema 2 § 3) în cazul a).

Indicație. Dacă $X = A \cup B$ și A, B sînt închise, $A \setminus B = X \setminus B$ este deschisă și deci $A \setminus B \subseteq \operatorname{Int} A$ (vezi exerc. 4 § 2).

§4. Spații vectoriale normate și spații metrice. Teorema lui Titze

Fie $\mathbb{K}$ unul din corpurile: $\mathbb{R}$ al numerelor reale, $\mathbb{C}$ al numerelor complexe, $\mathbb{H}$ al cuaternionilor (vezi exerc. 1).

DEFINIȚIA 1. Dacă V este un spațiu vectorial peste $\mathbb{K}$, o *normă* pe V este o funcție $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}$ ce satisface condițiile:

1) $\|x\| > 0$ dacă $x \neq 0$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$, $\forall x \in V$;

3) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Spațiul V înzestrat cu o normă, se numește *spațiu vectorial normat*.

EXEMPLE. 1. $\mathbb{K}$ este un spațiu vectorial normat, cu norma $\|\alpha\| = |\alpha|$, $\forall \alpha \in \mathbb{K}$.

2. $V = \mathbb{K}^n$ poate fi înzestrat cu norma $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\| = \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right\}^{1/2}$. Pentru $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, acesta este *spațiul euclidian*, pentru $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ este *spațiul unitar*, iar pentru $\mathbb{K} = \mathbb{H}$ *spațiul simplectic, n-dimensional*.

3. $V = \mathbb{K}^n$, cu norma carteziană $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_c = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

4. $V = \mathbb{K}^n$, p un număr real $\geqslant 1$, și

$$\|(x_1, x_2, \ldots, x_n)\|_p = \left\{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right\}^{1/p} \quad \text{(vezi exerc. 2).}$$

5. $V = C[0, 1]$, spațiul vectorial real al funcțiilor continue $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Se pot defini următoarele norme :

$$\|f\|_s = \sup\{|f(x)|\,|x \in [0, 1]\}\,;\quad \|f\|_i = \int_0^1 |f(x)|\,dx.$$

DEFINIȚIA 2. Fie X o mulțime. O *metrică* pe X este o funcție, $d : X \times X \to \mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R}\,|a \geqslant 0\}$, cu următoarele proprietăți :

1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $d(x, y) = d(y, x)$;

3) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Mulțimea X cu o metrică d se numește *spațiu metric*. Vom scrie uneori (X, d).

EXEMPLUL 6. Orice spațiu vectorial normat $(V, \|\ \|)$ este un spațiu metric, cu metrica $d(x, y) = \|x - y\|$, $\forall x, y \in V$.

7. Pentru orice mulțime X, putem defini *metrica discretă* : $d(x, y) = 0$ dacă $x = y$ și $d(x, y)) = 1$ dacă $x \neq y$.

8. Dacă (X, d) este un spațiu metric, putem defini și alte metrici pe X, de exemplu : $d'(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ sau $d''(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ etc.

DEFINIȚIA 3. Fie (X, d) un spațiu metric, $x_0 \in X$ și $r > 0$. Numim *disc* (*deschis*) cu centru în x_0 și de rază r, mulțimea $\mathring{D}(x_0, r) = \{x \in X\,|d(x, x_0) < r\}$.

Celula (sau *discul închis*) este mulțimea $D(x_0, r) = \{x \in X\,|d(x, x_0) \leqslant r\}$.

Sfera este mulțimea $S(x_0, r) = \{x \in X\,|d(x, x_0) = r\}$.

Într-un spațiu vectorial normat V, mulțimile $\mathring{D}(0, 1)$, $D(0,1)$, $S(0,1)$ sînt numite respectiv *discul*, *celula* și *sfera standard* și se notează prin $\mathring{D}(V)$, $D(V)$ respectiv $S(V)$. Pentru $V = \mathbb{R}^n$, cu norma euclidiană, notațiile sînt respectiv $\mathring{D}^n$, D^n și S^{n-1}.

În figura 2 sînt reprezentate celulele din $\mathbb{R}^2$, respectiv în raport cu normele : $\|\ \|_2$, $\|\ \|_c$, $\|\ \|_1$ și $\|\ \|_3$.

TEOREMA 1. *Dacă (X, d) este un spațiu metric, atunci mulțimea $\mathscr{B}_d = \{\mathring{D}(x_0, r)\,|x_0 \in X,\ r > 0\}$ formează o bază*

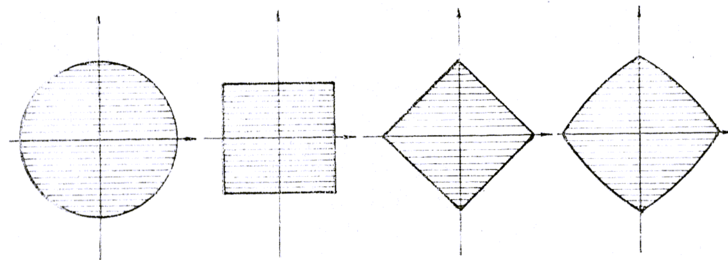


Fig. 2

de topologie Hausdorff pe X, numită **topologia metricii** d *și notată $\mathscr{T}_d$.*

Demonstrație. Se verifică ușor condițiile Teoremei 2 § 1 : $\forall x \in X$, avem $x \in \mathring{D}(x, 1)$. Apoi, dacă $y \in \mathring{D}(x_1, r_1) \cap \mathring{D}(x_2, r_2)$ și luăm $r = \min\{r_1 - d(y, x_1), r_2 - d(y, x_2)\}$, atunci $\mathring{D}(y, r) \subset \mathring{D}(x_1, r_1) \cap \mathring{D}(x_2, r_2)$. Topologia ce se obține este Hausdorff, deoarece dacă $x \neq y$, atunci, notînd $\alpha = d(x, y) > 0$, avem $\mathring{D}\left(x, \dfrac{\alpha}{3}\right) \cap \mathring{D}\left(y, \dfrac{\alpha}{3}\right) = \emptyset$.

Să reținem că mulțimile deschise din $\mathscr{T}_d$ sînt reuniuni arbitrare de discuri (deschise).

TEOREMA 2. *Fie (X, d), (Y, d') două spații metrice și $f : X \to Y$. Atunci, f este continuă, în topologiile metrice, dacă și numai dacă $\forall x \in X$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(x, \varepsilon) > 0$, încît $f(\mathring{D}(x, \delta)) \subseteq \mathring{D}(f(x), \varepsilon)$.*

DEFINIȚIA 3. Dacă în Teorema 2, δ nu depinde de x, spunem că f este *uniform continuă*.

DEFINIȚIA 4. Fie (X, d), un spațiu metric și $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un șir în X. Se spune că (x_n) *converge la* x, scriem $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, dacă $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$, încît $\forall n \geqslant n_0 \Rightarrow d(x_n, x) < \varepsilon$.

Pe calea binecunoscută din analiza matematică, se demonstrează teorema următoare.

TEOREMA 3. *O aplicație, $f: X \to Y$, între două spații metrice (X, d) și (Y, d'), este continuă dacă și numai dacă pentru orice punct $x_0 \in X$ și orice șir (x_n), convergent la x_0, șirul $(f(x_n))$ converge la $f(x_0)$.*

COROLAR 1. *Fie $(X, \| \ \|)$, $(Y, \| \ \|)$ două spații vectoriale normate și $f: X \to Y$ o funcție aditivă (adică $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$, $\forall x_1, x_2 \in X$), satisfăcînd condiția că există $r > 0$, așa fel ca $\|f(x)\| \leqslant r\|x\|$, $\forall x \in X$. În aceste condiții, funcția f este uniform continuă.*

Demonstrație. Aplicăm Teorema 2. Fie $x_0 \in X$ și $\varepsilon > 0$. Atunci, $\|f(x) - f(x_0)\| = \|f(x + (-x_0))\| \leqslant r\|x - x_0\|$. Dacă luăm $\delta = \frac{\varepsilon}{r}$, atunci $\|x - x_0\| < \delta$ implică $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

EXEMPLUL 9. Fie $(V, \| \ \|)$ un spațiu vectorial normat și fie a un scalar fixat. Definim aplicația $f: V \to V$ prin $f(x) = ax$. Avem atunci că $f(x)$ este aditivă și $\|f(x)\| = \|ax\| = |a| \, \|x\|$, ceea ce implică uniforma continuitate a funcției f.

Să considerăm acum produsul $V \times V$ cu structura de spațiu vectorial. Putem defini și o normă pe $V \times V$, luînd $\|(x, y)\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$. Considerăm acum aplicația, $g: V \times V \to V$, definită prin $g((x, y)) = x + y$. Această funcție (de o variabilă!) este aditivă

$$g((x_1, y_1) + (x_2, y_2)) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) =$$

$$= (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) = g((x_1, y_1)) + g((x_2, y_2)).$$

Avem apoi

$$\|g((x, y))\| = \|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \leqslant \|(x, y)\| +$$

$$+ \|(x, y)\| = 2\,\|(x, y)\|.$$

Prin urmare și g este aplicație uniform continuă.

DEFINIȚIA 5. Două *norme*, pe același spațiu vectorial, se numesc *echivalente* dacă topologiile definite de acestea coincid.

Aplicînd Corolarul 1 aplicației identice, obținem următorul rezultat.

COROLAR 2. *Fie $\| \ \|_1$, $\| \ \|_2$ două norme pe același spațiu vectorial V. Presupunem că există numerele reale r, $s > 0$, astfel încît $\|x\|_1 \leqslant r\|x\|_2$ și $\|x\|_2 \leqslant s\|x\|_1$, $\forall x \in V$. Atunci, cele două norme sînt echivalente.* (Aceste condiții sînt și necesare pentru echivalența normelor.)

DEFINIȚIA 6. Într-un spațiu metric (X, d), *diametrul unei submulțimi* $A \subseteq X$ se definește prin $\operatorname{diam} A = \sup_{x, y \in A} \{d(x, y)\}$.

DEFINIȚIA 7. Dacă (X, d) este un spațiu metric și $x \in X$, $A \subseteq X$, atunci *distanța de la x la A* se definește prin $d(x, A) = \inf_{a \in A} \{d(x, a)\}$ dacă $A \neq \emptyset$ și $d(x, \emptyset) = 1$.

Se obține ușor rezultatul următor.

LEMA 1. a) *Dacă* $\emptyset \neq A \subseteq B \Rightarrow d(x, B) \leqslant d(x, A)$, $\forall x \in X$;

b) $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in \bar{A}$;

c) *Dacă A este închisă, atunci* $d(x, A) = 0 \Leftrightarrow x \in A$.

LEMA 2. *Funcția $d(\cdot, A): X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, A)$, pentru A o submulțime fixată în X, este uniform continuă.*

Demonstrație. Este nebanal doar cazul $A \neq \emptyset$. Dacă presupunem aceasta și $\varepsilon > 0$, fie $x, x' \in X$, cu $d(x, x') < \frac{\varepsilon}{2}$. Atunci $\exists a \in A$, încît $d(x, a) < d(x, A) + \frac{\varepsilon}{2}$ și $d(x', A) \leqslant d(x', a) \leqslant d(x, a) + d(x, x') < d(x, A) + \varepsilon$. Analog, $d(x, A) < d(x', A) + \varepsilon$. Rezultă $|d(x, A) - d(x', A)| < \varepsilon$.

DEFINIȚIA 8. Un spațiu topologic $(X, \mathscr{T})$ este un *spațiu normal* dacă este un spațiu Hausdorff și dacă pentru oricare două submulțimi închise disjuncte F_1, F_2, există două deschise disjuncte D_1, D_2, încît $F_i \subset D_i$, $i = 1, 2$.

TEOREMA 4. *Orice spațiu metric este un spațiu normal.*

Demonstrație. Fie (X, d). După Teorema 1, acesta este un spațiu Hausdorff. Fie F_1, F_2 închise și disjuncte în

$(X, \mathscr{T}_d)$. Considerăm $D_1 = \{x \in X \mid d(x, F_1) < d(x, F_2)\}$ şi $D_2 = \{x \in X \mid d(x, F_2) < d(x, F_1)\}$. Mulţimile D_1 şi D_2 sînt deschise. Aceasta rezultă din Lema 2, care implică faptul că funcţia $f(x) = d(x, F_1) - d(x, F_2)$ este continuă, şi din relaţiile $D_1 = f^{-1}((-\infty, 0))$, $D_2 = f^{-1}((0, +\infty))$. Avem, evident, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Apoi, dacă $x \in F_1 \Rightarrow d(x, F_1) = 0$ (Lema 1) şi $d(x, F_2) > 0$, altfel ar rezulta $x \in \overline{F}_2 = F_2$, contrar ipotezei $F_1 \cap F_2 = \emptyset$. Deci, $d(x, F_1) < d(x, F_2)$, $\forall x \in F_1 \Rightarrow F_1 \subset D_1$. Analog rezultă $F_2 \subset D_2$.

LEMA 3 (Urîson). *Fie (X, d) un spaţiu metric şi F_1, F_2 închise în X şi disjuncte. Există atunci o aplicaţie continuă $f : X \to [-1, 1]$, încît*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \in F_1, \\ 1, & x \in F_2. \end{cases}$$

Demonstraţie. Se defineşte $f(x) = \dfrac{d(x, F_1) - d(x, F_2)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$. Utilizînd Lemele 1 şi 2, rezultă imediat că f satisface concluziilor lemei lui Urîson.

LEMA 4. *Fie (X, d) spaţiu metric, F o submulţime închisă a lui X şi $f : F \to \mathbb{R}$, încît $|f(x)| \leqslant \mu (\neq 0)$, f continuă. Atunci, există o funcţie continuă $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, care satisface condiţiile:*

i) $|\tilde{f}(x)| \leqslant \dfrac{\mu}{3}$, $\forall x \in X$;

ii) $|\tilde{f}(x)| < \dfrac{\mu}{3}$, $\forall x \in X \setminus F$;

iii) $|\tilde{f}(x) - f(x)| \leqslant \dfrac{2\mu}{3}$, $\forall x \in F$.

Demonstraţie. Considerăm mulţimile

$$F_1 = \left\{y \in F \mid f(y) \leqslant -\frac{\mu}{3}\right\}, \quad F_2 = \left\{y \in F \mid f(y) \geqslant \frac{\mu}{3}\right\},$$

F_1 şi F_2 închise şi disjuncte. Funcţia $\tilde{f}(x) = \dfrac{\mu}{3} \cdot \dfrac{d(x, F_1) - d(x, F_2)}{d(x, F_1) + d(x, F_2)}$ satisface condiţiile i) – iii).

Pentru iii) deosebim cazurile $x \in F_1$, $x \in F_2$, $x \in F \setminus (F_1 \cup F_2)$.

TEOREMA 5 (Titze). *Fie (X, d) spaţiu metric, F o submulţime închisă a lui X şi $f : F \to \mathbb{R}$ o aplicaţie continuă. Există atunci o extensie continuă a lui f, $\tilde{f} : X \to \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in F$. Mai mult, dacă funcţia f este mărginită, anume, $|f(x)| \leqslant \mu(\neq 0)$, $\forall x \in F$, atunci $|\tilde{f}(x)| < \mu$, pentru orice $x \in X \setminus F$.*

Demonstraţie. Să presupunem mai întîi că funcţia f este mărginită, deci că $|f(x)| \leqslant \mu(\neq 0)$, $\forall x \in F$. Vom defini, prin inducţie, un şir de funcţii continue, $g_0, g_1, \ldots$, astfel: luăm mai întîi $g_0(x) = 0$, apoi presupunem că am construit $g_0, \ldots, g_n$, încît:

$$1) \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n} g_i(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \mu, \ \forall x \in F$$

(pentru $n = 0$ aceasta este condiţia de mărginire acceptată prin ipoteză). Înlocuind în ipotezele Lemei 4 pe f cu $f - \sum_{i=0}^{n} g_i$ şi μ prin $\left(\frac{2}{3}\right)^n \mu$, se obţine o aplicaţie continuă g_{n+1}, definită pe X, care satisface condiţiile următoare:

$$2) \ |g_{n+1}(x)| \leqslant \frac{2^n}{3^{n+1}} \mu, \ \forall x \in X;$$

$$3) \ |g_{n+1}(x)| < \frac{2^n}{3^{n+1}} \mu, \ \forall x \in X \setminus F;$$

$$4) \ \left| f(x) - \sum_{i=0}^{n+1} g_i(x) \right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \mu, \ \forall x \in F.$$

Vom considera acum $\tilde{f}(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)$. Din condiţia 2), rezultă că seria aceasta este, conform criteriului lui Weierstrass, uniform convergentă pe X şi deci $\tilde{f}$ este o aplicaţie continuă (vezi exerc. 4). În plus, 1) arată că $\tilde{f}(x) = f(x)$,

$\forall x \in F$, iar din 3), pentru $x \in X \setminus F$, avem

$$|\tilde{f}(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty} g_i(x)\right| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |g_{i+1}(x)| < \mu \sum_{i=0} \frac{2^i}{3^{i+1}} = \mu.$$

Semnul $<$ se datorește faptului că șirul sumelor parțiale atașat seriei $\sum_{i=0}^{\infty}\left(\mu \frac{2^i}{3^{i+1}} - |g_{i+1}(x)|\right)$ este strict crescător.

Dacă funcția f nu este mărginită, se consideră homeomorfismul $h : \mathbb{R} \to (-1,\ 1)$, $h(x) = \frac{2}{\pi}$ arctg x. Atunci, funcția $hf : X \to (-1,\ 1)$ este continuă și mărginită, deci există, după cele de mai sus, $\tilde{f}' : X \to \mathbb{R}$, încît $\tilde{f}'(x) = h(f(x))$, $\forall x \in F$, $|\tilde{f}'(x)| < 1$, $\forall x \in X$. Luăm $\tilde{f} = h^{-1}\tilde{f}'$, care este o funcție continuă și pentru care avem $\tilde{f}(x) = h^{-1}(\tilde{f}'(x)) = f(x)$, $\forall x \in F$. Aceasta încheie demonstrația teoremei.

OBSERVAȚIE. Teorema lui Titze este valabilă pentru cazul mai general al spațiilor normale (vezi, de exemplu, [53, p. 74]).

EXERCIȚII

1. Fie $\mathbb{H} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \{q = (\lambda,\ x) | \lambda \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^3\}$. Numim elementele lui $\mathbb{H}$ *cuaternioni* și spunem că λ este *partea reală* a lui q iar x *partea vectorială*; scriem $\mathrm{Re}(q) = \lambda$, $\mathrm{Ve}(q) = x$. Dacă se identifică $(\lambda,\ 0)$ cu λ și $(0,\ x)$ cu x, scriem $q = \lambda + x$.

a) Să se arate că $\mathbb{H}$ are o structură de spațiu vectorial real în raport cu operațiile:

$$(\lambda + x) + (\lambda' + x') = (\lambda + \lambda') + (x + x');\ \lambda'(\lambda + x) = \lambda'\lambda + \lambda' x.$$

b) Se definește înmulțirea astfel: pentru $q = \lambda + x$ și $r = \mu + y$, $qr = \lambda\mu + \lambda y + \mu x + xy$, unde $xy = -x \cdot y + x \times y$ ($x \cdot y$ fiind produsul scalar și $x \times y$ produsul vectorial. Să se arate că avem:

$$q(r + \lambda s) = qr + \lambda(qs);\ q(rs) = (qr)s;\ (r + \lambda s)q = rq + \lambda(sq),$$

$$\forall q,\ r,\ s \in \mathbb{H},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

c) Să se arate că putem scrie cuaternionii sub forma $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, cu $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $k^2 = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$.

Indicație. Se ia o bază ortonormată în $\mathbb{R}^3$.

d) Pentru $q = q_0 + q_1 i + q_2 j + q_3 k$, se definește *conjugatul* prin $\bar{q} = q_0 - q_1 i - q_2 j - q_3 k$. Să se arate că dacă definim modulul $|q| = (q\bar{q})^{1/2}$, acesta satisface proprietățile: $|q| > 0$ dacă $q \neq 0$; $|qr| = |q||r|$; $|q + r| \leqslant |q| + |r|$. Pentru $q \neq 0$, $q^{-1} = \bar{q}/|q|^2$ și $\mathbb{H}$ devine, în raport cu adunarea și înmulțirea, un corp necomutativ. Acesta este *corpul cuaternionilor*.

2. Să se verifice condițiile de spații vectoriale normate pentru exemplele 1–5 § 4.

Indicație. Pentru exemplele 2 și 4 se stabilesc următoarele inegalități:

a) Dacă $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ și $p, q \in \mathbb{R}$, cu $p > 1$, $q > 1$ și $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci $\alpha\beta \leqslant \frac{\alpha^p}{p} + \frac{\beta^q}{q}$. Pentru demonstrație se folosește funcția $f(t) = \frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q}$ $(t > 0)$, care are un minim în $t = 1$, $f(1) = 1$. Luînd $t = \alpha^{1/q}\beta^{-1/p}$, se obține $1 \leqslant \frac{1}{p}\alpha^{p/q}\beta^{-1} + \frac{1}{q}\alpha^{-1}\beta^{q/p}$ și înmulțind cu $\alpha\beta$ obținem inegalitatea anunțată.

b) Dacă α_i, $\beta_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, iar $p > 1$, $q > 1$, cu $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, atunci are loc *inegalitatea lui Hölder*:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^q\right)^{1/q}.$$

Putem presupune că $\exists \alpha_i \neq 0$ și că $\exists \beta_i \neq 0$. Luînd atunci la punctul a)

$$\alpha = \frac{\alpha_i}{\left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_h^p\right)^{1/p}},\quad \beta = \frac{\beta_i}{\left(\sum_{h=1}^{n} \beta_h^q\right)^{1/q}},\quad \text{obținem}$$

$$\frac{\alpha_i\beta_i}{\left(\sum_{h=1}^{n} \alpha_h^p\right)^{1/p}\left(\sum_{h=1}^{n} \beta_h^q\right)^{1/q}} \leqslant \frac{\alpha_i^p}{p\sum_{h=1}^{n} \alpha_h^p} + \frac{\beta_i}{q\sum_{h=1}^{n} \beta_h^q}.$$

Sumînd după i, obținem inegalitatea lui Hölder.

c) Dacă α_i, $\beta_i \geqslant 0$ și $p \geqslant 1$, atunci are loc *inegalitatea lui Minkowski*:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^p\right)^{p}.$$

Pentru $p = 1$ avem egalitate. Presupunem $p > 1$. Cu inegalitatea lui Hölder, avem:

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^p = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^{p-1} (\alpha_i + \beta_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^{p-1} \alpha_i + \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^{p-1} \beta_i \leqslant$$

$$\leqslant \left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^{(p-1)\frac{p}{p-1}}\right]^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i)^p\right]^{\frac{p-1}{p}} \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^p\right)^{\frac{1}{p}}\right].$$

Utilizînd acum inegalitatea lui Minkowski, deducem:

$$\|x + y\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} (|x_i| + |y_i|)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

3. Fie $l_2(\mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}$, mulţimea şirurilor $x = (x_n)$ cu elemente din $\mathbb{K}$, îndeplinind condiţia că seria $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2$ este convergentă. Dacă $y = (y_n)$, se defineşte $x + y = (x_n + y_n)$, iar dacă $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha x = (\alpha x_n)$. Să se arate că luînd $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$, se obţine un spaţiu vectorial normat.

Indicaţie. $l_2(\mathbb{K})$ este un spaţiu cu produs scalar şi se utilizează *inegalitatea Cauchy-Schwartz* $|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$.

4. Să se arate că limita unui şir uniform convergent de aplicaţii continue f_n, $n = 1, 2, \ldots$, de la un spaţiu topologic X într-un spaţiu metric Y este o aplicaţie continuă.

Soluţie. Fie $f(x) = \lim f_n(x)$. Fie $\varepsilon > 0$ şi $x_0 \in X$. Conform ipotezei, există k încît $\forall x \in X$, are loc $d(f_k(x), f(x)) < \varepsilon$. Deoarece f_k este continuă în x_0, există o deschisă D care conţine x_0, astfel încît $d(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon$, $\forall x \in D$. Din prima inegalitate avem $d(f_k(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$ şi atunci $d(f(x), f(x_0)) \leqslant d(f(x), f_k(x)) + d(f_k(x), f_k(x_0)) + d(f_k(x_0), f(x_0)) < 3\varepsilon$, care arată că f este continuă în x_0.

5. Să se arate că un spaţiu topologic X care satisface concluzia teoremei lui Titze (Teorema 5) este normal.

Indicaţie. Fie F_0, F_1 închise şi disjuncte în X şi $f: F_0 \cup F_1 \to [0, 1]$, $f|F_0 = \{0\}$, $f|F_1 = \{1\}$. Dacă $\tilde{f}$ este o extensie a lui f la X, atunci $D_0 = \{x \in X \mid \tilde{f}(x) < 1/3\}$ şi $D_1 = \{x \in X \mid \tilde{f}(x) > 2/3\}$ sînt deschise, disjuncte, ce conţin respectiv F_0 şi F_1.

§ 5. Spaţiile $\mathbb{R}^n$, D^n, S^{n-1}

În acest paragraf vom prezenta cele mai uzuale exemple de spaţii topologice.

PROPOZIŢIA 1. *Normele* $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p}$, *cu* $p \in \mathbb{R}$, $p \geqslant 1$ *şi* $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_c = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$, *pe spaţiul vectorial* $\mathbb{R}^n$, *sînt echivalente.*

Topologia definită de una din aceste norme este numită *topologia uzuală pe* $\mathbb{R}^n$.

Demonstraţie. Aplicăm Corolarul 2 §4:

$$\|x\|_c = \|(x_1, \ldots, x_n)\|_c = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} =$$

$$= \|x\|_p \leqslant \left(\left(\sum_{i=1}^{n}\right)\|x\|_c^p\right)^{1/p} = n^{1/p}\|x\|_c.$$

OBSERVAŢIA 1. Peste tot, spaţiul $\mathbb{R}^n$ va fi subînţeles (dacă nu se fac precizări speciale) cu topologia uzuală.

PROPOZIŢIA 2. *O aplicaţie* $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_m(x))$, *este continuă dacă şi numai dacă componentele acesteia,* $f_i: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $x \rightsquigarrow f_i(x)$, *sînt continue.*

Reamintim că $\mathring{D}^n$, D^n, S^{n-1} reprezintă respectiv discul deschis, celula şi sfera cu centrul în $0 \in \mathbb{R}^n$ şi de rază 1.

PROPOZIŢIA 3. $\mathring{D}^n$ *este o submulţime deschisă a spaţiului* $\mathbb{R}^n$ *iar* D^n *şi* S^{n-1} *sînt submulţimi închise ale acestui spaţiu. Avem, în plus, relaţiile* $\mathring{D}^n = \operatorname{Int} D^n$, $D^n = \overline{\mathring{D}^n}$, S^{n-1} *fiind frontiera mulţimilor* D^n *şi* $\mathring{D}^n$.

Demonstraţie. $\mathring{D}^n$ este deschisă deoarece aparţine unei baze a topologiei uzuale a lui $\mathbb{R}^n$. Considerînd apoi aplicaţia $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definită prin $f((x_1, \ldots, x_n)) = x_1^2 + \ldots + x_n^2 - 1$, avem $D^n = f^{-1}((-\infty, 0])$ şi $S^{n-1} = f^{-1}(\{0\})$. Este evident apoi că $\mathring{D}^n \subset D^n$ şi, cum $\mathring{D}^n$ este deschisă, rezultă (vezi exerc. 4 § 2) că $\mathring{D}^n \subseteq \operatorname{Int} D^n$. Reciproc, dacă

$x \in \operatorname{Int} D^n \Rightarrow \exists D(x, \varepsilon) \subset D^n$, care implică $\|x\|_2 \leqslant 1 - \varepsilon < 1$, deci $x \in \overset{\circ}{D}{}^n$. În mod analog se stabilesc celelalte relații.

PROPOZIȚIA 4. *Fie $n \geqslant 2$. Definim* **emisfera nordică deschisă** *și respectiv* **închisă** *prin* $\overset{\circ}{S}{}^{n-1}_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_n > 0\}$ *și* $S^{n-1}_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in S^{n-1} \mid x_n \geqslant 0\}$. *Atunci, $\overset{\circ}{D}{}^{n-1}$ este homeomorf cu $\overset{\circ}{S}{}^{n-1}_+$ iar D^{n-1} cu S^{n-1}_+.*

Demonstrație. Definim $f : S^{n-1}_+ \to D^{n-1}$, prin $f((x_1, \ldots, x_n)) = (x_1, \ldots, x_{n-1})$. Aceasta este un homeomorfism, cu inversul

$$f^{-1}((x_1, \ldots, x_{n-1})) = (x_1, \ldots, x_{n-1}, \sqrt{1 - x_1^2 - \ldots - x_{n-1}^2}).$$

Restricția $f \mid \overset{\circ}{S}{}^{n-1}_+$ este de asemenea un homeomorfism $\overset{\circ}{S}{}^{n-1}_+ \to \overset{\circ}{D}{}^{n-1}$.

PROPOZIȚIA 5. *Pentru $n \geqslant 1$, discul deschis $\overset{\circ}{D}{}^n$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^n$.*

Demonstrație. Există homeomorfismul $\Phi : \overset{\circ}{S}{}^n_+ \to \mathbb{R}^n$, cu $\Phi((x_1, \ldots, x_{n+1})) = \left(\dfrac{x_1}{x_{n+1}}, \ldots, \dfrac{x_n}{x_{n+1}}\right)$. Considerînd atunci și homeomorfismul $f^{-1} : \overset{\circ}{D}{}^n \to \overset{\circ}{S}{}^n_+$, din Prop. 4, compusul $\Phi f^{-1} : \overset{\circ}{D}{}^n \to \mathbb{R}^n$ este de asemenea un homeomorfism.

PROPOZIȚIA 6. *Pentru $x_0 \in S^n$, spațiul $S^n \setminus \{x_0\}$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$.*

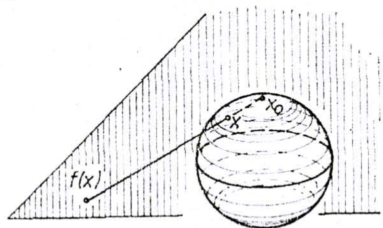


Fig. 3

Demonstrație. Putem presupune $x_0 = (0, \ldots, 0, 1)$ și se definește atunci $f : S^n \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^n$, prin

$$f(x_1, \ldots, x_{n+1}) = \left(\frac{x_1}{1 - x_{n+1}}, \ldots, \frac{x_n}{1 - x_{n+1}}\right) \text{ (vezi fig. 3).}$$

Aplicația f (numită *proiecție stereografică*) este un homeomorfism, avînd inversul

$$f^{-1}(y_1, \ldots, y_n) =$$

$$= \left(\frac{2y_1}{1 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \ldots, \frac{2y_n}{1 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2}, \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i^2 - 1}{1 + \sum_{i=1}^{n} y_i^2}\right).$$

PROPOZIȚIA 7. *Spațiul $\mathbb{R}^n$, cu topologia uzuală, satisface axioma a 2-a a numărabilității. În particular, $\mathbb{R}^n$ este spațiu separabil.*

Demonstrație. O bază numărabilă pentru topologia uzuală a lui $\mathbb{R}^n$ constă din discurile deschise, în raport cu una din normele din Prop. 1, cu centrele în puncte de coordonate raționale și de raze raționale (nenule). Dacă $\mathscr{B} = \{B_1, \ldots, B_n, \ldots\}$ este o asemenea bază, alegem $x_n \in B_n$ și fie $A = \{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$. Putem arăta că $\bar{A} = \mathbb{R}^n$. Procedăm prin reducere la absurd. Să presupunem că $\bar{A} \neq \mathbb{R}^n$. Atunci, $D = \mathbb{R}^n \setminus \bar{A}$ este o mulțime nevidă, deschisă și $D \cap A = \emptyset$. Dar $D = \bigcup_k B_{n_k}$ și $x_{n_k} \in B_{n_k} \cap A$, ceea ce implică $D \cap A \neq \emptyset$, contrar relației precedente. Se poate arăta și direct că submulțimea numărabilă $\mathbb{Q}^n$ este densă în $\mathbb{R}^n$.

PROPOZIȚIA 8. *Aplicația* $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, *definită prin* $\exp(t) = e^{2\pi i t}$, *este un homeomorfism local.*

Demonstrație. Considerăm $S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$, $\mathbb{C}$ fiind spațiu vectorial normat, cu norma dată de modul. Arătăm mai întîi că exp este continuă. Fie $\varepsilon > 0$. Atunci, luînd $\delta = \dfrac{\varepsilon}{2\pi}$, avem

$$|e^{2\pi i t} - e^{2\pi i t'}| = 2 |\sin \pi(t - t') [\sin \pi(t + t') +$$

$$+ i \cos \pi(t + t')]| = 2 |\sin \pi(t - t')| \leqslant 2\pi |t - t'| < \varepsilon$$

dacă $|t - t'| < \delta$.

Apoi, pentru $t_0 \in \mathbb{R}$, $\exp\left|\left(t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}\right)\right.$ este un homeomorfism al intervalului $\left(t_0 - \frac{1}{2}, t_0 + \frac{1}{2}\right)$ pe mulţimea deschisă $S^1 \setminus \{e^{2\pi i t_0}\}$.

Fibra în $z_0 = e^{2\pi i t_0}$ este $(\exp)^{-1}(z_0) = \{t_0 + n \mid n \in \mathbb{Z}\}$, care este un spaţiu discret, homeomorf cu $\mathbb{Z}$.

EXERCIŢII

1. Să se formuleze şi să se demonstreze Prop. 1, 2 pentru spaţiile $\mathbb{C}^n$ şi $\mathbb{H}^n$.

2. Să se arate că spaţiul $\mathbb{C}^n$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^{2n}$, iar $\mathring{D}(\mathbb{C})$, $D(\mathbb{C})$, $S(\mathbb{C})$ sînt respectiv homeomorfe cu $\mathring{D}^{2n}$, D^{2n}, S^{2n-1}.

Indicaţie. Aplicaţia $f((x_1 + iy_1, \ldots, x_n + iy_n)) = (x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n)$ realizează un homeomorfism $f: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}^{2n}$.

3. Să se arate că $\mathbb{H}^n$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^{4n}$ (vezi exerc. 1 § 4). Apoi, să se dovedească homeomorfismul spaţiilor ($\mathring{D}(\mathbb{H})$, $D(\mathbb{H})$, $S(\mathbb{H})$ respectiv cu $\mathring{D}^{4n}$, D^{4n}, S^{4n-1}.

4. Să se arate că discurile şi sferele din $\mathbb{R}^n$, construite cu ajutorul metricilor $\| \ \|_p$ şi $\| \ \|_c$, sînt respectiv homeomorfe (în topologia uzuală).

Indicaţie. Fie $\mathring{D}^n_p = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_p < 1\}$ şi $\mathring{D}^n_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\|_c < 1\}$, cu topologiile de subspaţii în raport cu topologia uzuală a lui $\mathbb{R}^n$. Definim

$$\mathring{f}: \mathring{D}^n_p \to \mathring{D}^n_c \text{ prin } \mathring{f}(x) = \begin{cases} 0, & x = 0, \\ \dfrac{\|x\|_p}{\|x\|_c}\, x, & x \neq 0. \end{cases}$$

Din Propoziţia 2 rezultă uşor că $\mathring{f}$ este un homeomorfism. Apoi, $\mathring{f}$ se poate extinde la un homeomorfism $f: D^n_p \to D^n_c$ şi $f|S^{n-1}_p : S^{n-1}_p \to S^{n-1}_c$ este de asemenea un homeomorfism.

5. Să se arate că oricare două discuri (deschise, închise) şi oricare două sfere din $\mathbb{R}^n$ sînt respectiv homeomorfe (indiferent de raze).

6. Se consideră spaţiul metric $M = [-3, 2] \cup [3, 5] \subset \mathbb{R}$ cu $d(x, y) = |x - y|$. Să se determine $\mathring{D}(0, 3)$, $D(0, 3)$, $S(0, 3)$ şi să se arate că în acest caz nu mai au loc relaţiile din Prop. 3.

Indicaţie. $\mathring{D}(0, 3) = (-3, 2]$, $D(0, 3) = [-3, 2]$ dar $\overline{\mathring{D}(0, 3)} = [-3, 2] \cup \{3\}$, deci $D(0, 3) \neq \overline{\mathring{D}(0, 3)}$. Apoi, $S(0, 3) = \{-3, 3\}$, $\operatorname{Fr} \mathring{D}(0, 3) = \{-3\}$, $\operatorname{Fr} D(0, 3) = \{-3, 2, 3\}$.

7. Să se arate că $\mathbb{R}$ este homeomorf cu $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$.

Indicaţie. Se poate construi $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = x - \frac{1}{x}$, avînd inversa $f^{-1}(y) = y + \sqrt{y^2 + 4}$.

8. Să se arate că orice interval deschis (a, b) este homeomorf cu $\mathbb{R}$.

Indicaţie. Se poate defini $f: (a, b) \to \mathbb{R}$, cu $f(x) = \operatorname{tg} \pi \frac{2x - a - b}{2(b - a)}$.

§ 6. Produse topologice

Fie $(X_i, \mathcal{T}_i)$ o mulţime de spaţii topologice. Considerăm produsul direct de mulţimi $X = \prod_{i \in I} X_i = \{x = (x_i) \mid x_i \in X_i\}$. X poate fi privit ca mulţimea funcţiilor $x: I \to \prod_{i \in I} X_i$, cu $x(i) = x_i$. Pentru fiecare indice $j \in I$, putem considera proiecţia canonică $p_j: \prod_{i \in I} X_i \to X_j$, $p_j((x_i)) = x_j$.

TEOREMA 1. *Există pe $X = \prod_{i \in I} X_i$ o topologie, numită* **topologia produs**, *în raport cu care aplicaţiile p_j sînt continue şi deschise şi care este cea mai slabă topologie pe X cu aceste proprietăţi.*

Demonstraţie. Fie $\mathcal{S} \subset 2^X$, mulţimea $\mathcal{S} = \{p_j^{-1}(D_j) \mid j \in I, D_j \in \mathcal{T}_j\}$. Atunci, $X = p_j^{-1}(X_j)$ şi aplicînd Teorema 3 § 1, rezultă că există o topologie $\mathcal{T}_p$ pe X a cărui o subbază este $\mathcal{S}$. Mulţimile deschise ale topologiei $\mathcal{T}_p$ sînt reuniuni arbitrare de mulţimi $p_j^{-1}(D_j)$. Este evident că p_j devin aplicaţii continue. Acestea sînt şi deschise, deoarece pentru j fixat şi $p_i^{-1}(D_i) \in \mathcal{T}_p$, avem

$$p_j(p_i^{-1}(D_i)) = \begin{cases} X_j & \text{dacă } i \neq j, \\ D_j & \text{dacă } i = j. \end{cases}$$

Dacă $\mathcal{T}$ este o altă topologie pe X, în raport cu care aplicaţiile p_j sînt continue, atunci $\forall j \in I$ şi $\forall D_j \in \mathcal{T}_j \Rightarrow p_j^{-1}(D_j) \in \mathcal{T}$, ceea ce implică incluziunea $\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$ şi deci $\mathcal{T}_p \subseteq \mathcal{T}$.

COROLAR 1. *O bază pentru topologia produs este formată din submulţimile $\prod_{i \in I} X_i'$, cu $X_i' = X_i$, $i \neq i_1, \ldots, i_n$, şi*

3 — c. 244

$X'_{i_1} = D_{i_1}, \ldots, X'_{i_n} = D_{i_n}$, *pentru toate submulțimile finite* $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ *și toate deschisele* $D_{i_1} \in \mathscr{T}_{i_1}, \ldots, D_{i_n} \in \mathscr{T}_{i_n}$. *În particular, dacă* $X = X_1 \times \ldots \times X_n$, *atunci o bază a topologiei produs este* $\{D_1 \times \ldots \times D_n \mid D_1 \in \mathscr{T}_1, \ldots, D_n \in \mathscr{T}_n\}$.

Demonstrație. Avem

$$p_j^{-1}(D_j) = \{x = (x_i) \in X \mid x_j \in D_j\},$$

$$p_{i_1}^{-1}(D_{i_1}) \cap \ldots \cap p_{i_n}^{-1}(D_{i_n}) =$$

$$= \{x = (x_i) \in X \mid x_{i_1} \in D_{i_1}, \ldots, x_{i_n} \in D_{i_n}\}.$$

COROLAR 2. a) *Topologia uzuală a lui* $\mathbb{R}^n$ *coincide cu topologia produsului* $\underbrace{\mathbb{R} \times \ldots \times \mathbb{R}}_{n \text{ ori}}$, *pe fiecare factor fiind considerată topologia uzuală.*

b) *Topologia cubului* $I^n = \{x = (x_i) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant x_i \leqslant 1\}$ *coincide cu cea a produsului* $\underbrace{I \times \ldots \times I}_{n \text{ ori}}$, *pentru* $I = [0, 1]$, *cu topologia uzuală.*

COROLAR 3. *Fie* $X = \prod_{i \in I} X_i$, *un produs topologic și* $f : Y \to X$ *o aplicație de la un spațiu topologic oarecare* Y. *Atunci,* f *este continuă dacă și numai dacă aplicațiile* $p_i f : Y \to X_i$ *sînt continue,* $\forall i \in I$.

COROLAR 4. *Dacă* $f_i : X_i \to Y_i$ *sînt aplicații continue, atunci aplicația* $f = \prod_{i \in I} f_i : \prod_{i \in I} X_i \to \prod_{i \in I} Y_i$, *definită prin* $f((x_i)) = (f_i(x_i))$, *este continuă. Reciproc, dacă* f *este continuă, atunci toate aplicațiile* f_i *sînt continue.*

DEFINIȚIA 1. Produsul topologic $T^n = \underbrace{S^1 \times \ldots \times S^1}_{n \text{ ori}}$ este numit *torul n-dimensional*. O bază a topologiei acestuia este formată din produsele $(a_1, b_1) \times \ldots \times (a_n, b_n)$, cu (a_i, b_i) arce deschise pe cercul S^1. În figura 4 este sugerat cazul $n = 2$.

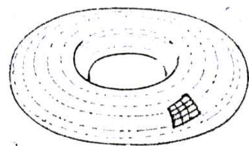


Fig. 4

TEOREMA 2. *Un produs topologic* $X = \prod_{i=I} X_i$ *este spațiul Hausdorff dacă și numai dacă toți factorii săi sînt spații Hausdorff.*

TEOREMA 3. *Un spațiu topologic* $(X, \mathscr{T})$ *este spațiu Hausdorff dacă și numai dacă* **diagonala** *sa,* $\Delta = \{(x, y) \in X \times X \mid y = x\}$, *este mulțime închisă în* $X \times X$.

Demonstrație. Presupunem că X este un spațiu Hausdorff. Arătăm că $X \times X \setminus \Delta$ este deschisă. Dacă $(x, y) \notin \Delta \Rightarrow y \neq x \Rightarrow \exists D, D' \in \mathscr{T}$, cu $x \in D$, $y \in D'$ și $D \cap D' = \emptyset$. Atunci $(x, y) \in D \times D'$ și $D \times D'$ este deschisă și inclusă în $X \times X \setminus \Delta$. După Teorema 2 § 2, rezultă că $X \times X \setminus \Delta$ este deschisă. Reciproc, fie Δ închisă în $X \times X$ și $x \neq y$ în X. Atunci, $(x, y) \in X \times X \setminus \Delta$ și deci există D, D' deschise în X, cu $(x, y) \in D \times D' \subset X \times X \setminus \Delta$. Rezultă $x \in D \in \mathscr{T}$, $y \in D' \in \mathscr{T}$ și $D \cap D' = \emptyset$.

EXERCIȚII

1. Fie $f : X \Rightarrow Y$ o aplicație între două spații topologice. *Graficul aplicației* f se definește prin $G_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\}$. Se consideră funcția $\tilde{f} : X \to X \times Y$, $\tilde{f}(x) = (x, f(x))$. Să se arate că următoarele afirmații sînt echivalente: a) f este continuă; b) $\tilde{f}$ este continuă; c) G_f este închisă în $X \times Y$.

2. Să se arate că produsul $S^1 \times \mathbb{R}$ este homeomorf cu *cilindrul* $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$.

3. Să se arate că $S^1 \times S^1$ este homeomorf cu *torul geometric* $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = (r_1 + r_2 \cos \psi) \cos \varphi,\ y = (r_1 + r_2 \cos \psi) \sin \varphi,\ z = r_2 \sin \psi;\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi\}$, (vezi fig. 5).

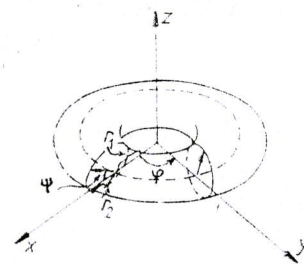


Fig. 5

4. Să se arate că $D^p \times D^q$ este homeomorf cu D^{p+q}.

Indicație. Se definește $f : D^p \times D^q \to D^{p+q}$ prin

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\|y\|}{(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}}(x, y) & \text{dacă } 0 < \|x\| \leqslant \|y\|, \\ \dfrac{\|x\|}{(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{1/2}}(x, y) & \text{dacă } 0 < \|y\| \leqslant \|x\|, \\ 0 & \text{pentru } x = y = 0. \end{cases}$$

5. Să se arate că pentru $n \geqslant 1$, spațiile $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ și $S^{n-1} \times \mathbb{R}$ sînt homeomorfe.

Indicație. $f : S^{n-1} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $f(x, t) = e^t x$, cu $f^{-1}(y) = \left(\frac{y}{\| y \|}, \ln \| y \| \right)$.

6. Să se arate că cubul I^n este homeomorf cu discul D^n.

Indicație. I^n este homeomorf cu $[-1, 1]^n$ și se aplică exerc. 4 § 5 pentru $p = 2$.

7. Fie $S_{p,q} = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + \ldots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \ldots - x_{p+q}^2 = 1\}$, unde $p + q \leqslant n$. Să se arate că $S_{p,q}$ este homeomorf cu $S^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-q}$.

Indicație. $f : S^{p-1} \times \mathbb{R}^{n-q} \to S_{p,q}$, $f(x_1, \ldots, x_p, y_1, \ldots, y_{n-q}) = (x_1 z, \ldots, x_p z, y_1, \ldots, y_{n-q})$, pentru $z = (1 + y_1^2 + \ldots + y_{n-q}^2)^{1/2}$.

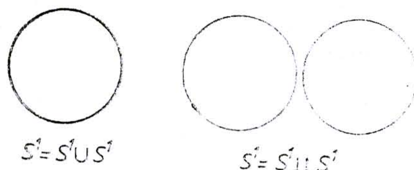
8. În spațiul $l_2(\mathbb{R})$ (exerc. 3 § 4) se consideră *cubul lui Hilbert* $\mathscr{H} = \{x = (x_k) \in l_2(\mathbb{R}) \mid 0 \leqslant x_k \leqslant 1/k\}$. Să se arate că $\mathscr{H}$ este homeomorf cu *cubul infinit*, $I^\infty = \prod_{n=1}^{\infty} I_n$, cu $I_n = I = [0, 1]$, $\forall n \geqslant 1$.

9. Dacă (X_i, d_i), $i = 1, \ldots, n$, sînt spații metrice, atunci produsul $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ admite o metrică d, a cărei topologie coincide cu topologia produsului, cînd factorii au topologiile metrice.

Indicație. Se definește $d : X \times X \to \mathbb{R}$ prin $d((x_i), (y_i)) = \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i)$.

§ 7. Spații conexe și local conexe. Spații liniar conexe și local liniar conexe

Fie $(X_i, \mathscr{T}_i)$, $i \in I$, o mulțime de spații topologice. Considerăm reuniunea disjunctă a acestora (suma), $X = \coprod_{i=1} X_i = \{(i, x_i) \mid x_i \in X_i, i \in I\}$ (vezi, de exemplu, fig. 6).



$S^1 = S^1 \cup S^1$ $\qquad$ $S^1 = S^1 \sqcup S^1$

Fig. 6

Pentru fiecare $j \in I$, putem considera injecțiile canonice $q_j : X_j \to X$, $q_j(x_j) = (j, x_j)$.

TEOREMA 1. *Există pe* $X = \coprod_{i \in I} X_i$ *o topologie, numită* **topologia sumă**, *în raport cu care aplicațiile* q_j *sînt continue și deschise și care este cea mai tare topologie cu aceste proprietăți.*

Demonstrație. Definim topologia $\mathscr{T}_s$ pe X astfel: $D \in \mathscr{T}_s \Leftrightarrow q_j^{-1}(D_j) \in \mathscr{T}_j$, $\forall j \in I$. Rezultă imediat că $\mathscr{T}_s$ este

o topologie în raport cu care aplicațiile q_j sînt continue. Apoi, dacă $D_j \in \mathscr{T}_j$, avem

$$q_i^{-1}(q_j(D_j)) = q_i^{-1}\{(j, x_j) \mid x_j \in D_j\} = \begin{cases} \emptyset, & i \neq j, \\ D_j, & i = j, \end{cases}$$

care arată că aplicațiile q_j sînt și deschise. Pentru o altă topologie $\mathscr{T}$ pe X, în raport cu care q_j sînt continue, dacă $D \in \mathscr{T}$, atunci $q_j^{-1}(D) \in \mathscr{T}_j$, $\forall j \in I$, deci $D \in \mathscr{T}_s$.

Fie $X_i' = \{(i, x_i) \mid x_i \in X_i\} = q_i(X_i)$. Atunci $X = \coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} X_i'$ și $X_i' \cap X_j' = \emptyset$, $i \neq j$.

COROLAR 1. a) *Pentru orice* $i \in I$, *submulțimea* X_i' *a sumei topologice* $X = \coprod_{i \in I} X_i$ *este închisă și deschisă.*

b) *O submulțime* $A \subseteq X$ *este deschisă (închisă) dacă și numai dacă* $A \cap X_i'$ *este deschisă (închisă) în* X_i', *pentru orice* $i \in I$.

c) *Subspațiul* X_i' *este homeomorf cu spațiul* X_i, $\forall i \in I$.

Demonstrație. a) Pentru i fixat și $j \in I$, avem $q_j^{-1}(X_i') = \begin{cases} \emptyset, & j \neq i \\ X_i, & j = i \end{cases}$, care arată că $X_i' \in \mathscr{T}_s$. Avem apoi $X_i' = X \setminus (\bigcup_{j \neq i} X_j')$ și prin urmare X_i' sînt și închise.

b) Rezultă din a) și din exerc. 7 § 1.

c) Avem aplicația continuă $q_i : X_i \to X_i'$, cu inversa $q_i^{-1}(i, x_i) = x_i$. Deoarece q_i este deschisă, q_i^{-1} este un homeomorfism.

COROLAR 2. *Fie* $(X_i, \mathscr{T}_i)_{i \in I}$ *o mulțime de spații topologice și* $f : \coprod_{i \in I} X_i \to Y$ *o aplicație într-un spațiu topologic oarecare. Atunci,* f *este continuă dacă și numai dacă toate aplicațiile* $f \circ q_i : X_i \to Y$, $i \in I$, *sînt continue.*

DEFINIȚIA 1. Un spațiu topologic $(X, \mathscr{T})$ se numește *neconex* dacă este homeomorf cu suma a cel puțin două spații topologice nevide. Un spațiu care nu este neconex se numește *conex*.

COROLAR 3. *Un spațiu topologic este conex dacă și numai dacă nu conține submulțimi proprii simultan deschise și închise.*

COROLAR 4. *Un spațiu topologic X este neconex dacă și numai dacă se poate reprezenta sub forma $X = A \cup B$, cu $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$ și A, B nevide.*

Demonstrație. Dacă X este neconex, $X = A' \sqcup B'$, $A' \neq \emptyset$, X. Rezultă $X = A \cup B$, cu $A \cap B = \emptyset$, $A \neq \emptyset$, $A \neq X$ și deci $\bar{A} = A$ și $\bar{B} = B$. Reciproc, dacă $X = A \cup B$, cu A, B nevide și $\bar{A} \cap B = A \cap \bar{B} = \emptyset$, atunci $A \cap B = \emptyset$, deci $B = X \setminus \bar{A}$, adică B este deschisă. Analog se arată că A este deschisă. Se deduce că $X = A \sqcup B$, cu $A \neq \emptyset$ și $B \neq \emptyset$.

TEOREMA 2. *Un interval $[a, b]$, cu topologia uzuală, este spațiu conex.*

Demonstrație. Să presupunem că $[a, b] = D_1 \cup D_2$, $D_1 \neq \emptyset$, $D_2 \neq \emptyset$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ și D_1, D_2 deschise. Fie $a \in D_1$ și să considerăm intervalele $[a, x]$, cu $x \in (a, b]$ și fie $a_* = \sup\limits_{x \in (a, b]} \{x \mid x \in D_1\}$. Avem $a_* \neq b$. Dacă $a_* \in D_1$, cum D_1 este deschisă, există puncte care se află în D_1, situate la dreapta lui a_*, contrar definiției lui a_*. Deci $a_* \notin D_1$. În același timp, nu putem avea nici $a_* \in D_2$ deoarece aceasta ar implica, pentru un $\varepsilon > 0$, că $a_* - \varepsilon \in D_2$ deși $[a, a_* - \varepsilon] \subset D_1$. Am ajuns la o contradicție, provenită din presupunerea că $[a, b]$ este neconex.

TEOREMA 3. *Orice mulțime convexă din $\mathbb{R}^n$ este conexă. În particular, $\mathbb{R}^n$ este un spațiu conex.*

Demonstrație. Fie T o mulțime convexă din $\mathbb{R}^n$ și $T = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 fiind deschise și nevide. Fie $a \in D_1$, $b \in D_2$. Atunci $[a, b] \subset T$ și avem $[a, b] = (D_1 \cap [a, b]) \cup (D_2 \cap [a, b])$, cu $D_1 \cap [a, b] \neq \emptyset$, $D_2 \cap [a, b] \neq \emptyset$. Aplicînd Teorema 2, rezultă că $(D_1 \cap [a, b]) \cap (D_2 \cap [a, b]) \neq \emptyset$, ceea ce implică $D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$.

COROLAR 5. *Spațiile $\mathring{D}^n$, D^n, I^n sînt conexe.*

OBSERVAȚIA 1. În $\mathbb{R}$, singurele submulțimi conexe sînt intervalele [vezi 7, p. 64].

EXEMPLE. 1. Mulțimea $\mathbb{Q}$ a numerelor raționale, cu topologia de subspațiu al lui $\mathbb{R}$, nu este conexă. Într-adevăr, pentru α un număr irațional arbitrar, mulțimile $D_1 = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < \alpha\} = (-\infty, \alpha) \cap \mathbb{Q}$ și $D_2 = (\alpha, +\infty) \cap \mathbb{Q}$ sînt deschise, nevide, disjuncte, și $\mathbb{Q} = D_1 \cup D_2$.

2. Mulțimea $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a numerelor iraționale, cu topologia uzuală, este neconexă. Demonstrația ca mai sus.

3. Orice spațiu discret, avînd mai mult decît un punct, este un spațiu neconex. În particular, sfera S^0 este spațiu neconex.

TEOREMA 4. *Fie $f: X \to Y$ o aplicație continuă. Dacă X este un spațiu conex, atunci $f(X)$ este o submulțime conexă a lui Y.*

COROLAR 6. *Cercul S^1 este un spațiu conex.*

Demonstrație. Se aplică Teorema 4 aplicației $\exp: \mathbb{R} \to S^1$.

COROLAR 7. a) *Condiția necesară și suficientă ca un spațiu topologic X să fie conex este ca orice funcție continuă $f: X \to \{1, 2\}$ să fie constantă.*

b) *Dacă $A \subseteq X$ este conexă, atunci $\bar{A}$ este conexă.*

Demonstrație. a) Dacă X este conex, atunci $f(X)$ este conex, deci $f(X) = \{1\}$ sau $f(X) = \{2\}$. Reciproc, dacă presupunem X neconex, $X = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 deschise, disjuncte, nevide, putem defini $f \mid D_1 = \{1\}$, $f \mid D_2 = \{2\}$ și f este continuă.

b) Dacă $f: \bar{A} \to \{1, 2\}$ este continuă $\Rightarrow f' = f \mid A : A \to \{1, 2\}$ este continuă și, după a), rezultă $f' =$ const. Fie, de exemplu, $f'(A) = \{1\}$. Apoi, dacă $x \in \bar{A}$ și $x \notin A$, să presupunem $f(x) = 2$. Atunci, $f^{-1}(\{2\}) \cap A \neq \emptyset$, deoarece $\{2\}$ este vecinătate a lui 2, deci $f^{-1}(\{2\})$ este vecinătate a lui x. Există deci $y \in f^{-1}(\{2\}) \cap A \Rightarrow f(y) = 2$, pentru $y \in A$, în contradicție cu $f'(A) = \{1\}$. Rezultă $f(\bar{A}) = \{1\}$ și se aplică a).

TEOREMA 5. *Un spațiu topologic X este conex dacă fiecare două puncte ale sale pot fi « unite » printr-o submulțime conexă (sînt conținute într-o submulțime conexă).*

Demonstrație. Să presupunem că X este neconex. Deci, $X = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 deschise, disjuncte și nevide. Fie $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$ și $A \subset X$ conexă, cu x_1, $x_2 \in A$. Atunci, $D_1' = D_1 \cap A$, $D_2' = D_2 \cap A$ sînt deschise în A, nevide și disjuncte, contrar ipotezei asupra lui A.

COROLAR 8. a) *Fie* A, $B \subset X$, *submulțimi conexe, cu* $X = A \cup B$ *și* $A \cap B \neq \emptyset$. *Atunci,* X *este un spațiu conex.*

b) *Sfera* S^n, $n \geq 1$, *este un spațiu conex.*

Demonstrație. a) Fie $X = D_1 \cup D_2$, D_1, D_2 deschise și disjuncte. Avem $A = (D_1 \cap A) \cup (D_2 \cap A)$ și $D_1 \cap A$, $D_2 \cap A$ sînt deschise și disjuncte. Rezultă $D_1 \cap A = \emptyset$ sau $D_2 \cap A = \emptyset$. În mod analog vom obține $D_1 \cap B = \emptyset$ sau $D_2 \cap B = \emptyset$. Dacă $D_1 \cap A = \emptyset$, $D_1 \cap B = \emptyset \Rightarrow D_1 = \emptyset$, deci X este conex. Dacă $D_1 \cap A = \emptyset$ și $D_2 \cap B = \emptyset \Rightarrow A \cap B = X \cap (A \cap B) = (D_1 \cup D_2) \cap (A \cap B) = [(D_1 \cap A) \cap (D_1 \cap B)] \cup [(D_2 \cap A) \cap (D_2 \cap B)] = \emptyset$, contrar ipotezei.

b) Avem $S^n = S^n_+ \cup S^n_-$ și $S^n_+ \cap S^n_- = S^{n-1} \neq \emptyset$. După Teorema 4 § 5, Teorema 4 și Cor. 5, rezultă că S^n_+, S^n_- sînt conexe. Se aplică a).

TEOREMA 6. *Fie* $X = \bigcup_{i \in I} X_i$, *cu* X_i *submulțimi conexe și astfel că pentru* $\forall i \neq j$, $X_i \cap X_j \neq \emptyset$. *Atunci,* X *este spațiu conex.*

Demonstrație. Să presupunem că $X = D_1 \cup D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ și D_1, D_2 sînt deschise (și închise) nevide în X. Atunci, există $X_{i_1} \subset D_1$, $X_{i_2} \subset D_2$ (din conexiunea mulțimilor X_i). Mai mult, avem $\bar{X}_{i_1} \subset D_1$ și $\bar{X}_{i_2} \subset D_2$ (D_1 și D fiind închise). Atunci, $\bar{X}_{i_1} \cap X_{i_2} = \emptyset$, $\bar{X}_{i_2} \cap X_{i_1} = \emptyset$, în contradicție cu ipoteza.

TEOREMA 7. *Produsul topologic al unui număr finit de spații conexe este un spațiu conex. În particular, torul* T^n *este un spațiu conex.*

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm proprietatea pentru două spații. Fie deci X_1, X_2 două spații topologice conexe și $f : X_1 \times X_2 \to \{1, 2\}$ o aplicație continuă. Vom arăta că aceasta este constantă. Fie $x = (x_1, x_2)$ și $x' = (x'_1, x'_2)$ două puncte arbitrare din $X_1 \times X_2$. Definim $f_1 : X_1 \to \{1, 2\}$, prin $f_1(y_1) = f(y_1, x_2)$, $\forall y_1 \in X_1$. După Corolarul 7 rezultă $f_1 = \text{const}$, deci $f(x_1, x_2) = f(x'_1, x_2)$. În mod analog, considerînd funcția $f_2 : X_2 \to \{1, 2\}$, definită prin $f_2(y_2) = f(x'_1, y_2)$, $y_2 \in X_2$, deducem că $f(x'_1, x_2) = f(x'_1, x'_2)$. În concluzie, $f(x_1, x_2) = f(x'_1, x'_2)$. Se aplică Cor. 7.

OBSERVAȚIA 2. Se poate demonstra afirmația Teoremei 7 pentru un produs topologic arbitrar [3, p.86].

DEFINIȚIA 2. Fie X un spațiu topologic și $x \in X$. *Componenta conexă a lui* x *în* X este reuniunea $C(x)$ a tuturor submulțimilor conexe ale lui X care conțin pe x.

TEOREMA 8. *Componentele conexe ale unui spațiu topologic* X *au următoarele proprietăți:*

a) $C(x)$ *este o submulțime conexă și închisă a lui* X;

b) *Dacă* x, $y \in X \Rightarrow C(x) \cap C(y) = \emptyset$ *sau* $C(x) = C(y)$;

c) $X = \bigcup_{x \in X} C(x)$;

d) *Dacă* X *are un număr finit de componente conexe, acestea sînt deschise.*

Demonstrație. a) După Teorema 6, $C(x)$ este o mulțime conexă. Apoi, după Cor. 7, $\overline{C(x)}$ este de asemenea conexă și cum $C(x) \subseteq \overline{C(x)} \Rightarrow C(x) = \overline{C(x)}$.

b) Rezultă în mod evident din Cor. 8 și din maximalitatea lui $C(x)$.

c) Este evidentă.

d) Dacă $X = C(x_1) \cup C(x_2) \cup \ldots \cup C(x_p)$ cu $C(x_i)$ distincte $\Rightarrow C(x_j) = X - (\bigcup_{i \neq j} C(x_i))$ și $\bigcup_{i \neq j} C(x_i)$ este închisă, deci $C(x_j)$ este deschisă.

OBSERVAȚIA 3. În general, componentele conexe nu sînt submulțimi deschise. De exemplu, componentele conexe ale lui $\mathbb{Q}$ sînt punctele acestuia (dar ele, evident, nu sînt mulțimi deschise). În adevăr, fie $x \in \mathbb{Q}$ și $C(x)$ componenta sa conexă în $\mathbb{Q}$. Să presupunem că există $y \in C(x)$, $y \neq x$. Fie α un număr irațional situat între x și y. Putem scrie atunci $C(x) = D_1 \cup D_2$, cu $D_1 = C(x) \cap (-\infty, \alpha)$ și $D_2 = (\alpha, +\infty) \cap C(x)$. Mulțimile D_1, D_2 sînt deschise, disjuncte și nevide, contrar conexității lui $C(x)$. Deci $C(x) = \{x\}$.

Această observație motivează următoarea definiție.

DEFINIȚIA 3. Un spațiu topologic X este numit *local conex în* $x \in X$, dacă $\forall V \in \mathscr{V}(x)$, $\exists U \in \mathscr{V}(x)$, U conexă și $U \subseteq V$. Spunem că X este *local conex* dacă este local conex în orice punct al său.

TEOREMA 9. *Un spațiu topologic* X *este local conex dacă și numai dacă componentelor conexe ale mulțimilor deschise ale lui* X *sînt deschise în* X.

Demonstrație. Presupunem că X este local conex și fie D deschisă în X. Fie $x \in D$ și $C = C(x)$ componenta

onexă a lui x în D. Fie $y \in C$. Atunci, $D \in \mathscr{V}(y)$ şi prin rmare $\exists U$ conexă, $U \in \mathscr{V}(y)$, $U \subseteq D$. Rezultă $U \subseteq C$, care arată că C este deschisă.

Reciproc, să presupunem componentele conexe ale mulţimilor deschise ale lui X deschise în X şi fie $V \in \mathscr{V}(x)$. Presupunem că V este deschisă. Atunci, componenta conexă $C(x)$ a lui x în V este deschisă în X şi deci V conţine o vecinătate conexă a lui x.

COROLAR 9. *Componentele conexe ale unui spaţiu local conex sînt submulţimi deschise.*

EXEMPLUL 4. Spaţiile $\mathbb{Q}$ şi $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ nu sînt local conexe.

OBSERVAŢIA 4. Nu orice spaţiu conex este local conex.

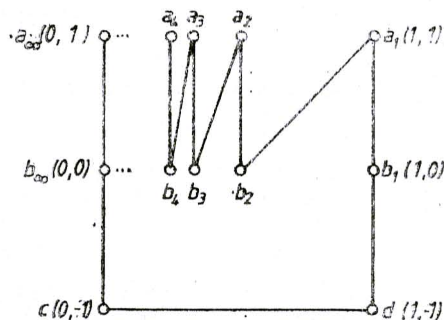


Fig. 7

EXEMPLE. 5. *Cercul lui Borsuk* este spaţiul din fig. 7. Acest spaţiu este conex (vezi şi Teorema 5). Nu este însă local conex în punctele segmentului $[a_\infty, b_\infty]$, deoarece orice vecinătate a unui punct al acestui segment, oricît de mică, este neconexă.

6. Fie X spaţiul format din segmentele de dreaptă din $\mathbb{R}^2$ unind punctul $(0, 1)$ cu punctele $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$, $n=1,2,\ldots$, şi din segmentul ce uneşte punctele $(0,1)$ şi $(0,0)$ (vezi fig. 8). X este un spaţiu conex (Teorema 6), dar nu este local conex în punctele $(0, y)$, $y \in [0, 1]$.

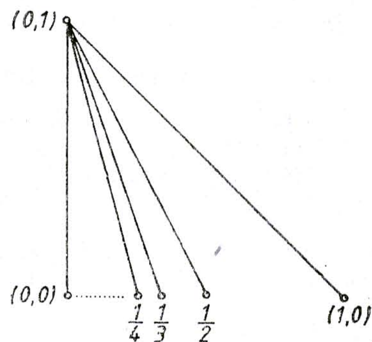


Fig. 8

Notăm prin $C(x)$ mulţimea componentelor conexe ale unui spaţiu topologic X.

TEOREMA 10. *Dacă $f: X \to Y$ este un homeomorfism, acesta induce o bijecţie $f_*: C(X) \to C(Y)$, $f_*(C(x)) = C(f(x))$, $x \in X$.*

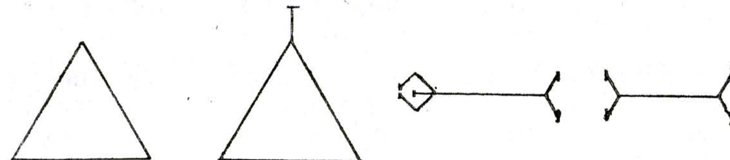
Demonstraţie. Pentru $x \in X$, $f(C(x))$ este conexă şi conţine punctul $f(x)$. Deci $f(C(x)) \subseteq C(f(x))$, încît este definită aplicaţia f_*. Dacă f este un homeomorfism, atunci f_* este bijecţie, avînd inversa $f_*^{-1} = (f^{-1})_*$.

DEFINIŢIA 4. Dacă X este un spaţiu conex şi $x \in X$, spunem că x este un *punct secţional de ordinul* p dacă $X\setminus\{x\}$ are p componente conexe.

COROLAR 10. *Fie X un spaţiu conex şi $f: X \to Y$ un homeomorfism. Atunci $x \in X$ este un punct secţional de ordinul p dacă şi numai dacă $f(x)$ este un punct secţional de ordinul în Y.*

EXEMPLE. 7. Intervalul $[0, 1]$ are două puncte secţionale de ordinul 1: pe 0 şi 1. Intervalul $[0, 1)$ are un singur punct secţional de ordinul 1, iar $(0, 1)$ nu are nici un punct secţional de ordinul 1. Prin urmare, segmentele $[0, 1]$, $[0, 1)$ şi $(0, 1)$ sînt două cîte două distincte topologic.

8. Aceeaşi metodă ne permite să distingem spaţiile din fig. 9.


Fig. 9

COROLAR 11. *Pentru $n > 1$, spaţiul $\mathbb{R}^n$ nu este homeomorf cu $\mathbb{R}^1$.*

Demonstraţie. $\mathbb{R}^1$ are toate punctele secţionale de ordinul 2. Pentru $n > 1$, $\mathbb{R}^n$ are toate punctele secţionale de ordinul 1. În adevăr, dacă $x \in \mathbb{R}^n$, atunci $\mathbb{R}^n\setminus\{x\}$ este homeomorf cu produsul $S^{n-1}\times\mathbb{R}$ (vezi exerc. 5 § 6). Apoi, pentru $n > 1$, S^{n-1} este spaţiu conex şi aplicînd Teorema 7, rezultă că $S^{n-1}\times\mathbb{R}$, şi deci $\mathbb{R}^n\setminus\{x\}$ este conex.

OBSERVAȚIA 5. Rezultatul mai general decît cel al Cor. 11, că $\mathbb{R}^m$ nu este homeomorf cu $\mathbb{R}^n$ dacă $m \neq n$, va fi demonstrat în Cor. 3 § 3 Cap. IV.

DEFINIȚIA 5. Un punct $x \in X$, al unui spațiu conex, se numește *local secțional de ordinul p* dacă orice vecinătate V a lui x conține o vecinătate U a lui x, încît $U \setminus \{x\}$ are p componente conexe.

COROLAR 12. *Dacă X și Y sînt două spații conexe homeomorfe, atunci acestea au același număr de puncte local secționale de ordinul p, pentru orice $p = 1, 2, \ldots$*

EXEMPLUL 9. Cu ajutorul Cor. 12 putem distinge din punct de vedere topologic spațiile din fig. 10.

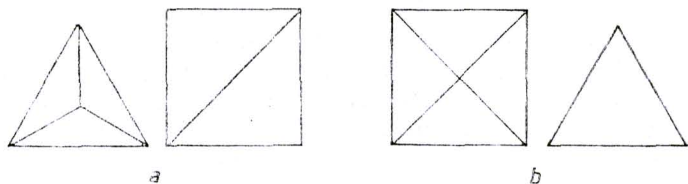


Fig. 10

DEFINIȚIA 6. Se numește *drum*, unind punctele a și b, în spațiul topologic X, orice aplicație continuă $\alpha : I = [0, 1] \to X$, cu $\alpha(0) = a$ și $\alpha(1) = b$.

DEFINIȚIA 7. Un *spațiu* topologic X se numește *liniar conex* (sau *conex prin arce*) dacă oricare două puncte ale lui X pot fi unite cu un drum în X.

Aplicînd Teoremele 4 și 5, obținem teorema următoare.

TEOREMA 11. *Orice spațiu liniar conex este un spațiu conex.*

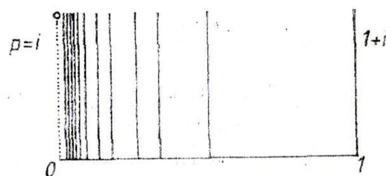


Fig. 11

OBSERVAȚIA 6. Reciproca Teoremei 11 nu este adevărată, cum se poate constata considerînd *spațiul «puricele și pieptenele»**) din fig. 11. Acesta este submulțimea $X \subset \mathbb{C}$, cu $X = p \cup P$, unde $p = \{i\}$ („puricele") și $P = [0, 1] \cup \left\{\frac{1}{n} + iy \mid n = 1, 2, \ldots ;\ 0 \leqslant y \leqslant 1\right\}$ („pieptenele").

*) În l. engleză, *flea and comb*. Dacă se ia $X \cup \{iy \mid y \in [0, 1]\}$ se obține *spațiul «pieptene»*.

Putem arăta că X este spațiu conex. Pentru aceasta, reținem mai întîi că, prin Teorema 5, P este un spațiu conex. Să presupunem acum că A este o submulțime deschisă și închisă a lui X. Putem presupune că $i \in A$ (altfel putem lua complementara lui A, care este de asemenea deschisă și închisă). Există atunci $\varepsilon > 0$, încît avem incluziunea $\{z \mid |z - i| < \varepsilon\} \cap X \subseteq A$. Apoi, există n încît $\frac{1}{n} + i \in A$ și deci $A \cap P \neq \emptyset$. Cum însă P este mulțime conexă și $A \cap P$ este nevidă, deschisă și închisă în P, rezultă $A \cap P = P$, adică $P \subseteq A$. Dar, $X = p \cup P$ și $p \subset A$. Deci $A = X$, ceea ce dovedește că X este spațiu conex.

Vom arăta acum că X nu este spațiu liniar conex, arătînd că singurul drum în X care începe din i este drumul constant. Fie $\alpha : I \to X$, cu $\alpha(0) = i$. Deoarece $\{i\}$ este închisă în X, rezultă că $\alpha^{-1}(i)$ este închisă (și nevidă) în $[0, 1]$. Fie acum $D = X \cap \{z \in \mathbb{C} \mid |z - i| < 1/2\}$. Aceasta este deschisă în X, deci pentru $t_0 \in \alpha^{-1}(i)$ există $\varepsilon > 0$, astfel încît $|t - t_0| < \varepsilon$ implică $\alpha(t) \in D$. Putem arăta că avem $\alpha((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1]) = \{i\}$. Fie pentru aceasta $|t_1 - t_0| < \varepsilon$, încît $\alpha(t_1) \in P$. Deoarece $D \cap P$ este o reuniune de intervale disjuncte, intervalul conținînd punctul $\alpha(t_1)$ este deschis și închis în D, deoarece acest interval este de forma $\left\{\frac{1}{n} + iy \mid y \in [0, 1]\right\} \cap D$, iar D este deschisă. Aceasta însă contrazice conexitatea mulțimii $\alpha((t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1])$. Prin urmare, nu există t_1 ca mai sus, ceea ce implică faptul că pentru orice $t_0 \in \alpha^{-1}(i)$, există $\varepsilon > 0$, încît $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, 1] \subset \alpha^{-1}(i)$. Rezultă că $\alpha^{-1}(i)$ este și deschisă. Din conexitatea spațiului $[0, 1]$, rezultă egalitatea $\alpha^{-1}(i) = [0, 1]$.

EXEMPLUL 10. Spațiile $\mathring{D}^n$, D^n, $\mathbb{R}^n$, I^n sînt conexe, fiind convexe.

TEOREMA 12. *Dacă $f : X \to Y$ este o aplicație continuă și X este liniar conex, atunci $f(X)$ este un subspațiu liniar*

conex al lui Y. În particular, dacă f este surjectivă, atunci Y este spațiu liniar conex.

Demonstrație. Dacă $\alpha : I \to X$ este un drum în X, unind x_1 cu x_2, atunci $f\alpha : I \to Y$ este un drum în Y, unind $f(x_1)$ cu $f(x_2)$.

Utilizînd aplicația $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, deducem că S^1 este liniar conex.

TEOREMA 13. *Dacă $(X_i)_{i\in I}$ este o mulțime de spații topologice liniar conexe, atunci produsul $X = \prod_{i\in I} X_i$ este de asemenea liniar conex. În particular, torul $T^n = \underbrace{S^1\times\ldots\times S^1}_{n \text{ ori}}$ este un spațiu liniar conex.*

Demonstrație. Dacă $x = (x_i)$, $x' = (x'_i) \in X$ și $\alpha_i : [0,1] \to X_i$, cu $\alpha_i(0) = x_i$ și $\alpha_i(1) = x'_i$, atunci definim drumul $\alpha : [0,1] \to X$, prin $\alpha(t) = (\alpha_i(t))$, pentru care avem $\alpha(0) = x$ și $\alpha(1) = x'$.

COROLAR 13. *Cubul lui Hilbert $\mathscr{H}$* (vezi exerc. 8 § 6) *este liniar conex.*

TEOREMA 14. *Dacă $(A_i)_{i\in I}$ este o mulțime arbitrară de subspații topologice ale spațiului topologic X, încît $\bigcap_{i\in I} A_i \neq \emptyset$, atunci $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ este un subspațiu liniar conex.*

Demonstrație. Fie $a_0 \in \bigcap_{i\in I} A_i$ un punct fixat și fie a_i, $a_j \in \bigcup_{h\in I} A_h$ două puncte arbitrare. Prin ipoteză, există drumuri $\alpha_i : [0,1] \to A_i$, cu $\alpha_i(0) = a_0$, $\alpha_i(1) = a_i$ și $\alpha_j : [0,1] \to A_j$, cu $\alpha_j(0) = a_0$, $\alpha_j(1) = a_j$. Atunci, punctele a_i, a_j pot fi unite printr-un drum $\alpha : [0,1] \to A$, conform diagramei din fig. 12,

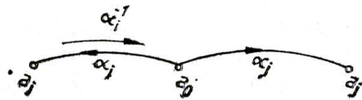


Fig. 12

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha_i^{-1}(2t) = \alpha_i(1-2t), & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ \alpha_j(2t-1), & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

continuitatea rezultînd din lema de lipire (Teorema 2 § 3).

COROLAR 14. *Pentru orice $n \geqslant 1$, sfera S^n este un spațiu liniar conex.*

Demonstrație. Se utilizează Teorema 14 Prop. 4 § 5 și exemplul 10.

DEFINIȚIA 8. Dacă $x \in X$, *componenta liniar conexă a lui x în X* este reuniunea L_x a tuturor submulțimilor liniar conexe ale lui X, care conțin punctul x.

Din Teorema 14 rezultă că L_x este un spațiu liniar conex. Notăm prin $\pi_0(X)$ mulțimea componentelor liniar conexe ale lui X. Dacă $f : X \to Y$ este o aplicație continuă, aceasta induce o aplicație $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$, luînd $f_*(L_x) = L_{f(x)}$, care este o bijecție atunci cînd f este un homeomorfism.

OBSERVAȚIA 7. Componentele liniar conexe nu sînt în mod necesar submulțimi închise (cum este cazul componentelor conexe). De exemplu, dacă se consideră spațiul „puricele și pieptenele", atunci subspațiul P al acestuia este o componentă liniar conexă dar nu este submulțime închisă.

DEFINIȚIA 9. Un spațiu topologic X se numește *local liniar conex* dacă pentru orice punct $x \in X$, orice vecinătate U a acestuia conține o vecinătate $V \in \mathscr{V}(x)$, astfel încît oricare două puncte ale lui V pot fi unite cu un drum în U.

TEOREMA 15. *Un spațiu topologic X este local liniar conex dacă și numai dacă $\forall x \in X$ și $\forall V \in \mathscr{V}(x)$, $\exists D \in \mathscr{V}(x)$, deschisă, liniar conexă și $D \subset V$. (Cu alte cuvinte, orice punct are o* **bază de vecinătăți** *deschise liniar conexe* *)).

Demonstrație. Suficiența este evidentă. Reciproc, fie $x \in X$ și U o vecinătate deschisă a lui x. Fie D componenta liniar conexă a lui U conținînd pe x și $y \in D$. Atunci $U \in \mathscr{V}(y)$, astfel că U conține o vecinătate V a lui y, încît oricare două puncte ale lui V pot fi unite cu un drum în U. Aceasta implică faptul că V este conținută în D. Avem $D \in \mathscr{V}(y)$, care arată că D este deschisă. Avem $D \in \mathscr{V}(x)$ și D este deschisă și liniar conexă.

*) Faceți comparație cu spațiile local conexe.

EXERCIŢII

1. Să se verifice dacă următoarele spaţii pot fi homeomorfe (vezi fig. 13).

2. Să se arate că spaţiul $\mathbb{R}^n$ este local conex.

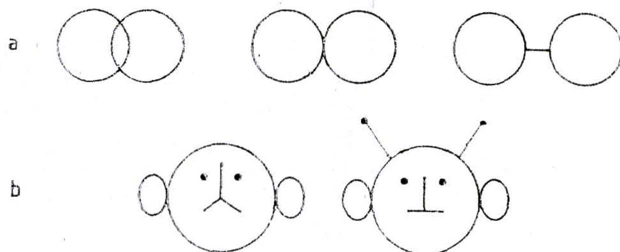


Fig. 13

3. Să se arate că orice submulţime deschisă a unui spaţiu local liniar conex este local liniar conexă.

4. Orice spaţiu local liniar conex este un spaţiu local conex.

5. Într-un spaţiu local liniar conex componentele conexe şi cele liniar conexe coincid.

6. Un spaţiu conex şi local liniar conex este liniar conex.

7. Să se arate că o sumă topologică de spaţii Hausdorff (normale) este un spaţiu Hausdorff (normal).

8. Fie o mulţime de aplicaţii continue, $f_i : X_i \to Y_i$, $i \in I$. Să se arate că aplicaţia $f = \bigsqcup_{i\in I} f_i : \bigsqcup_{i\in I} X_i \to \bigsqcup_{i\in I} Y_i$, definită prin $f(i, x_i) = (i, f_i(x_i))$, este continuă.

§ 8. «Problema clătitelor»

În cele ce urmează vom da o aplicaţie a proprietăţii funcţiilor continue.

LEMA 1. *Dacă $f : I = [0, 1] \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă şi dacă $f(0)f(1) \leqslant 0$, atunci există $t \in [0, 1]$, încît $f(t) = 0$.*

Demonstraţie. Să presupunem că $f(t) \neq 0$, pentru $\forall t \in I$. Rezultă că $f(0)f(1) < 0$. Definim $g : I \to \{-1, 1\}$, prin $g(t) = \dfrac{f(t)}{|f(t)|}$. Aceasta este continuă şi surjectivă (deoarece $f(0)f(1) < 0$). Ţinînd seama că I este spaţiu conex, aceasta este în contradicţie cu Cor. 7 a) § 7.

COROLAR 1. *Dacă $f : I \to I$ este o funcţie continuă, atunci există $t \in I$, încît $f(t) = t$* *).

*) Aceasta este teorema lui Brower de punct fix.

Demonstraţie. Dacă $f(0) = 0$ sau $f(1) = 1$, corolarul este demonstrat. Presupunem că $f(0) > 0$ şi $f(1) < 1$ şi fie funcţia $g(t) = f(t) - t$. Aceasta este continuă şi avem $g(0)g(1) = f(0)(f(1) - 1) < 0$. Există deci, după Lema 1, $t \in [0, 1]$, încît $g(t) = 0$, care implică $f(t) = t$.

COROLAR 2. *Fie $f : S^1 \to \mathbb{R}$ o aplicaţie continuă. Există atunci $z \in S^1$, încît $f(z) = f(-z)$.*

Demonstraţie. Presupunem contrariul, $f(z) \neq f(-z)$, $\forall z \in S^1$. Definim $h : S^1 \to \mathbb{R}$, $h(z) = f(z) - f(-z)$ şi fie $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, $\exp(t) = e^{\pi i t}$. Aceasta este continuă (vezi Teorema 8 § 5) şi avem $(h \circ \exp)(0) = h(1) = f(1) - f(-1)$, $(h \circ \exp)(1) = h(-1) = f(-1) - f(1) = -(h \circ \exp)(0)$. Considerăm $h \circ \exp | [0, 1]$ şi aplicăm Lema 1. Există deci $t \in [0, 1]$, încît $(h \circ \exp)(t) = 0$, adică $h(\exp(t)) = 0$, deci $f(z) - f(-z) = 0$, pentru $z = \exp(t)$.

COROLAR 3. *La un moment dat şi pe un cerc mare dat al globului terestru există o pereche de puncte antipodale care au aceeaşi temperatură.*

Demonstraţie. Putem presupune că temperatura variază continuu şi aplicăm Cor. 2.

PROPOZIŢIA 1. *Fie A şi B două mulţimi plane mărginite şi măsurabile («clătitele»). Există atunci o dreaptă în plan care împarte fiecare din cele două submulţimi în figuri echivalente (de aceeaşi arie). Facem precizarea că A şi B se pot intersecta şi că nu sînt în mod necesar conexe.*

Demonstraţie. Fie $D(O, r)$, un disc cu centrul în $O = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ şi de rază r, care conţine mulţimile A şi B şi fie S cercul frontieră al acestui disc închis.

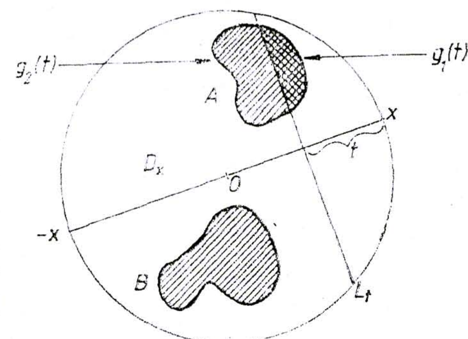


Fig. 14

Alegînd o unitate de lungime convenabilă, putem presupune că S are diametrul egal cu 1. Pentru orice $x \in S$ considerăm diametrul D_x trecînd prin x (vezi fig. 14). Fie L_t

dreapta perpendiculară pe D_x și situată la distanța $t \in [0, 1]$ de x.

Fie $g_1(t)$ aria porțiunii lui A situată de aceeași parte cu x față de L_t și fie $g_2(t)$ aria celeilalte părți a lui A. Avem $g_1(0) = g_2(1) = 0$. Atunci $g_1, g_2 : I \to \mathbb{R}$ sînt continue *). Definim $f : I \to \mathbb{R}$, prin $f(t) = g_2(t) - g_1(t)$. Aceasta este continuă și $f(0) = -f(1)$, adică $f(0)f(1) \leqslant 0$. După Lema 1, $\exists t \in [0, 1]$ încît $f(t) = 0$ (acest punct poate să nu fie unic). Deoarece g_2 și $-g_1$ sînt monoton descrescătoare, f este de asemenea monoton descrescătoare. Avem atunci $f(t) = 0$ pe un întreg interval închis $[a, b]$ sau într-un singur punct c. Notăm $h_A(x) = \frac{a+b}{2}$ în primul caz și $h_A(x) = c$ în cel de al doilea. Prin urmare, o dreaptă perpendiculară pe D_x și trecînd printr-un punct situat la distanța $h_A(x)$ față de x, bisectează aria lui A. Avem $h_A(-x) = 1 - h_A(x)$. Notăm de asemenea că funcția $h_A : S \to I$ este continuă (intuitiv, la deplasări mici ale lui x, $h_A(x)$ variază cît de puțin dorim). În mod analog, definim funcția $h_B : S \to I$, utilizînd pe B în locul lui A. Fie atunci $h : S \to \mathbb{R}$, definită prin $h(x) = h_A(x) - h_B(x)$. Aceasta este o aplicație continuă și satisface $h(x) = -h(-x)$, $\forall x \in S$. Dar, prin Cor. 2, $\exists\, y \in S$, încît $h(y) = h(-y)$. Astfel, $h(y) = 0$, adică $h_A(y) = h_B(y)$ și prin urmare perpendiculara pe D_y, la distanța $h_A(y)$ de punctul y, bisectează atît aria lui A cît și aria lui B.

PROPOZIȚIA 2. *Dacă A este o mulțime mărginită și măsurabilă (o « clătită »), atunci există două drepte perpendiculare care împart pe A în patru părți echivalente.*

Demonstrație. Ca și în demonstrația Prop. 1, presupunem că A se află într-un disc mărginit de un cerc S de diametru 1 și cu centrul în $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$. Pentru orice $x \in S$, fie L_x dreapta perpendiculară pe D_x și care intersectează pe D_x la distanța $h_A(x)$ de punctul x (în particular, L_x bisectează aria lui A). Fie $y = ix$ (vezi fig. 15). Fie M_x dreapta perpendiculară pe D_y, la distanța $h_A(y)$ de punctul y.

*) Pentru continuitatea integralei în raport cu limitele se poate consulta I. Colojoară, *Analiză matematică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1983, p. 300.

tul y. Atunci M_x bisectează de asemenea pe A. Să notăm acum cele patru părți ale lui A ca în fig. 15. Notăm cu $g_i(x)$ aria lui $A_i(x)$. Avem $g_1(x) + g_2(x) = g_3(x) + g_4(x)$ și $g_4(x) + g_1(x) = g_2(x) + g_3(x)$, care, prin adunare, dau $g_1(x) = g_3(x)$ și $g_2(x) = g_4(x)$. Funcțiile $g_i : S \to \mathbb{R}$ sînt

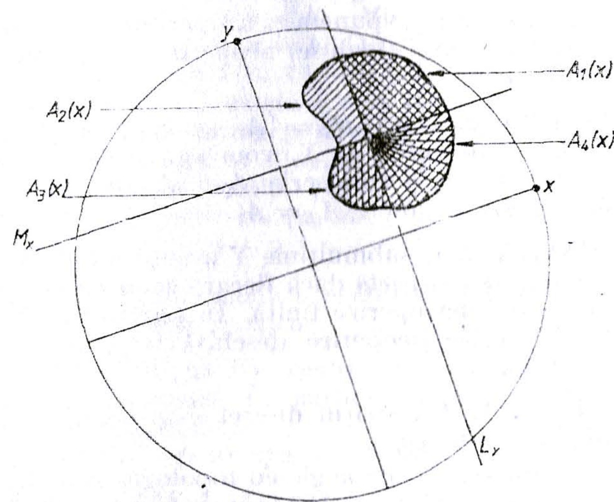


Fig. 15

continue și fie $f(x) = g_1(x) - g_2(x) = g_3(x) - g_4(x)$. Avem atunci $f(ix) = g_1(ix) - g_2(ix) = g_2(x) - g_3(x) = g_2(x) - g_1(x) = -f(x)$. Aplicăm acum Lema 1 funcției $h : I \to \mathbb{R}$, definită prin $h(t) = f\left(\frac{1}{2} e^{\frac{\pi i t}{2}}\right)$. Avem $h(0) = f\left(\frac{1}{2}\right)$, $h(1) = f\left(i \cdot \frac{1}{2}\right) = -f\left(\frac{1}{2}\right)$, deci $h(0)h(1) \leqslant 0$. Există deci $t_0 \in I$ încît $h(t_0) = 0$. Prin urmare, $f\left(\frac{1}{2} e^{\frac{\pi i t_0}{2}}\right) = g_1\left(\frac{1}{2} e^{\frac{\pi i t_0}{2}}\right) - g_2\left(\frac{1}{2} e^{\frac{\pi i t_0}{2}}\right)$. Deci, pentru $z_0 = \left(\frac{1}{2} e^{\frac{\pi i t_0}{2}}\right)$, avem $g_1(z_0) = g_2(z_0)$ și $g_1(z_0) = g_3(z_0)$, $g_2(z_0) = g_4(z_0)$.

§ 9. Compactitate

DEFINIȚIA 1. Fie X un spațiu topologic și Y un subspațiu al lui X. O mulțime de părți $\mathscr{A} = \{A_i\}_{i \in I}$ ale lui X constituie o *acoperire* a lui Y dacă $Y \subseteq \bigcup_{i \in I} A_i$. Dacă $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ spunem că A este o *acoperire a lui* X. Dacă I este o mulțime finită, spunem că acoperirea $\mathscr{A}$ este *finită*. Dacă A_i sînt deschise (închise) acoperirea $\mathscr{A}$ se numește *deschisă* (*închisă*).

DEFINIȚIA 2. Dacă $\mathscr{A}_1 = \{A_i\}_{i \in I}$, $\mathscr{A}_2 = \{A'_j\}_{j \in J}$ sînt două acoperiri ale lui $Y \subseteq X$, vom spune că $\mathscr{A}_1$ este o *subacoperire a lui* $\mathscr{A}_2$ și vom scrie $\mathscr{A}_1 < \mathscr{A}_2$, dacă $\mathscr{A}_1 \subseteq A_2$, adică $\forall i \in I$, $\exists j \in J$, încît $A_i = A'_j$.

DEFINIȚIA 3. O submulțime Y a unui spațiu topologic X se numește *compactă* dacă fiecare acoperire deschisă a sa conține o subacoperire finită. În particular, X este *compact* dacă orice acoperire deschisă a sa are o subacoperire finită.

EXEMPLE. 1. Un spațiu discret este compact dacă și numai dacă este finit.

2. Fie X un spațiu topologic cu topologia complementarelor finite (exemplul 3 § 1). Atunci, orice submulțime a lui X (deci și X) este compactă. În particular, $\mathbb{R}$ cu topologia Zariski este un spațiu compact.

3. $\mathbb{R}^1$ (cu topologia uzuală) nu este un spațiu compact deoarece, de exemplu, acoperirea deschisă $\{(n, n+2)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ nu are o subacoperire finită.

Rezultă imediat următorul rezultat.

TEOREMA 1. *O submulțime Y a spațiului topologic X este compactă dacă și numai dacă Y este compact ca spațiu, cu topologia indusă.*

TEOREMA 2. *Intervalul $I = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ este compact.*

Demonstrație. Fie $\mathscr{D} = \{D_j\}_{j \in J}$ o acoperire deschisă a lui $I = [0, 1]$ și să presupunem că $\mathscr{D}$ nu conține o subacoperire finită. Rezultă că cel puțin unul din intervalele $[0, 1/2]$, $[1/2, 1]$ nu poate fi acoperit cu o submulțime finită a lui $\mathscr{D}$. Notăm un asemenea interval cu $[a_1, b_1]$. Apoi repetăm raționamentul cu intervalul $[a_1, b_1]$. Se obține un șir de intervale $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2], \ldots, [a_n, b_n], \ldots$ încît nici o submulțime finită a lui $\mathscr{D}$ nu acoperă nici un asemenea interval. Avem $b_n - a_n = 2^{-n}$ și $a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n$, $\forall n$. Rezultă că $a_m \leqslant b_n$, $\forall m, n$, încît b_n mărginește superior șirul (a_n). Fie a marginea superioară a acestei mulțimi. Deoarece $a \leqslant b_n$, $\forall n$, șirul (b_n) este mărginit inferior și fie b marginea inferioară a acestui șir. Avem $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$, $\forall n$. Din $b_n - a_n = 2^{-n} \Rightarrow$ $\Rightarrow b - a \leqslant 2^{-n}$, $\forall n \Rightarrow a = b$. Deoarece $\mathscr{D}$ acoperă $I = [0, 1]$ și $a = b \in [0, 1] \Rightarrow \exists j \in J$ încît $a \in D_j$. Cum $\mathscr{D}_j$ este deschisă în I, există $\varepsilon > 0$, încît $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq$ $\subseteq D_j$. Alegem un întreg pozitiv N încît $2^{-N} < \varepsilon$ și deci $b_N - a_N < \varepsilon$. Avem $a \in [a_N, b_N]$ și $a - a_N < 2^{-N} < \varepsilon$, $b_N - a < 2^{-N} < \varepsilon$. Rezultă $[a_N, b_N] \subset (a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subseteq D_j$, contrar presupunerii că $[a_N, b_N]$ nu este acoperit de o submulțime finită a lui $\mathscr{D}$.

TEOREMA 3. *Imaginea continuă a unui spațiu compact este un spațiu compact.*

COROLAR 1. a) *Un spațiu homeomorf cu un spațiu compact este compact. În particular, orice segment $[a, b]$ este spațiu compact.*

b) *Cercul S^1 este un spațiu compact* ($S^1 = \exp([0, 1])$).

OBSERVAȚIA 1. Nu orice submulțime a unui spațiu compact este compactă. De exemplu $(0, 1)$ nu este compactă în $[0, 1]$, deoarece acoperirea $\left\{\left(\frac{1}{n+2}, \frac{1}{n}\right)\right\}_{n \geqslant 1}$ nu conține o subacoperire finită.

TEOREMA 4. *Orice submulțime închisă a unui spațiu compact este compactă.*

TEOREMA 5. *Orice submulțime compactă C a unui spațiu Hausdorff X este închisă.*

Demonstrație. Să arătăm că $X \setminus C$ este deschisă. Fie $x \in X \setminus C$. Atunci, $\forall y \in C$, $\exists D_x \in \mathscr{V}(x)$, deschisă și $\exists D_y \in$ $\in \mathscr{V}(y)$, deschisă, încît $D_x \cap D_y = \emptyset$. $\{D_y\}_{y \in C}$ este o acoperire deschisă a lui C, din care putem extrage o subacoperire finită $\{D_{y_1}, \ldots, D_{y_n}\}$. Fie vecinătățile lui x, corespunzătoare acestora, $D_x^1, \ldots, D_x^n$. Atunci, $V_x = D_x^1 \cap \ldots \cap D_x^n \in \mathscr{V}(x)$ și $V_x \cap D_{y_i} = \emptyset$, $i = 1, \ldots, n$. Rezultă că $V_x \subset X \setminus C$, deci $X \setminus C$ este deschisă.

TEOREMA 6. *Fie $f : X \to Y$ o aplicație continuă, cu X compact și Y separat. Atunci, f este aplicație închisă.*

Demonstrație. Fie F închisă în X. Atunci F este compactă (Teorema 4) și deci $f(F)$ este compactă (Teorema 3), care implică faptul că $f(F)$ este închisă (Teorema 5).

COROLAR 2. *Dacă $f : X \to Y$ este o bijecție continuă, cu X compact și Y separat, atunci f este un homeomorfism.*

TEOREMA 7. *Fie X și Y două spații topologice. Atunci, produsul $X \times Y$ este compact dacă și numai dacă X și Y sînt spații compacte* *).

Demonstrație. Dacă $X \times Y$ este compact, aplicînd Teorema 3 surjecțiilor $p_X : X \times Y \to X$, $p_Y : X \times Y \to Y$, deducem că X și Y sînt spații compacte. Să presupunem acum că X și Y sînt compacte și fie $\mathscr{D} = \{D_j\}_{j \in J}$ o acoperire deschisă a lui $X \times Y$. Avem $D_j = \bigcup_{k \in K(j)} (D'_{j,k} \times D''_{j,k})$, cu $D'_{j,k}$ deschise în X și $D''_{j,k}$ deschise în Y. Atunci, $\{D'_{j,k} \times D''_{j,k}\}_{j \in J, k \in K(j)}$ constituie o acoperire deschisă a lui $X \times Y$. Deoarece pentru orice $x \in X$, $\{x\} \times Y$ este compact, fiind homeomorf cu Y și deoarece $\{D'_{j,k} \times D''_{j,k}\}_{j \in J, k \in K(j)}$ este acoperire pentru $\{x\} \times Y$, există o subacoperire finită a acesteia, $\{D'_i(x) \times D''_i(x) ; i = 1,2,\ldots, n(x)\}$.

Fie acum $D'(x) = \bigcap_{i=1}^{n(x)} D'_i(x)$. Atunci familia $\{D'(x) \mid x \in X\}$ este o acoperire deschisă a lui X. Putem găsi o subacoperire finită a acesteia $\{D'(x_i), i = 1,2,\ldots,m\}$. Atunci, $\{D'(x_i) \times D''_{k_i}(x_i) \mid i = 1,2,\ldots,m ; k_i = 1,2,\ldots,n(x_i)\}$ este o acoperire deschisă finită a lui $X \times Y$. Pentru orice i și k_i, există $j \in J$ și $k \in K(j)$, încît $D'(x_i) \times D''_{k_i}(x_i) \subseteq D'_{j,k} \times D''_{j,k} \subseteq D_j$. Rezultă că există o subacoperire finită a lui $\mathscr{D}$.

COROLAR 3. *Torul T^n și cubul I^n sînt spații topologice compacte* **).

TEOREMA 8 (Heine-Borel-Lebesgue). *O submulțime a lui $\mathbb{R}^n$ este compactă dacă și numai dacă este mărginită și închisă.*

*) Teorema are loc pentru un produs topologic arbitrar, [53, p. 65 și se numește *teorema lui Tihonov*.

**) Cubul lui Hilbert, $\mathscr{H}$, este de asemenea spațiu compact.

Demonstrație. Fie C compactă în $\mathbb{R}^n$. După Teorema 5, C este închisă. Fie apoi $\{\mathring{D}(x, 1) \mid x \in C\}$ o acoperire deschisă a lui C. Aceasta conține o subacoperire finită $\{\mathring{D}(x_1, 1), \ldots, \mathring{D}(x_N, 1)\}$. Rezultă că diametrul mulțimii este $\leqslant 2N$. Deci C este mărginită.

Reciproc, să presupunem că submulțimea C este închisă și mărginită. Putem gîndi C inclusă într-un n-cub K. Cubul finit compact, este submulțime închisă în $\mathbb{R}^n$ și deci C este închisă în K. Din Teorema 4, rezultă că și C este compactă.

COROLAR 4. *Spațiile topologice D^n și S^n sînt compacte.*

TEOREMA 9 (*Weierstrass-Bolzano*). *Într-un spațiu topologic compact, orice submulțime infinită are cel puțin un punct de acumulare.*

Demonstrație. Fie X compact și $S \subset X$. Să presupunem că S nu are nici un punct de acumulare. Vom arăta că S este finită. Stabilim mai întîi că $(S, \mathscr{T}_S)$ este spațiu discret. În adevăr, dacă $s \in S$, deoarece acesta nu este un punct de acumulare, $\exists D_s$ deschisă în X, $D_s \in \mathscr{V}(s)$, încît $D_s \cap S = \{s\}$. Arătăm acum că $S = \bar{S}$. În adevăr, dacă $x \in \bar{S} \Rightarrow \forall V \in \mathscr{V}(x)$, avem $V \cap S = \emptyset$. Cum x nu este punct de acumulare, $\exists V' \in \mathscr{V}(x)$, încît $(V' \setminus \{x\}) \cap S = \emptyset$. adică $V' \cap S = \{x\}$ și deci $x \in S$. Așadar, S este închisă. Este atunci compactă. Dar, fiind un subspațiu discret, S este mulțime finită.

TEOREMA 10 (Weierstrass). *Dacă $f : (X, d) \to (X', d')$ este o aplicație continuă între spații metrice și (X, d) este compact, atunci f este uniform continuă.*

Demonstrație. Să presupunem contrariul, deci că există $\varepsilon_0 > 0$, încît $\forall \delta > 0$, există $x'_\delta, x''_\delta \in X$, încît $d(x'_\delta, x''_\delta) < \delta$ și $d'(f(x'_\delta), f(x''_\delta)) \geqslant \varepsilon_0$. Fie $\delta = \frac{1}{n}$ și (x'_n), (x''_n) șirurile de puncte corespunzătoare, pentru care $d(x'_n, x''_n) < \frac{1}{n}$ și $d'(f(x'_n), f(x''_n)) \geqslant \varepsilon_0$. Deoarece (x'_n) este o submulțime infinită în (X, d), după Teorema 9, există un subșir convergent (x'_{n_p}) și fie $\lim x'_{n_p} = x_0$. Avem atunci și $(x''_{n_p}) \to x_0$. Datorită continuității aplicației f (Teorema 3 § 4), $(f(x'_{n_p})) \to f(x_0)$ și $(f(x''_{n_p})) \to f(x_0)$, contrar relației $d'(f(x'_{n_p}), f(x''_{n_p})) \geqslant \varepsilon_0$.

TEOREMA 11 (Lebesgue). *Fie $\mathscr{D}$ o acoperire deschisă a unui spațiu metric compact (X, d). Există atunci un număr pozitiv ε (care depinde de $\mathscr{D}$) astfel încît orice submulțime de diametru $< \varepsilon$ a lui X să fie inclusă cel puțin într-o mulțime a acoperirii $\mathscr{D}$ (Numărul ε este numit* **număr Lebesque** *al acoperirii $\mathscr{D}$.)*

Demonstrație. Să presupunem că $\forall \varepsilon > 0$, există o submulțime de diametru $< \varepsilon$ și care nu este inclusă în nici o deschisă a acoperirii $\mathscr{D}$. Fie $\varepsilon = \frac{1}{n}$ și $A_n \subset X$ cu diam $A_n < \frac{1}{n}$ încît A_n nu este inclusă în nici un element al lui $\mathscr{D}$. Alegem cîte un element $x_n \in A_n$.

Este evident că mulțimea $(x_n)_n$ poate fi aleasă infinită (chiar dacă, de exemplu, $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_{n_1}$ sau chiar dacă $A_1 = A_2 = \ldots = A_{n_1}$). Fie y un punct de acumulare al mulțimii $A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (Teorema 9). Atunci, orice disc deschis $\mathring{D}(y, r)$ conține o infinitate de puncte din A. Fie $x_{n(r)} \in \mathring{D}(y, r)$. Pentru un punct $z \in A_{n(r)}$, avem $d(x_{n(r)}, z) < \frac{1}{n(r)}$ și deci $d(y, z) \leq d(y, x_{n(r)}) + d(x_{n(r)}, z) < r + \frac{1}{n(r)}$. Fie apoi $D \in \mathscr{D}$, mulțimea care conține punctul y și fie $d_0 = \inf_{t \in X \setminus D} d(y, t) = d(y, X \setminus D)$ (vezi Def. 7 § 4). Cum $y \in D$ rezultă $d_0 > 0$. Alegem acum $r < \frac{d_0}{2}$ și astfel ca $n(r) > \frac{2}{d_0}$. Atunci, pentru $\forall z \in A_{n(r)}$ avem $d(y, z) < \frac{d_0}{2} + \frac{d_0}{2} = d_0$, ceea ce implică $A_{n(r)} \subseteq D$. Am ajuns la o contradicție.

DEFINIȚIA 4. Un spațiu topologic X se numește *local compact* dacă $\forall x \in X$, $\forall V \in \mathscr{V}(x)$, $\exists V'$ compactă, $V' \in \mathscr{V}(x)$ și $V' \subseteq V$. (Deci, dacă orice punct are o bază de vecinătăți compacte.)

EXEMPLE. 4. $\mathbb{R}^n$ este un spațiu local compact, $\forall n \geq 0$, orice vecinătate a unui punct $x \in \mathbb{R}^n$ conținînd un disc închis, centrat în x.

5. $\mathbb{Q}$, cu topologia uzuală, nu este spațiu local compact, deoarece nici o vecinătate, de exemplu a lui 0, nu este compactă (aceasta putîndu-se scrie ca o reuniune infinită de mulțimi deschise, disjuncte, și nevide).

EXERCIȚII

1. Să se arate că o sumă topologică este un spațiu compact dacă și numai dacă are un număr finit de termeni și fiecare termen este compact.

2. Fie $f: X \to \mathbb{R}$ o aplicație continuă definită pe un compact. Să se arate că f este mărginită și își atinge marginile.

Indicație. $f(X)$ este compactă, deci este mărginită și închisă.

3. Să se arate că orice spațiu Hausdorff compact este local compact.

Soluție. Fie $x \in X$ și $V \in \mathscr{V}(x)$ deschisă. Luăm $C = X \setminus V$. Aceasta este închisă în X și deci este compactă. Se poate vedea ușor că x și C au vecinătăți deschise disjuncte $x \in D$, $C \subset D'$. Atunci, $\bar{D} \subset X \setminus D' \subset V$. De asemenea, $\bar{D}$ este compactă și $\bar{D} \in \mathscr{V}(x)$.

4. Să se arate că orice spațiu Hausdorff compact este spațiu normal.

5. Pentru spațiul topologic $X = \mathbb{R}$, se consideră acoperirea deschisă $\mathscr{D} = \{(n, n+2) \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Să se arate că un număr Lebesgue al acesteia este orice număr $0 < \varepsilon < 1$.

6. Considerînd spațiul $X = (0, 1) \subset \mathbb{R}^1$ și $\mathscr{D} = \left\{\left(\frac{1}{n}, 1\right) \mid n \geq 2\right\}$, să se arate că Teorema 11 nu are loc pentru spații necompacte.

Indicație. Pentru orice $\varepsilon > 0$, submulțimea $(0, \varepsilon)$ nu este conținută în nici un interval $\left(\frac{1}{n}, 1\right)$.

7. Să se arate că produsul a două spații local compacte este un spațiu local compact.

8. Fie X un spațiu topologic, $\omega \notin X$ și $X^* = X \cup \{\omega\}$. Se definește o topologie pe X^* cu ajutorul vecinătăților (Obs. 1 § 2). Anume, dacă $z \in X^*$ și notăm prin $\mathscr{V}^*(z)$ mulțimea vecinătăților lui z în X^* iar prin $\mathscr{V}(x)$ mulțimea vecinătăților (în X) ale unui punct $x \in X$, atunci: $V \in \mathscr{V}^*(x)$ dacă $V \in \mathscr{V}(x)$ sau $V = V' \cup \{\omega\}$, cu $V' \in \mathscr{V}(x)$, pentru $x \in X$ și $V \in \mathscr{V}^*(\omega)$ dacă și numai dacă există o mulțime C închisă și compactă în X, astfel încît $V \supseteq X^* \setminus C$. Să se arate că:

a) X^* este un spațiu topologic compact, avîndu-l pe X ca subspațiu;

b) X^* este spațiu Hausdorff dacă și numai dacă X este Hausdorff local compact;

c) Dacă X este Hausdorff, local compact și dacă $i_1: X \to X_1^*$ este un homeomorfism pe complementara unui punct, în spațiul Hausdorff compact X_1^*, atunci există un homeomorfism (unic) $g: X^* \to X_1^*$, încît $gi = i_1$, pentru $i: X \hookrightarrow X^*$ incluziunea;

d) Dacă X este compact, atunci $X^* = X \coprod \{\omega\}$.

Spațiul X^* se numește 1-*compactificatul Alexandrov al spațiului* X, punctul ω fiind numit *punctul de la infinit al lui* X^*.

Indicații. a) O acoperire deschisă a lui X^* trebuie să conțină o mulțime de forma $X^* \setminus C$ cu C închisă și compactă în X;

b) Presupunem că X^* este spațiu Hausdorff și fie $V \in \mathcal{V}(x)$, V deschisă. Mulțimea $X^* \setminus V$ este închisă și deci compactă. Atunci, deoarece X^* este spațiu Hausdorff, există $D \in \mathcal{V}(x)$, $(\omega \notin D)$ și $D' \supseteq X^* \setminus V$ astfel încît $D \cap D' = \emptyset$. Avem prin urmare $D \cap (X^* \setminus V) = \emptyset$, ceea ce implică $\bar{D} \subset X^* \setminus D' \subset V$, cu $\bar{D}$ compactă;

d) Dacă X este spațiu compact, atunci $X^* \setminus X = \{\omega\}$ este o vecinătate a lui ω și prin urmare acesta este un punct izolat.

9. Fie $V_k(\mathbb{R}^n)$ mulțimea k-reperelor ortonormate din $\mathbb{R}^n$, adică

$$V_k(\mathbb{R}^n) = \{(v_1, \dots, v_k) \in (S^{n-1})^k = \underbrace{S^{n-1} \times \dots \times S^{n-1}}_{k \text{ ori}} \mid \langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}\}.$$

Să se arate că $V_k(\mathbb{R}^n)$ este un spațiu Hausdorff compact. (Este numit *varietate Stiefel*.)

10. O *acoperire* deschisă $\mathcal{D}$ a unui spațiu topologic X se numește *local finită* dacă fiecare punct $x \in X$ are o vecinătate ce intersectează doar un număr finit de elemente ale lui $\mathcal{D}$. Să se arate că dacă (X, d) este un spațiu metric, iar $\mathcal{D} = \{D_i\}_{i \in I}$ este o acoperire deschisă local finită a sa, atunci există o familie $\{f_i\}_{i \in I}$ de funcții continue, $f_i : X \to \mathbb{R}$, încît:

i) $f_i(x) \geq 0$, $\forall x \in X$; ii) $\{x \in X \mid f_i(x) \neq 0\} \subset D_i$;

iii) $\sum_i f_i(x) = 1$, $\forall x \in X$ (această sumă este finită). Familia de funcții $\{f_i\}_{i \in I}$ este numită o *partiție continuă a unității*.

Indicație. X fiind spațiu metric, putem găsi două acoperiri deschise $\mathcal{D}' = \{D_i'\}_{i \in I}$ și $\mathcal{D}'' = \{D_i''\}_{i \in I}$, încît $\bar{D}_i'' \subset D_i'$ și $\bar{D}_i' \subset D_i$. Deoarece $\bar{D}_i''$ și $X \setminus D_i$ sînt închise și disjuncte, există, după Teorema lui Titze, $g_i : X \to [0, 1]$, continue, cu $g_i | \bar{D}_i'' = 1$ și $g_i | X \setminus D_i = 0$. Se definesc atunci funcțiile $f_i(x) = \frac{g_i(x)}{\sum g_i(x)}$.

11. Fie X un spațiu Hausdorff încît $X = \bigcup_{j \in J} X_j$, cu subspațiile X_j satisfăcînd condițiile:

a) Pentru $i, j \in J$ există $k \in J$, astfel încît $X_i \cap X_j = X_k$;

b) Pentru orice $j \in J$ mulțimea $\{i \in J \mid X_i \subseteq X_j\}$ este finită*).

Să se arate că pentru orice mulțime compactă $K \subset X$ există o mulțime finită de indici $j_1, \dots, j_n \in J$, încît $X_{j_1} \cup \dots \cup X_{j_n} \supset K$.

Soluție. Presupunem contrariul. Fie $Y_j = X_j \setminus \bigcup \{X_i \mid X_i \subset X_j\}$. Construim inductiv o mulțime numărabilă de puncte distincte $x_{j_n} \in Y_{j_n}$, astfel: presupunem alese punctele $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$; atunci $K \not\subset Y_{j_1} \cup \dots \cup Y_{j_n} \subset X_{j_1} \cup \dots \cup X_{j_n}$. Există deci $x \in K \cap X_j$, pentru un indice $j \in J$, încît $x \notin \{x_{j_1}, \dots, x_{j_n}\}$. După b), există $X_{j_{n+1}} \subseteq X_j$, cu $x \in X_{j_{n+1}}$. Luăm $x_{j_{n+1}} = x$. Fie acum $V \subseteq \{x_{j_n}\}$. Arătăm că V este închisă. Dacă $x_j \in V \cap$

*) Considerăm mulțimea parțial ordonată $(J, \leq)$ cu $i \leq j \Leftrightarrow X_i \subseteq X_j$. Dacă are loc condiția b) se spune că $(J, \leq)$ este *cofinită*.

$\cap X_j$, după a) deducem că $x_j \in X_j \cap X_i = X_k$. Deoarece $x_j \in Y_j$, $X_k \supseteq X_j$ și deci $X_j \subseteq X_i$. Rezultă că $V \cap X_j$ este finită și, cum Y este spațiu Hausdorff, deducem că $V \cap X_j$ este închisă. Prin urmare, $\{x_{j_n}\}$ este o mulțime infinită cu topologia discretă. Aceasta este însă în contradicție cu faptul că mulțimea $\{x_{j_n}\}$ este compactă, fiind închisă în compactul K.

12. Fie $\mathcal{D} = \{D\}$ și $\mathcal{D}' = \{D'\}$ două acoperiri deschise ale unui spațiu topologic X. Se spune că $\mathcal{D}'$ *este mai fină decît* $\mathcal{D}$ dacă $\forall D' \in \mathcal{D}'$, $\exists D \in \mathcal{D}$, încît $D' \subseteq D$. Un spațiu topologic X se numește *paracompact* dacă este separat și pentru orice acoperire deschisă $\mathcal{D}$ a lui X se poate găsi o acoperire deschisă, local finită, mai fină decît $\mathcal{D}$. Să se arate că:

a) Orice spațiu compact este paracompact;

b) Suma unei familii de spații paracompacte este un spațiu paracompact.

§ 10. Topologii cît. Atașări de celule

Fie $(X, \mathcal{T})$ un spațiu topologic și ρ o relație de echivalență pe X. Notăm cu X/ρ mulțimea claselor de echivalență și cu $\pi : X \to X/\rho$ proiecția $\pi(x) = \hat{x}$.

TEOREMA 1. *Există o topologie $\mathcal{T}_\rho$ pe X/ρ, în raport cu care aplicația π este continuă și $\mathcal{T}_\rho$ este cea mai tare topologie cu această proprietate.*

$\mathcal{T}_\rho$ se numește *topologie cît* iar $(X/\rho, \mathcal{T}_\rho)$ este numit *spațiu cît* sau *spațiu factor*.

Demonstrație. Definim $D \in \mathcal{T}_\rho \Leftrightarrow \pi^{-1}(D) \in \mathcal{T}$. Se obține, în mod evident, o topologie în raport cu care π este o aplicație continuă. Dacă $\mathcal{T}'$ este o altă topologie pe X/ρ, în raport cu care π este continuă, și dacă $D' \in \mathcal{T}'$, atunci $\pi^{-1}(D') \in \mathcal{T}$ și deci $D' \in \mathcal{T}_\rho$.

COROLAR 1. *O aplicație $f : X/\rho \to Y$, într-un spațiu topologic arbitrar, este continuă dacă și numai dacă $f \circ \pi$ este continuă.*

COROLAR 2. *Dacă X și X' sînt două spații topologice pe care sînt date relațiile de echivalență ρ și respectiv ρ' și dacă $f : X \to X'$ este o aplicație continuă, compatibilă cu relațiile date, adică $x_1 \rho x_2 \Rightarrow f(x_1) \rho' f(x_2)$, atunci aplicația $\hat{f} : X/\rho \to X'/\rho'$ este bine definită prin $\hat{f}(\hat{x}) = \widehat{f(x)}$ și este continuă. Dacă f este homeomorfism la fel este $\hat{f}$.*

Demonstrație. Este suficient să demonstrăm continuitatea aplicației $\hat{f} \circ \pi : X \to X'/\rho'$, $x \mapsto \widehat{f(x)}$, ceea ce rezultă din relația $\hat{f} \circ \pi = \pi' \circ f$. Partea a doua se obține imediat.

Din Teoremele 4 § 7 şi 3 § 9, obţinem rezultatul următor.

TEOREMA 2. *Dacă X este un spaţiu conex (compact) şi ρ este o relaţie de echivalenţă pe X, atunci X/ρ este de asemenea un spaţiu conex (compact).*

OBSERVAŢIA 1. Dacă X este un spaţiu Hausdorff, nu rezultă în mod necesar că X/ρ este spaţiu Hausdorff. Fie, de exemplu, $X = [0, 1] \subset \mathbb{R}$ şi $x\rho y \Leftrightarrow x - y$ este raţional. Atunci X/ρ nu este spaţiu Hausdorff. Mulţimile $D_i = \pi^{-1}(\hat{D}_i)$ sînt deschise în X. Pentru ca $\hat{D}_1 \cap \hat{D}_2 = \emptyset$ este necesar ca $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, care implică $\pi^{-1}(\pi(D_1)) \cap \cap \pi^{-1}(\pi(D_2)) = \emptyset, D_1 \in \mathscr{V}(0), D_2 \in \mathscr{V}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. Dar $\pi^{-1}(\pi(D_i)) = $

$$= (D_i + \mathbb{Q}) \cap [0, 1] = \left\{x + \frac{p}{q} \,\middle|\, x \in D_i, \ \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}\right\} \cap [0, 1]$$

şi este clar că $\pi^{-1}(\pi(D_1)) \cap \pi^{-1}(\pi(D_2)) \neq \emptyset$.

Vom da condiţii suficiente ca un spaţiu cît X/ρ să fie separat.

DEFINIŢIA 1. a) *Graficul unei relaţii* ρ pe X este mulţimea $\Gamma_\rho = \{(x_1, x_2) \in X \times X \,|\, x_1 \rho x_2\}$.

b) Relaţia ρ se numeşte *deschisă* (*închisă*) dacă proiecţia canonică $\pi : X \to X/\rho$ este aplicaţie deschisă (închisă).

TEOREMA 3. a) *Dacă X/ρ este spaţiu Hausdorff, atunci Γ_ρ este o submulţime închisă a lui $X \times X$;*

b) *Dacă Γ_ρ este o submulţime închisă în $X \times X$ şi ρ este relaţie deschisă, atunci X/ρ este spaţiu Hausdorff.*

Demonstraţie. a) Dacă X/ρ este spaţiu Hausdorff, după Teorema 3 § 6, diagonala $\Delta(X/\rho) = \{(x, y) | \hat{x} = \hat{y}\}$ este închisă în $X/\rho \times X/\rho$. Considerăm aplicaţia continuă $\pi \times \pi : X \times X \to X/\rho \times X/\rho$ (Cor. 4 § 6) şi avem $\Gamma_\rho = (\pi \times \pi)^{-1}(\Delta(X/\rho))$. Rezultă deci că Γ_ρ este închisă.

b) Fie $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in X/\rho$, $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$. Atunci $(x_1, x_2) \notin \Gamma_\rho$ şi deoarece mulţimea $X \times X \setminus \Gamma_\rho$ este deschisă, există D_1, D_2 deschise în X, cu $x_1 \in D_1$, $x_2 \in D_2$, încît $D_1 \times D_2 \subset \subset X \times X \setminus \Gamma_\rho$. Aplicaţia $\pi : X \to X/\rho$ fiind deschisă, $\pi(D_1)$, $\pi(D_2)$ sînt deschise în X/ρ. Avem $\hat{x}_1 \in \pi(D_1)$, $\hat{x}_2 \in \in \pi(D_2)$. În plus, $\pi(D_1) \cap \pi(D_2) = \emptyset$. În adevăr, dacă $y \in \pi(D_1) \cap \pi(D_2) \Rightarrow \exists\, y_1 \in D_1$, $y_2 \in D_2$, cu $\pi(y) = \pi(y_1)$, $\pi(y) = \pi(y_2)$, deci $(y_1, y_2) \in (D_1 \times D_2) \cap \Gamma_\rho$, care contrazice incluziunea $D_1 \times D_2 \subset X \times X \setminus \Gamma_\rho$. Deci, X/ρ este spaţiu Hausdorff.

TEOREMA 4. *Pentru un spaţiu Hausdorff compact X şi o relaţie ρ pe X, următoarele afirmaţii sînt echivalente:*

i) ρ *este relaţie închisă;*

ii) X/ρ *este spaţiu Hausdorff;*

iii) Γ_ρ *este închisă în* $X \times X$.

Demonstraţie. i)$\Rightarrow$ii) Fie $\hat{x}_1, \hat{x}_2 \in X/\rho$, $\hat{x}_1 \neq \hat{x}_2$, adică $(x_1, x_2) \notin \Gamma_\rho$. Deoarece X este spaţiu Hausdorff, $\{x_1\}$, $\{x_2\}$ sînt închise în X, încît mulţimile $\pi(\{x_1\}) = \{\hat{x}_1\}$ şi $\pi(\{x_2\}) = \{\hat{x}_2\}$ sînt închise în X/ρ. Rezultă că $\pi^{-1}(\{\hat{x}_1\})$ şi $\pi^{-1}(\{\hat{x}_2\})$ sînt închise în X. Acestea sînt submulţimi disjuncte. Există atunci (exerc. 4 § 9) două deschise disjuncte D_1, D_2 în X, cu proprietatea $\pi^{-1}(\{\hat{x}_1\}) \subset D_1$, $\pi^{-1}(\{\hat{x}_2\}) \subset D_2$. Atunci, $F_1 = X \setminus D_1$, $F_2 = X \setminus D_2$ sînt închise şi deci $\pi(F_1)$, $\pi(F_2)$ sînt închise în X/ρ. Deducem că $\pi^{-1}(\pi(F_1))$ şi $\pi^{-1}(\pi(F_2))$ sînt închise în X. Avem $\pi^{-1}(\{\hat{x}_i\}) \cap \cap \pi^{-1}(\pi(F_i)) = \emptyset$, $i = 1, 2$. În adevăr, avem $X \setminus \pi^{-1}(\{\hat{x}_i\}) \supseteq \supseteq F_i$ şi deci $X \setminus \pi^{-1}(\{\hat{x}_i\}) = \pi^{-1}(\pi(X \setminus \pi^{-1}(\{\hat{x}_i\}))) \supseteq \pi^{-1}(\pi(F_i))$. Avem apoi $\pi^{-1}(\{\hat{x}_i\}) \subset X \setminus \pi^{-1}(\pi(F_i)) \subseteq D_i$, $i = 1, 2$. Prin urmare, $\{\hat{x}_i\} \subset \pi(X \setminus \pi^{-1})(\pi(F_i)) = \tilde{D}_i$ şi $\tilde{D}_i$ sînt deschise (deoarece $\pi^{-1}(\tilde{D}_i) = X \setminus \pi^{-1}(\pi(F_i))$. Acestea sînt şi disjuncte, deoarece $\tilde{D}_1 \cap \tilde{D}_2 \subseteq \pi(D_1 \cap D_2) = \emptyset$. Rezultă că $\tilde{D}_1$, $\tilde{D}_2$ separă punctele $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Rezultă din Teorema 3 a).

iii) $\Rightarrow$ i) Fie F închisă în X şi fie $\pi^{-1}(\pi(F)) = p_2((F \times \times X) \cap \Gamma_\rho)$, unde $p_2 : X \times X \to X$, $p_2(x_1, x_2) = x_2$. Cum $F \times X$ şi Γ_ρ sînt închise, rezultă că $(F \times X) \cap \Gamma_\rho$ este închisă în $X \times X$, care este spaţiu compact. Atunci, $(F \times X) \cap \Gamma_\rho$ este submulţime compactă şi deci (Teorema 3 § 9) $p_2(F \times X) \cap \Gamma_\rho) = \pi^{-1}(\pi(F))$ este compactă în X. Cum X este spaţiu separat, rezultă că $\pi^{-1}(\pi(F))$ este închisă. Din definiţia topologiei cît deducem că $\pi(F)$ este închisă în X/ρ.

Dacă X este un spaţiu topologic şi $A \subseteq X$, putem defini pe X următoarea relaţie de echivalenţă: $x_1 \rho x_2 \Leftrightarrow x_1$, $x_2 \in A$ (sau $x_1 = x_2$).

DEFINIŢIA 2. Spaţiul topologic cît X/ρ se notează X/A şi se numeşte *spaţiul obţinut din X prin identificarea lui A la un punct.*

Din rezultatele generale privind spaţiile topologice cît, obţinem rezultatul următor.

TEOREMA 5. *Fie X un spațiu topologic și A o submulțime a lui X.*

a) *Dacă X este spațiu conex rezultă X/A conex;*

b) *Dacă X este compact rezultă X/A compact;*

c) *Dacă X este Hausdorff compact și A închisă, atunci X/A este spațiu Hausdorff (compact).*

Ultima afirmație rezultă din faptul că graficul relației considerate este $\Delta(X) \cup \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in A\} = \Delta(X) \cup A \times A \subset X \times X$.

EXEMPLE. 1. Fie Y un spațiu topologic și fie $X = Y \times I$ *cilindrul lui* Y. Luăm $A = Y \times \{1\}$. Atunci, spațiul $CY = Y \times I/A$ este numit *conul lui* Y, punctul la care se identifică baza $Y \times \{1\}$, a cilindrului $Y \times I$, fiind *vîrful conului*. Conul este un spațiu Hausdorff compact. Orice con este un spațiu liniar conex.

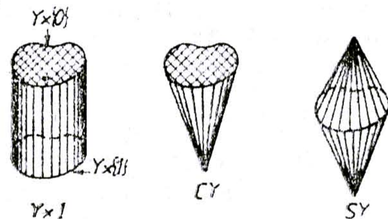


Fig. 16

Spațiul cît $SY = CY/Y \times \{0\}$ se numește *suspensia spațiului* Y (vezi fig. 16).

2. Fie $(X_i, \mathscr{T}_i)_{i \in I}$ o mulțime de *spații topologice punctate*, adică cu cîte un *punct bază* fixat $x_i^0 \in X_i$. Considerăm suma topologică $X = \bigsqcup_{i \in I} X_i$ și fie $A = \{(i, x_i^0) \in X\}$. Spațiul cît X/A se numește *buchetul mulțimii date de spații*. Se notează $(\bigvee_{x_i^0} X_i)_{i \in I}$ sau $\bigvee_{i \in I} X_i$. Dacă I este o mulțime finită și spațiile X_i sînt Hausdorff compacte, atunci buchetul $\bigvee_{i \in I} X_i$ are aceleași proprietăți.

Un alt exemplu important de spațiu topologic cît este dat cu ajutorul următoarei definiții.

DEFINIȚIA 3. Fie $(X, \mathscr{T})$ un spațiu topologic. Notăm prin $H(X)$ grupul homeomorfismelor lui X (în raport cu operația uzuală de compunere a aplicațiilor). Dacă G este un grup oarecare, vom spune că G *acționează la*

stînga pe X dacă este dat un homomorfism $h: G \to H(X)$ $g \mapsto h_g$. Avem $h(g_1 g_2) = h_{g_1} h_{g_2}$, $h(g^{-1}) = h_g^{-1}$, $h(1) = 1_X$ *).

Dacă $x \in X$, notăm reuniunea $\bigcup_{g \in G} h_g(x)$ prin O_x și o numim *orbita lui* x.

Putem considera pe X relația de echivalență ρ_G, definită prin: $x \rho_G y \Leftrightarrow O_x = O_y$, ceea ce înseamnă că $x \rho_G y \Leftrightarrow \exists\, g \in G$, încît $y = h_g x$. Spațiul X/ρ_G se notează prin X/G și este numit *spațiul orbitelor grupului* G *de homeomorfisme ale lui* X. Vom scrie în mod uzual gx în loc de $h_g x$.

EXEMPLUL 3. Fie $X = \mathbb{R}$, $G = \mathbb{Z}$, $h: G \to H(\mathbb{R})$, homomorfismul definit prin $h_n(x) = x + n$. Atunci, $O_x = \{x + n \mid x \in [0, 1),\ n \in \mathbb{Z}\}$ și avem $O_x = O_y \Leftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}$. Spațiul $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ este homeomorf cu S^1, prin homeomorfismul $f: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to S^1$, $f(\hat{x}) = e^{2\pi i x}$.

TEOREMA 6. *Dacă G este un grup ce acționează la stînga pe X, atunci relația ρ_G este deschisă.*

Demonstrație. Fie D deschisă în X și $\pi: X \to X/G$ proiecția canonică. Atunci, $\pi^{-1}(\pi(D)) = \bigcup_{g \in D} gD$, care este deschisă în X și deci $\pi(D)$ este deschisă în X/G.

TEOREMA 7. *Dacă G este un grup finit, iar X este un spațiu Hausdorff compact, atunci X/G este separat.*

Demonstrație. Vom aplica Teorema 4. Fie ρ_G relația indusă de G și Γ_{ρ_G} graficul acestei relații. Atunci, $\Gamma_{\rho_G} = \{(x_1, x_2) \in X \times X \mid \exists\, g \in G,\ g x_1 = x_2\}$. Dacă considerăm aplicațiile $\varphi_g: X \to X \times X$, $\varphi_g(x) = (gx, x)$, atunci $\Gamma_{\rho_G} = \bigcup_{g \in G} \operatorname{Im} \varphi_g$. Deoarece X este compact și $X \times X$ separat, rezultă că $\operatorname{Im} \varphi_g$ este închisă, deci Γ_{ρ_G} este închisă, ca reuniune finită de închise.

DEFINIȚIA 4. Spunem că grupul G *acționează propriu pe* X dacă pentru fiecare compact K al lui X, mulțimea $G_K = \{g \in G \mid gK \cap K \neq \emptyset\}$ este finită**).

---

*) Dacă $h(g_1 g_2) = h_{g_2} h_{g_1}$, spunem că G *acționează la dreapta pe* X.

**) Există o noțiune mai generală [18, p. 29], pe care însă nu o vom utiliza.

TEOREMA 8. *Fie G un grup acționînd propriu la stînga pe X. Dacă X este un spațiu local compact și Hausdforff, atunci fiecare orbită este închisă și discretă în X și X/G este spațiu Hausdorff.*

Demonstrație. Fie $x \in X$, O_x orbita sa și V o vecinătate compactă a lui x în X. Atunci, $\{g \in G \mid gV \cap V \neq \emptyset\}$ este finită. Putem deduce că $O_x \cap V$ este finită. În adevăr, dacă $y \in O_x \cap V \Rightarrow y = gx \in gV \cap V$. Rezultă astfel că există o vecinătate a lui x în O_x constînd numai din $\{x\}$. Deci, O_x este un spațiu discret și este o submulțime închisă (deoarece X este spațiu Hausdorff). Pentru partea a doua a demonstrației vom aplica Teorema 3. După Teorema 6, relația ρ_G este deschisă. Este suficient să arătăm că graficul acesteia este închis în $X \times X$. Dacă $(x, y) \in X \times X \setminus \Gamma_{\rho_G}$, fie V o vecinătate compactă a lui x în X și W o vecinătate compactă a lui y, încît $W \cap O_x = \emptyset$. Avem că $G_{V \cup W} = \{g \in G \mid g(V \cup W) \cap (V \cup W) \neq \emptyset\}$ este finită și deci $U = V \setminus V \cap \bigcup_{g \in G_{V \cup W}} (gW)$ este o vecinătate a lui x, încît $(U \times W) \cap \Gamma_{\rho_G} = \emptyset$. Prin urmare, $U \times W \in \mathscr{V}(x, y)$ și $U \times W \subset X \times X \setminus \Gamma_{\rho_G}$, deci $X \times X \setminus \Gamma_{\rho_G}$ este deschisă.

DEFINIȚIA 5. Fie A o mulțime închisă a unui spațiu topologic $(X, \mathscr{T})$ și $f : A \to B$ o aplicație continuă. *Spațiul de adjuncție* $B_f \sqcup X$ este spațiul cît $(B \sqcup X)/\rho_f$, unde, pentru $z_1, z_2 \in B \sqcup X$, avem $z_1 \rho_f z_2 \Leftrightarrow z_1 = z_2$ sau $z_1 \in A$ și $z_2 = f(z_1)$ sau invers, $z_2 \in A$ și $z_1 = f(z_2)$, sau $z_1, z_2 \in A$ și $f(z_1) = f(z_2)$ (vezi fig. 17).

Notăm prin $q_1 : B \to B \sqcup X$, $q_2 : X \to B \sqcup X$ injecțiile canonice și prin $\pi : B \sqcup X \to B_f \sqcup X$ surjecția canonică.

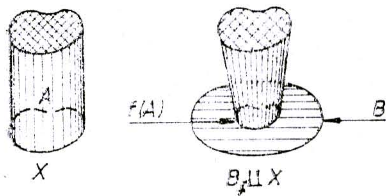


Fig. 17

TEOREMA 9. a) *Aplicația $\pi q_1 : B \to B_f \sqcup X$ stabilește un homeomorfism al spațiului B pe un subspațiu al spațiului $B_f \sqcup X$. Putem deci identifica B cu un subspațiu al lui $B_f \sqcup X$* (vezi fig. 17).

b) *Dacă X și B sînt spații Hausdorff compacte, atunci spațiul de adjuncție $B_f \sqcup X$ este un spațiu Hausdorff compact.*

Demonstrație. a) Aplicația πq_1 este injectivă și deci o bijecție pe imagine. Este continuă și putem arăta că este și deschisă. În adevăr, dacă D este deschisă în B, atunci $\pi^{-1}(\pi q_1(D)) = q_1(D) \cup f^{-1}(D)$ este deschisă, deoarece f este continuă și q_1 este homeomorfism pe imagine.

b) Putem aplica Teorema 4. Mai întîi, $B \sqcup X$ este spațiu Hausdorff compact. Apoi, graficul relației ρ_f este reuniunea următoarelor submulțimi ale produsului $(B \sqcup X) \times (B \sqcup X)$:

$$\Delta_1 = \Delta(X), \quad \Delta_2 = \{(a, f(a)) \mid a \in A\} \subset A \times B,$$

$$\Delta_3 = \{(f(a), a) \mid a \in A\} \subset B \times A,$$

$$\Delta_4 = \{(a_1, a_2) \in A \times A \mid f(a_1) = f(a_2)\} \subset A \times A,$$

$$\Delta_5 = \Delta(B),$$

Δ_1 și Δ_5 sînt închise deoarece X și B sînt spații separate, Δ_4 este închisă deoarece $\Delta_4 = (f \times f)^{-1}(\Delta(B))$.

Considerăm acum aplicația $\varphi : A \to A \times B$, $\varphi(a) = (a, f(a))$. Avem $\Delta_2 = \operatorname{Im} \varphi$. Arătăm că $\operatorname{Im} \varphi$ este închisă. Fie $(a, b) \notin \operatorname{Im} \varphi$, deci $b \neq f(a)$. Deoarece B este spațiu separat, $\exists V_1 \in \mathscr{V}(b)$, $V_2 \in \mathscr{V}(f(a))$, încît $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Atunci, $(f^{-1}(V_2) \times V_1) \in \mathscr{V}((a, b))$ în $A \times B$. În plus, $(f^{-1}(V_2) \times V_1) \cap \operatorname{Im} \varphi = \emptyset$. Prin urmare, $(a, b) \notin \overline{\operatorname{Im} \varphi}$ și deci $\operatorname{Im} \varphi = \overline{\operatorname{Im} \varphi}$. În mod analog se arată că Δ_3 este închisă.

DEFINIȚIA 6. Fie $(X, \mathscr{T})$ un spațiu topologic și fie Λ o mulțime de indici astfel încît pentru fiecare $\lambda \in \Lambda$ există o aplicație $f_\lambda : S^{n_\lambda - 1} \to X$, pentru un întreg $n_\lambda \geqslant 1$. Fie sumele topologice $\mathscr{D} = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} D^{n_\lambda}$ și $\mathscr{S} = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} S^{n_\lambda - 1}$. Putem considera de asemenea aplicația $f = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda : \mathscr{S} \to X$, definită prin $f | S^{n_\lambda - 1} = f_\lambda$. Este clar că $\mathscr{S}$ este un subspațiu închis în $\mathscr{D}$. Putem considera atunci spațiul de adjuncție $X_f \sqcup \mathscr{D}$, care se numește *spațiu obținut din X prin atașare de celule.*

Aplicațiile f_λ se numesc *aplicații de atașare* ale celulelor (închise) D^{n_λ}. Fie e^{n_λ} subspațiul lui $X_f \sqcup \mathscr{D}$ corespunzător punctelor lui D^{n_λ} și $\dot{e}^{n_\lambda} = f_\lambda(S^{n_\lambda - 1})$. Este indusă atunci o aplicație de perechi $f : (D^{n_\lambda}, S^{n_\lambda - 1}) \to (e^{n_\lambda}, \dot{e}^{n_\lambda})$, numită *aplicație caracteristică*.

TEOREMA 10. *Fie X un spațiu Hausdorff și fie $Y = X_f \sqcup \mathscr{D}$ un spațiu obținut din X prin atașarea celulelor $\{D^{n_\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$, cu ajutorul unor aplicații de atașare date. Atunci, spațiul Y este un spațiu Hausdorff.*

Demonstrație. Fie $\pi : X \to X_f \sqcup \mathscr{D}$ proiecția canonică. Fie $\hat{z}_1, \hat{z}_2$ distincte în $X_f \sqcup \mathscr{D}$. Deosebim cazurile: $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in \pi(\mathscr{D} \setminus \mathscr{S})$; $\hat{z}_1 \in \pi(\mathscr{D} \setminus \mathscr{S})$ și $\hat{z}_2 \in \pi(X)$; $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in \pi(X)$. Dacă $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in (\mathscr{D} \setminus \mathscr{S})$, atunci există $y_1, y_2 \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$, încît $\pi(y_i) = \hat{z}_i$, $i = 1, 2$. Deoarece $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$ este spațiu Hausdorff, există deschisele disjuncte U_1, U_2 în $\mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$ încît $y_i \in U_i$. Atunci, $\pi(U_1)$ și $\pi(U_2)$ sînt deschise, disjuncte, conținînd respectiv pe $\hat{z}_1$ și $\hat{z}_2$. Dacă $\hat{z}_1 = \pi(y_1)$, pentru $y_1 \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{S}$ și dacă $\hat{z}_2 \in \pi(X)$, putem alege deschisele disjuncte U_1 și U_2 în $\mathscr{D}$, încît $y_1 \in U_1$ și $\mathscr{S} \subset U_2$, deoarece prin Teorema 4 § 4 și exerc. 7 § 7, $\mathscr{D}$ este spațiu normal. Atunci, $\pi(U_1)$ și $X_f \sqcup U_2$ sînt deschise, disjuncte în Y, conținînd $\hat{z}_1$ și respectiv $\hat{z}_2$. În sfîrșit, fie $\hat{z}_1, \hat{z}_2 \in \pi(X)$, $\hat{z}_1 \neq \hat{z}_2$. Alegem mulțimile deschise și disjuncte V_i, $i = 1, 2$, în X, încît $y_i \in V_i$, pentru $\pi(y_i) = \hat{z}_i$. Deoarece f este continuă, $f^{-1}(V_i)$ este deschisă în $\mathscr{S}$ și submulțimile $W_{i,\lambda} = f^{-1}(V_i) \cap S^{n_\lambda}$ sînt deschise și disjuncte în $\mathscr{S}^{n_\lambda}$, $\forall \lambda \in \Lambda$, $i = 1, 2$. Considerăm $C_\lambda(V_i) = \{tz \mid z \in W_{i,\lambda}, t \in [0, 1]\}$ și fie $C_i = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} C_\lambda(V_i)$, $i = 1, 2$. Atunci, mulțimile C_1 și C_2 sînt disjuncte și deschise în $\mathscr{D}$ și avem $C_i \cap \mathscr{S} = f^{-1}(V_i)$, $i = 1, 2$. Putem defini acum $U_i = \pi(C_i \setminus \mathscr{S}) \cup V_i$, $i = 1, 2$. Deoarece U_1, U_2 sînt disjuncte și $\hat{z}_i \in U_i$, este suficient să vedem că U_i' sînt deschise. Or, aceasta are loc deoarece $\pi^{-1}(U_i) \cap X = V_i$ este deschisă în X și $\pi^{-1}(U_i) \cap \mathscr{D} = (C_i \setminus \mathscr{S}) \cup f^{-1}(V_i) = C_i$ este deschisă în $\mathscr{D}$, pentru $i = 1, 2$.

EXERCIȚII

1. Fie X și Y două spații topologice și $f : X \to Y$ o aplicație. Spunem că f este o *aplicație de identificare* dacă f este surjectivă și $D' \subseteq Y$ este deschisă dacă și numai dacă $f^{-1}(D')$ este deschisă în X. (De exemplu, proiecția canonică $\pi : X \to X/\rho$ este o aplicație de identificare, pentru orice

relație ρ pe spațiul topologic X.) Să se arate că dacă $f : X \to Y$ este o surjecție continuă și f este închisă sau deschisă, atunci f este o aplicație de identificare.

2. Compunerea a două aplicații de identificare este o aplicație de identificare.

3. Să se arate că dacă $f : X \to Y$ este o injecție între două spații topologice, atunci f este o aplicație de identificare dacă și numai dacă f este un homeomorfism.

4. Fie $f : X \to Y$ o aplicație de identificare. Care este topologia lui Y dacă: a) Topologia lui X este cea discretă; b) Topologia lui X este minimală?

5. Să se verifice dacă următoarele aplicații sînt de identificare:

a) Proiecțiile $X \times Y \to X$, $X \times Y \to Y$;

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy = 0\} \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x$;

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 y^2 = 1\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $(x, y) \mapsto x$;

d) $\exp : I \to S^1$, $\exp(t) = e^{2\pi i t}$;

e) $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, $\exp(t) = e^{2\pi i t}$.

6. Fie $f : X \to Y$ o aplicație de identificare și fie $R_f = \{(x, x') \in X \times X \mid f(x) = f(x')\}$. Să se arate că: a) Dacă Y este un spațiu Hausdorff, atunci R_f este închisă în $X \times X$; b) Dacă f este deschisă și R_f este închisă în $X \times X$, atunci Y este un spațiu Hausdorff.

7. Fie $f : X \to Y$ o aplicație continuă și $f' : X \times \{1\} \to Y$, aplicația $(x, 1) \mapsto f(x)$. Deoarece $X \times \{1\}$ este submulțime închisă a lui $X \times I$, putem considera spațiul de adjuncție $M_f = Y_{f'} \sqcup (X \times I)$, numit *cilindrul aplicației* f. Apoi, *conul aplicației* f se definește prin $C_f = M_f / X \times \{0\}$. Se cer condiții suficiente ca M_f și C_f să fie spații separate Hausdorff.

8. Un *sistem inductiv* (sau *direct*) *de spații topologice* (sau de mulțimi, sau de grupuri), peste o mulțime parțial ordonată $(J, \leqslant)$, constă dintr-o familie de spații topologice (mulțimi, grupuri) X_j, pentru $j \in J$ și dintr-o familie de aplicații continue (aplicații de mulțimi, homomorfisme de grupuri) $f_{ij} : X_i \to X_j$, definite cînd $i \leqslant j$, și astfel încît au loc relațiile $f_{jk} f_{ij} = f_{ik}$, dacă $i \leqslant j \leqslant k$ și $f_{jj} = 1_{X_j}$, $\forall j \in J$.

Un spațiu topologic X se numește *limita inductivă* (sau *directă*) a sistemului inductiv $(X_j, f_{ij})_J$; scriem $X = \varinjlim_J X_j$, dacă există niște aplicații continue $q_j : X_j \to X$, încît $q_j f_{ij} = q_i$ și dacă X' este un spațiu topologic arbitrar, pentru care se dau aplicațiile continue $q_j' : X_j \to X'$, satisfăcînd $q_j' f_{ij} = q_i'$, atunci există o unică aplicație continuă $q' : X \to X'$, pentru care $q_j' = q' q_j$. (Analog se definește limita inductivă a unui sistem inductiv de mulțimi sau de grupuri.)

Mulțimea parțial ordonată $(J, \leqslant)$ se numește *filtrantă la dreapta* dacă pentru oricare $i, j \in J$, există $k \in J$ satisfăcînd $i \leqslant k$ și $j \leqslant k$.

Să se arate că pentru fiecare sistem inductiv de spații topologice, peste o mulțime filtrantă la dreapta, există limita inductivă și aceasta este unică (pînă la homeomorfisme).

Soluție. Considerăm suma topologică $S = \bigsqcup_{j \in J} X_j$, cu incluziunile canonice $s_j : X_j \to S$. Definim pe S următoarea relație de echivalență, l: $(i, x_i) l (j, x_j)$ dacă există $k \in J$, $k \geqslant i$, $k \geqslant j$ și astfel ca $f_{ik}(x_i) = f_{jk}(x_j)$. Considerăm spațiul factor $X = S/l$, cu proiecția canonică $\pi : S \to X$.

Fie atunci $q_j = \pi s_j$. Pentru aceste aplicații continue avem $q_j f_{ij} = \pi s_j f_{ij} = \pi s_i = q_i$, deoarece pentru $i \leqslant j$ și $x_i \in X_i$, avem $(i, x_i) l (j, f_{ij})(x_i))$. Apoi, dacă $q'_j : X_j \to X'$ satisface $q'_j f_{ij} = q'_i$, definim $s' : S \to X'$ prin $s'((j, x_j)) = q'_j(x_j)$. Aplicația s' este continuă și dacă $(i, x_i) l (j, x_j)$, atunci $s'((i, x_i)) = s'((j, x_j)$, încît se poate defini aplicația $q' : X \to X'$ prin $q'(\pi(j, x_j)) = s'((j, x_j))$. Aplicația q' este continuă și satisface relațiile $q'_j = q' q_j$, $\forall j \in J$. Unicitatea aplicației q' rezultă din faptul că dacă și q'_1 satisface acelorași condiții, trebuie să avem $\pi q' = \pi q'_1$ și π fiind surjectivă, deducem $q'_1 = q'$.

9. Să se arate că există limita inductivă a oricărui sistem inductiv de grupuri, peste o mulțime de indici filtrantă la dreapta.

Indicație. Fie sistemul inductiv de grupuri $(X_j, f_{ij})_J$ și fie X mulțimea construită ca în exerc. 8. Se introduce pe X următoarea structură de grup: $\pi((i, x_i)) \circ \pi((j, x_j)) = \pi((k, f_{ik}(x_i) * f_{jk}(x_j))$, pentru un $k \in J$, cu $i \leqslant k$, $j \leqslant k$ și „$*$" fiind operația grupală în X_k. Se verifică ușor buna definire (independența de k) a acestei operații și în rest se procedează analog exerc. 8.

10. Fie $(X_j, f_{ij})_J$ un sistem inductiv de spații topologice. Presupunem că există un indice $j_0 \in J$, încît dacă $j \geqslant i \geqslant j_0$, atunci f_{ij} este un homeomorfism. Să se arate că $\lim\limits_{\overrightarrow{J}} X_j = X_{j_0}$.

Indicație. Se definesc aplicațiile $q_j : X_j \to X_{j_0}$ prin

$$q_j = \begin{cases} f_{j_0 j}^{-1} & \text{dacă } j \geqslant j_0, \\ f_{j j_0} & \text{dacă } j_0 \geqslant j. \end{cases}$$

11. Fie X un spațiu topologic, $X = \bigcup\limits_{j \in J} X_j$, încît $F \subseteq X$ este închisă dacă și numai dacă $F \cap X_j$ este închisă în X_j (spunem că X are *topologia slabă dată de subspațiile* X_j). Presupunem de asemenea că pentru orice $i, j \in J$ există $k \in J$ astfel încît $X_k \supseteq X_i \cup X_j$. (Această condiție se poate realiza înlocuind sistemul dat cu sistemul reuniunilor finite $\{X_{j_1} \cup \ldots \cup X_{j_n}\}$.) Considerăm relația „$\leqslant$" pe $J : i \leqslant j \Leftrightarrow X_i \subseteq X_j$. Pentru $i \leqslant j$, fie $f_{ij} : X_i \hookrightarrow X_j$ incluziunea. Să se arate că (X_j, f_{ij}) este un sistem inductiv de spații topologice, pentru care $\lim\limits_{\overrightarrow{J}} X_j = X$.

12. Noțiunile duale acelora de sistem inductiv și limită inductivă sînt respectiv acelea de *sistem proiectiv (invers)* și *limită proiectivă*. Să se arate că dacă $\{X_j, f_{ij}\}$ este un sistem invers de spații topologice, atunci $X = \{x = (x_j) \in \prod X_j \mid f_{ij}(x_j) = x_i, \ \forall i \leqslant j\}$, cu topologia de subspațiu al produsului, este $\lim\limits_{\overleftarrow{J}} X_j$, unde proiecțiile canonice sînt $p_i : X \to X_i$, $p_i((x_j)) = x_i$.

§ 11. Banda lui Möbius, trompeta lui Klein, spații proiective, spații lenticulare și alte exemple de spații cît

PROPOZIȚIA 1. *Cilindrul compact $S^1 \times I$ este homeomorf cu spațiul cît obținut din pătratul I^2, identificînd o pereche de muchii opuse* (vezi fig. 18).

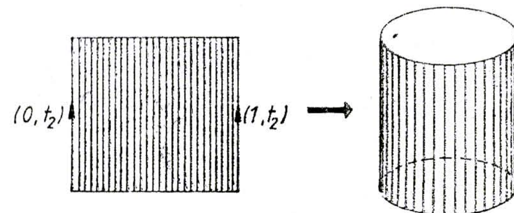


Fig. 18

Demonstrație. Considerăm un sistem de coordonate, încît $I^2 = \{(t_1, t_2) \mid 0 \leqslant t_i \leqslant 1\}$ și fie relația $(t_1, t_2) \sim (t'_1, t'_2) \Leftrightarrow (t_1, t_2) = (t'_1, t'_2)$, sau $t_1 = 0$, $t'_1 = 1$ și $t_2 = t'_2$, sau $t'_1 = 0$, $t_1 = 1$ și $t_2 = t'_2$. Fie $I^2/\sim$ spațiul cît rezultat. Definim aplicația $f : I^2/\sim \to S^1 \times I$, $f(\widehat{(t_1, t_2)}) = (e^{2\pi i t_1}, t_2)$. Se constată că aceasta este bine definită, continuă (Cor. 1 § 10) și bijectivă. Deoarece $I^2/\sim$ este compact (Teorema 2 § 10) și $S^1 \times I$ spațiu separat, rezultă din Cor. 2 § 9 că f este un homeomorfism.

PROPOZIȚIA 2. a) *Torul $T^2 = S^1 \times S^1$ este homeomorf cu spațiul obținut din pătratul I^2, identificînd laturile opuse* (vezi fig. 19).

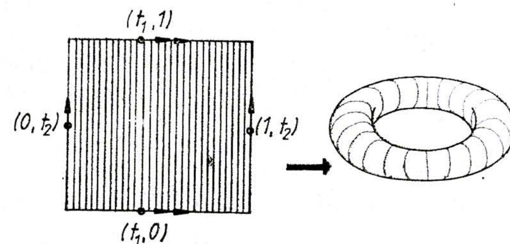


Fig. 19

b) *Torul se poate scufunda în* $\mathbb{R}^3$.

Demonstrație. a) Cu notațiile din Prop. 1, considerăm relația $(t_1, t_2)\rho(t_1', t_2') \Leftrightarrow (t_1, t_2) \sim (t_1', t_2')$, sau $t_2 = 0$, $t_2' = 1$ și $t_1 = t_1'$, sau $t_2' = 0$, $t_2 = 1$ și $t_1 = t_1'$. Definim $g : I^2/\rho \to S^1 \times S^1$, $g(\widehat{(t_1, t_2)}) = (e^{2\pi i t_1}, e^{2\pi i t_2})$, despre care se arată, utilizînd argumentele din Prop. 1, că este un homeomorfism.

b) Se aplică exerc. 3 § 6.

PROPOZIȚIA 3. a) *Spațiul topologic obținut din pătratul I^2, prin identificările din fig. 20, numit* **banda lui Möbius**, *este un spațiu liniar conex, compact și Hausdorff.*

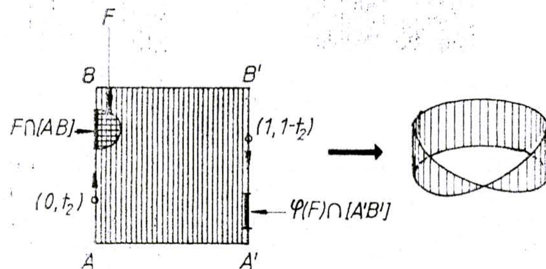


Fig. 20

b) *Banda lui Möbius se poate scufunda în* $\mathbb{R}^3$.

Demonstrație. a) Relația m pe I^2, care conduce la banda lui Möbius, este deci $(t_1, t_2)m(t_1', t_2') \Leftrightarrow (t_1, t_2) = (t_1', t_2')$, sau $t_2' = 1 - t_2$, $t_1 = 0$ și $t_1' = 1$, sau $t_1' = 0$, $t_1 = 1$ și $t_2' = 1 - t_2$. Fie $M = I^2/m$. Deoarece I^2 este liniar conex și compact, rezultă (Teorema 2 § 10) că M este de asemenea liniar. Deoarece I^2 este un spațiu Hausdorff compact, vom putea aplica Teorema 4 § 10 dacă vom constata că aplicația $\pi : I^2 \to I^2/m$ este închisă. Fie F închisă în I^2. Atunci $\pi^{-1}(\pi(F)) = F \cup [\varphi(F) \cap ([AB] \cup [A'B'])]$, unde $\varphi : I^2 \to I^2$ este simetria față de centrul pătratului, adică $\varphi((t_1, t_2)) = (1 - t_1, 1 - t_2)$. În mod evident, φ este un homeomorfism și deoarece $[AB]$ și $[A'B']$ sînt închise în I^2, rezultă că $\pi^{-1}(\pi(F))$ este închisă, deci $\pi(F)$ este închisă.

b) Considerăm aplicația $f : I^2 \to \mathbb{R}^3$, definită prin $f((t_1, t_2)) = ((2+(2t_2-1)\sin \pi t_1)\cos 2\pi t_1, (2+(2t_2-1)\sin 2\pi t_1)\sin 2\pi t_1$

$,(2t_2 - 1)\cos \pi t_1)$ (vezi fig. 21). Rezultă ușor că $f((t_1, t_2)) = f((t_1', t_2')) \Leftrightarrow (t_1, t_2)m(t_1', t_2')$, astfel că f induce aplicația continuă $\hat{f} : M \to \mathbb{R}^3$, $\hat{f}(\widehat{(t_1, t_2)}) = f(t_1, t_2)$. Aceasta este o bijecție continuă pe imagine și deoarece M este spațiu compact și $\hat{f}(M) = f(I^2)$ este spațiu separat, rezultă că $\hat{f}$ este o scufundare.

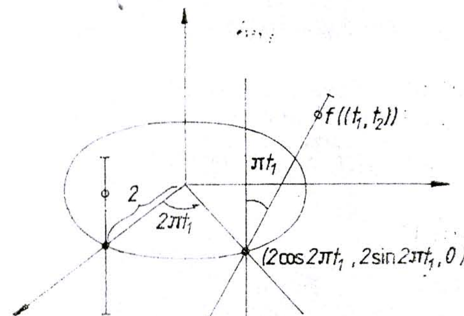


Fig. 21

PROPOZIȚIA 4. a) *Spațiul topologic obținut din pătratul I^2, prin identificările din fig. 22, numit* **trompeta (sticla) lui Klein**, *este un spațiu liniar conex, compact și Hausdorff.*

b) *Trompeta lui Klein poate fi scufundată în* $\mathbb{R}^4$.

Demonstrație. a) Cu notațiile din Prop. 3, considerăm relația definită astfel:

$$(t_1, t_2)k(t_1', t_2') \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (t_1, t_2)m(t_1', t_2'),$$

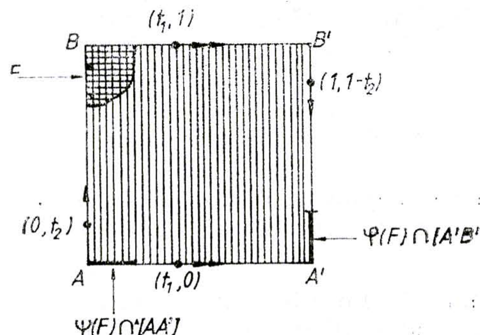


Fig. 22

sau $t_1 = t_1'$ și $t_2 = 0$, $t_2' = 1$, sau $t_1 = t_1'$, $t_2 = 1$, $t_2' = 0$. Deoarece I^2 este liniar conex și compact, rezultă că la fel este spațiul $K = I^2/k$. Pentru a aplica Teorema 4 § 10, fie proiecția canonică $\pi : I^2 \to I^2/k$ și F închisă în I^2. Atunci, $\pi^{-1}(\pi(F)) = F \cup [\varphi(F) \cap ([AB] \cup [A'B'])] \cup [\psi(F) \cap ([AA'] \cup [BB'])]$, unde φ este simetria față de centrul pătratului, iar ψ este simetria față de mediatoarea segmentului $[AB]$, adică $\psi : I^2 \to I^2$, $\psi(t_1, t_2) = (t_1, 1 - t_2)$. Rezultă, prin același raționament ca cel din Prop. 3, că $\pi(F)$ este închisă și deci K este un spațiu separat.

b) Considerăm aplicația $f : I^2 \to \mathbb{R}^4$, definită prin

$$f((t_1, t_2)) = ((2 + \cos 2\pi t_2) \cos 4\pi t_1,\ (2 + \cos 2\pi t_2) \sin 4\pi t_1,$$
$$\sin 2\pi t_2 \cos 2\pi t_1,\ \sin 2\pi t_1 \sin 2\pi t_2).$$

Această aplicație este continuă și rezultă ușor că $f((t_1, t_2)) = f((t_1', t_2')) \Leftrightarrow (t_1, t_2)k(t_1', t_2')$. În felul acesta, f induce aplicația continuă $\hat{f} : K \to \mathbb{R}^4$, $\hat{f}(\widehat{(t_1, t_2)}) = f(t_1, t_2)$. Aceasta

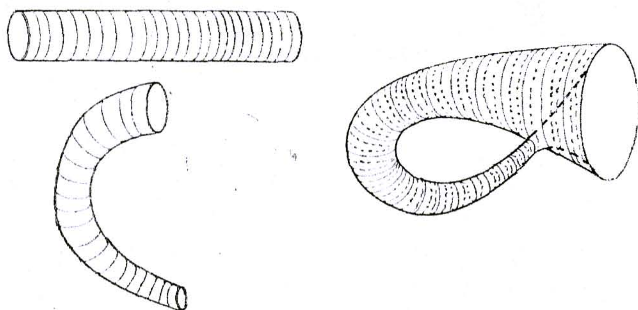


Fig. 23

este o bijecție continuă pe imagine și, deoarece K este un spațiu compact și $f(I^2)$ separat, rezultă că $\hat{f}$ este o scufundare.

OBSERVAȚIE. Trompeta lui Klein nu se poate scufunda în $\mathbb{R}^3$. Există un model didactic (vezi fig. 23) care însă are o „autointersecție" neexistentă în mod real în K.

PROPOZIȚIA 5. *Pentru $n \geq 1$, fie $i : S^{n-1} \hookrightarrow D^n$ incluziunea. Atunci, spațiul de adjuncție $D^n {}_i\sqcup D^n$ este homeomorf cu S^n.*

Demonstrație. Avem $S^n = S^n_+ \cup S^n_-$ și $S^n_+ \cap S^n_- = S^{n-1}$ (Prop. 4 § 5), iar S^n_+, S^n_- sînt fiecare homeomorfe cu D^n. Este clar că avem $S^n = S^n_+ {}_j\sqcup S^n_-$, unde $j : S^{n-1} \hookrightarrow S^n_+$ este incluziunea. Dacă notăm prin $f_+ : S^n_+ \to D^n$, $f_- : S^n_- \to D^n$ homeomorfismele din Prop. 4 § 5, putem considera suma acestora $f = f_+ \sqcup f_- : S^n_+ \sqcup S^n_- \to D^n \sqcup D^n$. Aplicînd Corolarul 2 § 10, rezultă că homeomorfismul f induce un homeomorfism $\hat{f} : S^n_+ {}_j\sqcup S^n_- \to D^n {}_i\sqcup D^n$.

PROPOZIȚIA 6. *Conul CS^{n-1} este homeomorf cu D^n pentru $n \geq 1$.*

Demonstrație. Definim aplicația $f : CS^{n-1} = S^{n-1} \times I/S^{n-1} \times \{1\} \to D^n$, prin $f(\widehat{(x, t)}) = (1 - t)x$. Această aplicație este bine definită și continuă. Este și bijectivă, cu inversa

$$f^{-1}(z) = \begin{cases} \widehat{\left(\dfrac{z}{\|z\|}, 1 - \|z\|\right)} & \text{pentru } z \neq 0, \\ v = \widehat{(x_0, 1)}, (x_0 \in S^{n-1}) & \text{dacă } z = 0. \end{cases}$$

Deoarece D^n este spațiu Hausdorff și conul CS^{n-1} este compact, rezultă că f este un homeomorfism (Cor. 2 § 9).

PROPOZIȚIA 7. *Spațiul D^n/S^{n-1} este homeomorf cu S^n pentru $n \geq 1$.*

Demonstrație. Definim aplicația $\theta : D^n \to S^n$, astfel: dacă $x = (x_1, \ldots, x_n) \in D^n$, fie $r = \|x\|$ și luăm

$$\theta(x_1, \ldots, x_n) =$$
$$= \begin{cases} \left(-\cos \pi r, \dfrac{x_1}{r} \sin \pi r, \ldots, \dfrac{x_n}{r} \sin \pi r\right) & \text{dacă } r \neq 0, \\ (-1, 0, \ldots, 0) & \text{dacă } r = 0. \end{cases}$$

Continuitatea în $x = 0$ a aplicației θ rezultă din faptul că

$$\lim_{x \to 0} \frac{x_i}{r} \sin \pi r = \lim_{r \to 0} \frac{\sin \pi r}{r} \cdot \lim x_i = 0,\ i = 1, \ldots, n.$$

Apoi, dacă $x \in S^{n-1}$ rezultă $r = 1$ și deci $\theta(S^{n-1}) = p_0$, $p_0 = (1, 0, \ldots, 0)$. Putem defini atunci aplicația $\bar{\theta} : D^n/S^{n-1} \to S^n$, $\bar{\theta}(\hat{z}) = \theta(z)$, $\forall \hat{z} \in D^n/S^{n-1}$. Această aplicație este continuă și se arată ușor că este bijecție. Deoarece D^n/S^{n-1} este compact și S^n separat, rezultă din Cor. 2 § 9 că $\bar{\theta}$ este un homeomorfism.

PROPOZIȚIA 8. *Pentru $p \geq 1$ și $q \geq 0$, fie incluziunea $i : S^{p-1} \times S^q \hookrightarrow S^{p-1} \times D^{q+1}$. Atunci, spațiul de adjuncție $(S^{p-1} \times D^{q+1}\ {}_i\sqcup (D^p \times S^q)$ este homeomorf cu sfera S^{p+q}.*

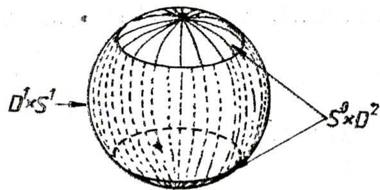


Fig. 24

(De exemplu, S^2 este homeomorfă cu $(S^0 \times D^2)\ {}_i\sqcup (D^1 \times S^1)$ (vezi fig. 24).)

Demonstrație. Fie $B_1 = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_1^2 + \ldots + x_p^2 \leq 1/2\}$ și $B_2 = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_1^2 + \ldots + x_p^2 \geq 1/2\}$, cu $n = p + q$. Atunci $S^{p+q} = B_2\ {}_j\sqcup B_1$, unde j este incluziunea $B_1 \supset B_1 \cap B_2 \overset{j}{\hookrightarrow} B_2$. Există apoi homeomorfismele $h : B_1 \to D^p \times S^q$, $k : B_2 \to S^{p-1} \times D^{q+1}$, definite respectiv prin:

$$h((x_1, \ldots, x_{n+1})) =$$

$$= \left((x_1\sqrt{2}, \ldots, x_p\sqrt{2}), \left(\frac{x_{p+1}}{\sqrt{1 - \sum\limits_{i \leq p} x_i^2}}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{\sqrt{1 - \sum\limits_{i \leq p} x_i^2}}\right)\right);$$

$$k((x_1, \ldots, x_{n+1})) =$$

$$= \left(\left(\frac{x_1}{\sqrt{1 - \sum\limits_{i \geq p+1} x_i^2}}, \ldots, \frac{x_p}{\sqrt{1 - \sum\limits_{i \geq p+1} x_i^2}}\right), (x_{p+1}\sqrt{2}, \ldots, x_{n+1}\sqrt{2})\right).$$

Avem $h/B_1 \cap B_2 = k/B_1 \cap B_2$ și $h(B_1 \cap B_2) = k(B_1 \cap B_2) = S^{p-1} \times S^q$, de unde rezultă imediat homeomorfismul din enunțul propoziției.

COROLAR 1. *Sfera S^3 este homeomorfă cu spațiul ce se obține din două «toruri pline» $D^2 \times S^1$ și $S^1 \times D^2$, identificînd meridianele frontierei primului cu paralelele frontierei celui de-al doilea.*

Fie $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}$ suma directă a n exemplare ale grupului aditiv $\mathbb{Z}$ al întregilor. Definim $h : \mathbb{Z}^n \to H(\mathbb{R}^n)$ (grupul homeomorfismelor lui $\mathbb{R}^n$), prin

$$h((p_1, \ldots, p_n))(x_1, \ldots, x_n)) = (x_1 + p_1, \ldots, x_n + p_n).$$

PROPOZIȚIA 9. *Spațiul orbitelor $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ este homeomorf cu torul T^n.*

Demonstrație. Se constată imediat că este bine definită aplicația $f : \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n \to T^n$, $f(\widehat{(x_1, \ldots, x_n)}) = (e^{2\pi i x_1}, \ldots, e^{2\pi i x_n})$. Această aplicație este evident continuă și bijectivă. Pe de altă parte, spațiul $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ este homeomorf cu spațiul I^n/ρ, unde ρ este relația indusă de acțiunea grupului $\mathbb{Z}^n$ pe cubul I^n. Rezultă că $\mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ este compact și, aplicînd Cor. 2 § 9, deducem că f este un homeomorfism.

DEFINIȚIA 1. Fie $S^{2n+1} = \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| = 1\}$ (vezi exerc. 2 § 5), λ o rădăcină primitivă de ordinul p a unității și $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ grupul claselor de resturi ale întregilor modulo p. Se poate defini $h : \mathbb{Z}_p \to H(S^{2n+1})$, prin $h(\hat{r})(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = (\lambda^r z_1, \ldots, \lambda^r z_{n+1})$, pentru $\hat{r} \in \mathbb{Z}_p$ și $(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in S^{2n+1}$. Aplicația $h(\hat{r})$ este în adevăr un homeomorfism (cu inversul $h(-\hat{r})$) și h este un homomorfism de grupuri. Putem considera spațiul de orbite $S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p$. Acesta se notează L_p^{2n+1} și se nunește *spațiul lenticular de dimensiune $2n + 1$ și de grup $\mathbb{Z}_p$* *).

PROPOZIȚIA 10. *Spațiul lenticular L_p^{2n+1} este compact, liniar conex și Hausdorff.*

DEFINIȚIA 2. Fie $X = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ și considerăm în X următoarea relație de echivalență: $x\rho y \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, încît $y = \lambda x$. Spațiul cît X/ρ se numește *spațiul proiectiv real n-dimensional* și-l vom nota prin $P\mathbb{R}^n$. Elementele sale pot fi interpretate ca dreptele din $\mathbb{R}^{n+1}$, trecînd prin origine. Relația ρ este indusă de acțiunea grupului multiplicativ $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pe X, prin $h : \mathbb{R}^* \to H(X)$, $h(\lambda)(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in X$. Restricția relației ρ la S^n poate fi interpretată ca relația asociată acțiunii grupului $\mathbb{Z}_2$ pe S^n, prin $h' : \mathbb{Z}_2 \to H(S^n)$, $h'(1) = 1_{S^n}$, $h'(-1)(z) = -z$, $z \in S^n$.

PROPOZIȚIA 11. a) *$P\mathbb{R}^n$ este homeomorf cu $S^n/\mathbb{Z}_2$. În particular, $P\mathbb{R}^n$ este liniar conex, compact și Hausdorff.*

---

*) Sub denumirea de *spații lenticulare* sînt cunoscute mai multe tipuri de spații topologice [33, p. 26] (vezi, de asemenea, exerc. 5).

b) *Dacă* p'' *este restricția relației* p *la* S^n_+, *atunci* S^n_+/p' *este homeomorf cu* $P\mathbb{R}^n$. *În particular,* $P\mathbb{R}^1$ *este homeomorf cu* S^1.

c) $P\mathbb{R}^n$ *este homeomorf cu spațiul obținut din* D^n, *identificînd punctele diametral opuse ale frontierei sale* S^{n-1}.

Demonstrație. a) Considerăm incluziunea $i : S^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\}$. Aceasta induce aplicația $\hat{i} : S^n/\mathbb{Z}_2 \to P\mathbb{R}^n$, încît este comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\ \pi'\ } & S^n/\mathbb{Z}_2 \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{i}} \\ \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} & \xrightarrow{\ \pi\ } & P\mathbb{R}^n \end{array}$$

Rezultă că $\hat{i}$ este aplicație continuă. Putem considera de asemenea aplicația continuă $r : \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} \to S^n$, $r(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$. Aceasta induce $\hat{r} : P\mathbb{R}^n \to S^n/\mathbb{Z}_2$, încît este comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{n+1}\setminus\{0\} & \xrightarrow{\ \pi\ } & P\mathbb{R}^n \\ {\scriptstyle r}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \hat{r}} \\ S^n & \xrightarrow{\ \pi'\ } & S^n/\mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Rezultă că $\hat{r}$ este aplicație continuă și se verifică imediat că este inversa aplicației $\hat{i}$. Sfera S^n fiind liniar conexă și compactă ($n \geqslant 1$; $P\mathbb{R}^0$ este un punct) rezultă că la fel este $P\mathbb{R}^n$. Din Teorema 7 § 10 rezultă că $P\mathbb{R}^n$ este și spațiu Hausdorff.

b) Definim $g : S^n_+/p'' \to S^n/\mathbb{Z}_2$, $g(\hat{\hat{x}}) = \hat{x}$, $\hat{\hat{x}} \in S^n_+/p''$, care face comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^n_+ & \xrightarrow{\ \pi''\ } & S^n_+/p'' \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ S^n & \xrightarrow{\ \pi'\ } & S^n/\mathbb{Z}_2 \end{array}$$

Deoarece $g\pi'' = \pi' i$ este o aplicație continuă, rezultă că

g este continuă. Aceasta fiind și bijecție, iar S^n_+/p'' spațiu compact și $S^n/\mathbb{Z}_2$ separat, rezultă că g este un homeomorfism. Relația p'' pe S^n_+ este următoarea: $xp''y \Leftrightarrow x = y$, sau $x, y \in S^{n-1}$ și $x = -y$. În cazul $n = 1$, avem situația din fig. 25.

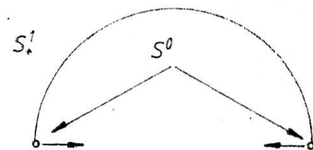


Fig. 25

c) Rezultă din b) și Prop. 4 § 5.

COROLAR 2. *Spațiul lenticular* L^{2n+1}_2 *este homeomorf cu* $P\mathbb{R}^{2n+1}$.

Demonstrație. Pentru $\lambda = -1$, $h(0)(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (z_1, \ldots, z_{n+1})$, $h(\hat{1})(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (-z_1, -z_2, \ldots, -z_{n+1})$. Deci, acțiunea lui $\mathbb{Z}_2$ pe S^{2n+1}, din definiția spațiului L^{2n+1}_2, este aceeași ca în Prop. 11.

PROPOZIȚIA 12. *Pentru* $n < m$, *injecția* $i : S^n \hookrightarrow S^m$, $i(x_1, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}, 0, \ldots, 0)$ *induce un homeomorfism al lui* $P\mathbb{R}^n$ *pe o submulțime închisă a lui* $P\mathbb{R}^m$. *În particular,* $P\mathbb{R}^{n-1}$ *se poate identifica cu un hiperplan (la infinit) al lui* $P\mathbb{R}^n$.

Demonstrație. Considerăm acțiunile grupului $\mathbb{Z}_2$ pe S^n și S^m și fie relațiile induse p și respectiv p'. Atunci $xpy \Rightarrow i(x)p'i(y)$, încît, după Cor. 2 § 10, este indusă o aplicație continuă $\hat{i} : S^n/\mathbb{Z}_2 \to S^m/\mathbb{Z}_2$. Deoarece i este un homeomorfism pe o submulțime închisă a lui S^m și p' fiind închisă (arătați aceasta), rezultă că $\hat{i}$ este un homeomorfism pe o submulțime închisă.

PROPOZIȚIA 13. *Considerînd proiecția canonică* $q : S^{n-1} \to P\mathbb{R}^{n-1}$, *spațiul de adjuncție* $P\mathbb{R}^{n-1} {}_q\sqcup D^n$ *este homeomorf cu* $P\mathbb{R}^n$.

Demonstrație. Afirmația rezultă din Prop. 11 c), deoarece q identifică punctele diametral opuse din sfera S^{n-1}.

COROLAR 3. *Diferența* $P\mathbb{R}^n \setminus P\mathbb{R}^{n-1}$ *este un spațiu homeomorf cu* $\mathbb{R}^n$.

Demonstrație. $\mathring{D}^n$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^n$ (Prop. 5 § 5).

PROPOZIȚIA 14. *Se consideră aplicația continuă* $f : S^n \to \mathbb{R}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, *definită prin*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1})) = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{1n+1}, y_{22}, \ldots, y_{2n+1}, \ldots$$
$$\ldots, y_{n+1,n+1}), \text{ cu } y_{ij} = x_i x_j,\ i \leqslant j.$$

Imaginea aplicației f este un spațiu homeomorf cu $P\mathbb{R}^n$ *).

Demonstrație. Să observăm că dacă $x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n$, atunci $f(x) = f(-x)$, astfel că este bine definită aplicația $\hat{f} : P\mathbb{R}^n \to f(S^n) \subset \mathbb{R}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, cu $\hat{f}(\hat{x}) = f(x)$. Considerînd proiecția canonică $\pi : S^n \to P\mathbb{R}^n$, avem $\hat{f} \circ \pi = f$, deci $\hat{f}$ este continuă. Aceasta este și bijectivă, deoarece $\hat{f}(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x}')$ implică $x_i x_j = x'_i x'_j$, $\forall i \leqslant j$, deci $x_1^2 = x_1'^2$. Dacă presupunem $x_1 = x'_1 \neq 0$, atunci din $x_1 x_j = x'_1 x'_j$, $\forall j \geqslant 1 \Rightarrow x'_j = x_j$. Dacă $x_1 = -x'_1 \Rightarrow x'_j = -x_j$, $\forall j \geqslant 2$. Prin urmare, $\hat{x} = \hat{x}'$. Dacă $x_1 = 0 \Rightarrow x'_1 = 0$ și luăm în locul lui x_1 prima coordonată nenulă. Apoi, $P\mathbb{R}^n$ este compact și $f(S^n)$ separat, ceea ce implică $\hat{f}$ homeomorfism.

PROPOZIȚIA 15. *Aplicația $f : S^2 \to \mathbb{R}^4$, definită prin $f((x_1, x_2, x_3)) = (x_1^2 - x_2^2, x_1 x_2, x_1 x_3, x_2 x_3)$, determină o scufundare a planului proiectiv real $P\mathbb{R}^2$ în $\mathbb{R}^4$.*

Demonstrație. Dacă $x = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$, atunci $f(x) = f(-x)$, încît este bine definită și continuă, aplicația $\hat{f} : P\mathbb{R}^2 \to f(S^2) \subset \mathbb{R}^4$. Aplicația $\hat{f}$ este bijecție deoarece dacă $\hat{f}(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x}')$, atunci $x'_i x'_j = x_i x_j$, $i < j$ și $x_1'^2 - x_2'^2 = x_1^2 - x_2^2$. Să presupunem că $x_1 \neq 0$ și fie $x'_1 = \lambda x_1$. Deducem $x_2 = \lambda x'_2$, $x_3 = \lambda x'_3$ și $\lambda^2 x_1^2 - x_2'^2 = x_1^2 - \lambda^2 x_2'^2$. Din ultima relație avem $(\lambda^2 - 1)(x_1^2 + x_2'^2) = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1$. Dacă $\lambda = 1$, avem $x' = x$, iar dacă $\lambda = -1 \Rightarrow x' = -x$. Deci $\hat{x} = \hat{x}'$. Presupunînd $x_1 = 0$ dar $x'_1 \neq 0$, schimbînd rolurile lui $\hat{x}$ și $\hat{x}'$, deducem iarăși $\hat{x} = \hat{x}'$. În sfîrșit, dacă $x_1 = x'_1 = 0 \Rightarrow x_2'^2 = x_2^2$ și $x_2 x_3 = x'_2 x'_3$, ceea ce iarăși conduce imediat la $\hat{x} = \hat{x}'$. Prin urmare, $\hat{f}$ este bijecție. În continuare utilizăm raționamentul din Prop. 14.

DEFINIȚIA 3. Grupul multiplicativ $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ acționează la stînga pe spațiul $X = \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$, prin homomorfismul $h : \mathbb{C}^* \to H(X)$, definit de $h(\lambda)(x) = \lambda x$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $x \in X$. Spațiul orbitelor, care poate fi interpretat ca mulțimea dreptelor complexe din $\mathbb{C}^{n+1}$, trecînd prin origine, este notat $P\mathbb{C}^n$ și se numește *spațiul proiectiv complex n-dimensional.*

Considerăm relația $p = \rho_{\mathbb{C}^*}$ restrînsă la sfera $S^{2n+1} = \{z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in X \mid \|z\| = 1\}$. Avem atunci $z p z' \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{C}^*$, încît $z' = \lambda z$. Ultima relație implică $\|z'\| = |\lambda| \|z\| \Rightarrow |\lambda| = 1$.

---

*) Acest rezultat de scufundare a spațiului proiectiv într-un spațiu euclidian nu este cel mai bun. Conform *teoremei lui Whitney* [57, Th. 5], $P\mathbb{R}^n$ se poate scufunda în $\mathbb{R}^{2n}$ (vezi, de asemenea, $P\mathbb{R}^1 = S^1$ și Prop. 15).

Deci, p se poate interpreta ca relația indusă de acțiunea grupului $S^1 = \{\lambda \in \mathbb{C}^* \mid |\lambda| = 1\}$ pe sfera S^{2n+1}.

PROPOZIȚIA 16. *Spațiul $P\mathbb{C}^n$ este homeomorf cu S^{2n+1}/S^1. În particular, $P\mathbb{C}^n$ este un spațiu liniar conex și compact.*

Demonstrație. Incluziunea $i : S^{2n+1} \hookrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\}$ induce aplicația continuă $\hat{i} : S^{2n+1}/S^1 \to P\mathbb{C}^n$. Apoi, aplicația $h : \mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^{2n+1}$, definită prin $h(z) = \frac{z}{\|z\|}$, induce aplicația $\hat{h} : P\mathbb{C}^n \to S^{2n+1}/S^1$, care este inversa aplicației $\hat{i}$. Deoarece S^{2n+1} este spațiu liniar conex și compact, rezultă că la fel este și $P\mathbb{C}^n$.

DEFINIȚIA 4. Proiecția canonică $q : S^{n+1} \to P\mathbb{C}^n$ este numită *aplicația lui Hopf*.

În mod analog Prop. 12, obținem propoziția următoare.

PROPOZIȚIA 17. *Pentru $n < m$ injecția $i : S^{2n+1} \to S^{2m+1}$, $i(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}, 0, \ldots, 0)$ induce un homeomorfism al lui $P\mathbb{C}^n$ pe o submulțime închisă a lui $P\mathbb{C}^m$.*

PROPOZIȚIA 18. *Fie ρ relația de echivalență pe D^{2n}, definită prin $z \rho z' \Leftrightarrow = z'$, sau z, $z' \in S^{2n-1}$ și există $\lambda \in S^1$, încît $z' = \lambda z$. Atunci D^{2n}/ρ este homeomrfo cu $P\mathbb{C}^n$.*

Demonstrație. Fie $f : D^{2n} \to S^{2n+1}$, aplicația definită prin $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, z_n, \sqrt{1 - \|z\|^2})$. Dacă $z, z' \in S^{2n-1}$ și $z' = \lambda z$, atunci $\|z\| = \|z'\| = 1$ și $(z'_1, \ldots, z'_n, 0) = \lambda(z_1, \ldots, z_n, 0)$. Prin urmare, f induce o aplicație continuă și injectivă $\hat{f} : D^{2n}/\rho \to S^{2n+1}/S^1$. Această aplicație este și surjectivă: dacă $\widehat{(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1})} \in S^{2n+1}/S^1$, atunci căutăm $\lambda \in S^1$ și $(z_1, \ldots, z_n) \in D^{2n}$, încît $(z_1, \ldots, z_n, \sqrt{1 - \|z\|^2}) = (\lambda\zeta_1, \ldots, \lambda\xi_n, \lambda\zeta_{n+1})$. Dacă $\lambda = \cos\varphi + i\sin\varphi$ și $\zeta_{n+1} = a + ib$ rezultă $a\sin\varphi + b\cos\varphi = \sqrt{1 - \|z\|^2} = \sqrt{1 - |\zeta_1|^2 - \ldots - |\xi_n|^2}$. Este clar că se deduce λ ca o funcție continuă de $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1})$ și deci $(z_1, \ldots, z_n)$ ca o funcție continuă de $(\zeta_1, \ldots, \zeta_{n+1})$, de unde rezultă că funcția $\hat{f}^{-1} \circ \pi : S^{2n+1} \to D^{2n}/\rho$ este continuă, deci funcția $\hat{f}$ este un homeomorfism.

PROPOZIȚIA 19. *Spațiul de adjuncție $P\mathbb{C}^{n-1} {}_q\sqcup D^{2n}$ este homeomorf cu $P\mathbb{C}^n$ pentru $q : S^{2n-1} \to P\mathbb{C}^{n-1}$ aplicația lui Hopf.*

Demonstrație. Aplicînd Propoziția 18, deducem că dacă $f : D^{2n} \to P\mathbb{C}^n$ este proiecția $f(z) = f(z_1, \ldots, z_n) = \widehat{(z_1, \ldots, z_n, \sqrt{1 - \|z\|^2})}$ și $\hat{i} : P\mathbb{C}^{n-1} \to P\mathbb{C}^n$ este injecția canonică dată de Prop. 17, atunci aplicația $h : P\mathbb{C}^{n-1} \sqcup D^{2n} \to P\mathbb{C}^n$, cu $h/P\mathbb{C}^{n-1} = \hat{i}$ și $h/D^{2n} = f$, pentru care este satisfăcută condiția că $z \in S^{2n-1} \Rightarrow f(z) = \hat{i}q(z)$ (deoarece $\widehat{(z_1, \ldots, z_n, 0)} = \hat{i}(\widehat{(z_1, \ldots, z_n)})$), induce un homeomorfism $\hat{h} : P\mathbb{C}^{n-1} {}_q\sqcup D^{2n} \to P\mathbb{C}^n$.

COROLAR 4. *Diferența $P\mathbb{C}^n \setminus P\mathbb{C}^{n-1}$ este un spațiu homeomorf cu spațiul $\mathbb{R}^{2n}$.*

COROLAR 5. *Dreapta proiectivă complexă $P\mathbb{C}^1$ este homeomorfă cu sfera S^2.*

Demonstrație. Avem mai întîi faptul evident că $P\mathbb{C}^0$ este un punct, deoarece este homeomorf cu S^1/S^1. Apoi, $P\mathbb{C}^1$ se obține făcînd adjuncția la $P\mathbb{C}^0$ a celulei D^2, identificînd frontiera S^1 a acesteia cu $P\mathbb{C}^0$. Se aplică atunci Prop. 7.

COROLAR 6. *Spațiul proiectiv complex $P\mathbb{C}^n$ este un spațiu separat.*

Demonstrație. Afirmația rezultă prin inducție din Prop. 19 și din Teorema 10 § 10.

PROPOZIȚIA 20. *Imaginea aplicației $f : S^{2n+1} \to \mathbb{C}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}$, definită prin*

$$f(z_1, \ldots, z_{n+1}) = (y_{11}, y_{12}, \ldots, y_{ij}, \ldots, y_{n+1,n+1}),$$

$$\text{cu } y_{ij} = z_i\bar{z}_j \text{ pentru } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n + 1,$$

este homeomorfă cu spațiul $P\mathbb{C}^n$. Prin urmare, $P\mathbb{C}^n$ poate fi scufundat în $\mathbb{R}^{(n+1)(n+2)}$ *).

*) $P\mathbb{C}^n$ se poate scufunda chiar în $\mathbb{R}^{4n}$ [57, Th. 5].

Demonstrație. Fie $z' = (z'_1, \ldots, z'_{n+1}) = \lambda z = \lambda(z_1, \ldots, z_{n+1})$, deci $z'_i = \lambda z_i$, $i = 1, \ldots, n + 1$. Atunci, $y'_{ij} = \lambda z'_i \cdot \overline{\lambda z'_j} = |\lambda|^2 z'_i \cdot \bar{z}'_j = y_{ij}$. Prin urmare, f induce aplicația

$$\hat{f} : P\mathbb{C}^n \to f(S^{2n+1}) \subset \mathbb{C}^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}, \quad \hat{f}(\hat{z}) = f(z),$$

care este continuă, deoarece $\hat{f} \circ \pi = f$ este continuă. Aplicația $\hat{f}$ este injectivă fiindcă $\hat{f}(\hat{z}) = \hat{f}(\hat{z}') \Rightarrow z_i\bar{z}_j = z'_i\bar{z}'_j$, $\forall i \leqslant j \Rightarrow |z_i|^2 = |z'_i|^2 \Rightarrow |z_i| = |z'_i|$. Dacă $z_1 \neq 0 \Rightarrow z'_1 \neq 0$ și din $z_1\bar{z}_j = z'_1\bar{z}'_j$, $j \geqslant 1$, deducem $z'_j = \lambda z_j$, unde $\lambda = \bar{z}_1/\bar{z}'_1$, cu $|\lambda| = 1$. Rezultă $\hat{z} = \hat{z}'$. Dacă $z_1 = 0$, se înlocuiește în raționamentul de mai sus aceasta cu prima coordonată z_i a lui z nenulă, deducîndu-se aceeași egalitate $\hat{z} = \hat{z}'$. Prin urmare, $\hat{f}$ este injectivă. În sfîrșit, deoarece $P\mathbb{C}^n$ este compact și $f(S^{2n+1})$ este separat, rezultă că $\hat{f}$ este un homeomorfism.

Cu totul analog Prop. 15, se demonstrează rezultatul următor.

PROPOZIȚIA 21. *Aplicația $f : S^5 \to \mathbb{C}^4 = \mathbb{R}^8$, definită prin*

$$f((z_1, z_2, z_3)) = (|z_1|^2 - |z_2|^2, z_1\bar{z}_2, z_1\bar{z}_3, z_2\bar{z}_3),$$

determină o scufundare a planului proiectiv complex $P\mathbb{C}^2$ în $\mathbb{R}^8$.

DEFINIȚIA 5. Considerînd grupul multiplicativ al cuaternionilor $\mathbb{H}^* = \mathbb{H} \setminus \{0\}$, acesta acționează la stînga pe spațiul $X = \mathbb{H}^{n+1} \setminus \{0\}$, prin homomorfismul $h : \mathbb{H}^* \to H(X)$, $h(q)(x) = qx$, $\forall q \in \mathbb{H}^*$, $x \in X$. Spațiul orbitelor se notează $P\mathbb{H}^n$ și este numit *spațiul proiectiv cuaternionic n-dimensional.*

Dacă considerăm sfera $S^{4n+1} = \{q = (q_1, q_2, \ldots, q_{n+1}) \in X \mid \|q\| = |q_1|^2 + \ldots + |q_{n+1}|^2 = 1\}$ (vezi exerc. 1 § 4), atunci două puncte $x, x' \in S^{4n+1}$ sînt în aceeași orbită $\Leftrightarrow x' = qx$, pentru $q \in \mathbb{H}^*$. Rezultă $\|x'\| = |q|\,\|x\|$, deci $|q| = 1$. Prin urmare, relația indusă pe S^{4n+1} poate fi interpretată ca relația indusă de acțiunea grupului $S^3 = \{q \in \mathbb{H}^* \mid |q| = 1\}$ pe S^{4n+1}.

Nu apar deosebiri esențiale față de cazul complex în demonstrația următoarelor rezultate.

PROPOZIȚIA 22. a) *$P\mathbb{H}^n$ este homeomorf cu S^{4n+1}/S^3.*
b) *Pentru $n < m$, injecția $i : S^{4n+1} \to S^{4m+1}$, $i((q_1, \ldots, q_{n+1})) = (q_1, \ldots, q_{n+1}, 0, \ldots, 0)$ induce un homeomorfism al lui $P\mathbb{H}^n$ pe o submulțime închisă a lui $P\mathbb{H}^m$.*

c) *Spațiul de adjuncție* $P\mathbb{H}^{n-1}{}_q \sqcup D^{4n}$ *este homeomorf cu* $P\mathbb{H}^n$, *pentru* $q : S^{4n-1} \to P\mathbb{H}^{n-1}$ *proiecția canonică.*

d) $P\mathbb{H}^n/P\mathbb{H}^{n-1}$ *este homeomorf cu* $\mathbb{R}^{4n}$.

e) *Spațiul proiectiv cuaternionic* $P\mathbb{H}^n$ *este spațiu separat.*

f) *Dreapta proiectivă cuaternionică* $P\mathbb{H}^1$ *este homeomorfă cu* S^4.

g) $P\mathbb{H}^n$ *este homeomorf cu imaginea aplicației* $f : S^{4n+1} \to \mathbb{H}^{\frac{(n+1)(n+1)}{2}}$, *definită prin*

$$f((q_1, \ldots, q_{n+1})) = (y_{11}, \ldots, y_{n+1,n+1}), \text{ cu } y_{ij} = q_i\bar{q}_j, \ i \leqslant j.$$

Deci $P\mathbb{H}^n$ *poate fi scufundat în* $\mathbb{R}^{2(n+1)(n+2)}$ *).

h) *Aplicația* $f : S^9 \to \mathbb{H}^4 = \mathbb{R}^{16}$, *definită prin* $f((q_1, q_2, q_3)) = (|q_1|^2 - |q_2|^2, q_1\bar{q}_2, q_1\bar{q}_3, q_2\bar{q}_3)$, *determină o scufundare a planului proiectiv cuaternionic* $P\mathbb{H}^2$ *în* $\mathbb{R}^{16}$.

EXERCIȚII

1. Grupul $\mathbb{Z}$ acționează la stînga pe $\mathbb{R}^2$ prin homomorfismul $h : \mathbb{Z} \to H(\mathbb{R}^2)$, $h(n)((x, y)) = (x + n, (-1)^n y)$. Să se arate că această acțiune este proprie și *liberă* (adică grupul de stabilitate al unui punct (x, y), $G_{(x,y)} = \{n \in \mathbb{Z} \mid h(n)((x, y)) = (x, y)\}$, este nul). Să se deducă de aici că spațiul orbitelor $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$, numit *panglica lui Möbius*, este spațiu separat.

2. Să se arate că planul proiectiv real $P\mathbb{R}^2$ este homeomorf cu spațiul de adjuncție $D_f \sqcup D^2$, unde $f : S^1 \to \partial B \subset B$ este un homeomorfism al lui S^1 pe frontiera benzii lui Möbius (vezi fig. 26).

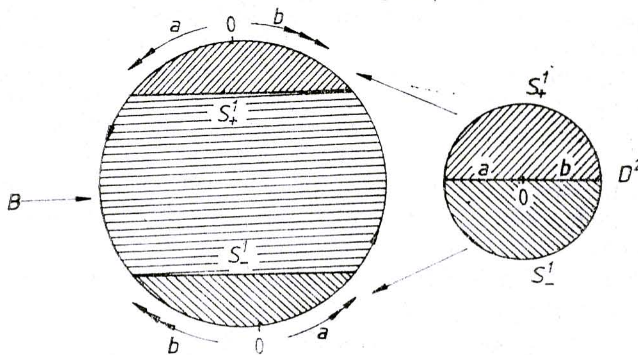


Fig. 26

*) $P\mathbb{H}^n$ se poate scufunda chiar în $\mathbb{R}^{8n}$[57, Th. 5].

3. Fie G grupul de homeomorfisme ale planului $\mathbb{R}^2$, generat de translația $t : (x, y) \rightsquigarrow (x + 1, y)$ și de transformarea $s : (x, y) \rightsquigarrow (-x, y + 1)$. Să se arate că această acțiune este liberă și proprie și că spațiul orbitelor este homeomorf cu trompeta lui Klein.

Indicație. Elementele lui G sînt $s^n t^m$, $n, m \in \mathbb{Z}$.

4. Se consideră acțiunea grupului $\mathbb{Z}_2$ pe $S^2 \times S^2$, definită prin $h : \mathbb{Z}_2 \to H(S^2 \times S^2)$, $h(1) = \text{Id}$, $h(-1)((x, y)) = (y, x)$. Să se arate că spațiul orbitelor $(S^2 \times S^2)/\mathbb{Z}_2$ este homeomorf, cu $P\mathbb{C}^2$.

5. Fie p, q numere întregi relativ prime, $S^{2n+1} = \{z = (z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \|z\| = 1\}$ și λ o rădăcină primitivă de ordinul p a unității. Se consideră relația de echivalență pe $S^{2n+1} : (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) \sim (\lambda z_1, \ldots, \lambda z_n, \lambda^q z_{n+1})$. Spațiul cît se notează $L^{2n+1}(p, q)$ și este numit *spațiul lenticular de dimensiune* $2n + 1$ *și de tip* (p, q). *Să se arate că:*

a) $L^{2n+1}(p, q)$ este spațiu liniar conex, compact și Hausdorff;

b) $L^3(2, 1)$ este homeomorf cu $P\mathbb{R}^3$;

c) $L^3(p, q)$ este homeomorf cu spațiul obținut din D^3 prin următoarele identificări făcute pe frontiera sa, S^2. Se divide ecuatorul S^1 în părți egale prin vîrfurile $a^0, a^1, \ldots, a^{p-1}$ și se unesc acestea cu polii, $a = (0, 0, 1)$, $b = (0, 0, -1)$, obținîndu-se o împărțire a sferei S^2 în $2p$ triunghiuri (vezi fig. 27). Se identifică apoi triunghiul $aa^r a^{r+1}$ cu $ba^{r+q}a^{r+q+1}$, a cu b, a^r cu a^{r+q} și a^r cu a^{r+q+1} $(r, r + q$ etc. sînt interpretate ca elemente din $\mathbb{Z}_p)$:

d) $L^3(p, q)$ este homeomorf cu $L^3(p, q')$ dacă $q = -q'$, sau $q \equiv q' \bmod p$, au $qq' \equiv 1 \bmod p$.

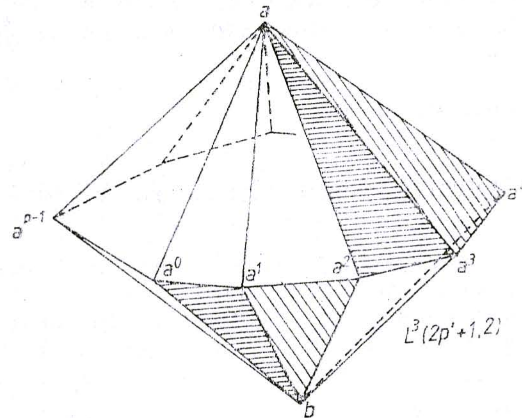


Fig. 27

6. Fie $V_k(\mathbb{R}^n)$ varietatea Stiefel a k-reperelor ortonormate din $\mathbb{R}^n$ (vezi exerc. 10 § 9) în care considerăm următoarea relație de echivalență: $(v_1, \ldots, v_k) \sim (v'_1, \ldots, v'_k)$ dacă cele două sisteme de vectori generează același subspațiu al lui $\mathbb{R}^n$. Spațiul cît obținut se notează $G_k(\mathbb{R}^n)$ și se numește *varietate Grassmann*. Să se arate că:

a) Elementele lui $G_k(\mathbb{R}^n)$ se identifică cu subspațiile k-dimensionale ale lui $\mathbb{R}^n$. În particular, $G_1(\mathbb{R}^n)$ este homeomorf cu $P\mathbb{R}^{n-1}$;

b) $V_k(\mathbb{R}^n)$ este un spațiu topologic Hausdorff, compact.

7. Să se arate că spațiul $I^n/\partial I^n$ este homeomorf cu sfera S^n, $n \geqslant 1$.

Soluție. Fie $J = [-1, 1]$. Există atunci homeomorfismul $l : I^n \to J^n$, $l(t) = 2t - 1$, $t \in I^n$. Definim $\rho : J^n \to D^n$, prin

$$\rho(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \\ \lambda x, & x \neq 0 \end{cases}, \quad \lambda = \frac{\max |x_i|}{\|x\|} \quad \text{pentru } x = (x_1, \ldots, x_n) \in J^n.$$

Aplicația ρ este continuă deoarece $\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant \lambda \leqslant 1$ și deci $x_k \to 0$ implică $\lambda_k x_k \to 0$. Definim $\tau : D^n \to J^n$, prin $\tau(y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ \mu y, & y \neq 0 \end{cases}$, $\mu = \frac{\|y\|}{\max|y_i|}$.

Avem $1 \leqslant \mu \leqslant \sqrt{n}$ și rezultă τ continuă. În plus, $\tau\rho = 1$, $\rho\tau = 1$. Compunem ρ cu l și obținem un homeomorfism $\varphi : I^n \to D^n$ (vezi și exerc. 6 § 6). Prin acesta, dacă $t \in \partial I^n$, adică $t = (t_1, \ldots, t_n)$ încît $\exists\, i$, cu $t_i = 0$ sau $t_i = 1 \Rightarrow \varphi(t) \in S^{n-1}$. Mai mult, $\varphi/\partial I^n : \partial I^n \to S^{n-1}$ este homeomorfism. Se poate aplica acum. Prop. 7.

8. Se consideră următorul subspațiu X_2 al spațiului $P\mathbb{C}^2$: $X_2 = \{[z_1, z_2, z_3] \in P\mathbb{C}^2 | z_1^2 + z_2^2 + z_3^2 = 0\}$. Să se arate că X_2 este homeomorf cu sfera S^2.

9. În exercițiul 6 se înlocuiește relația „$\sim$" prin relația $(v_1, \ldots, v_k) \approx (v'_1, \ldots, v'_k) \Leftrightarrow (v_1, \ldots, v_k) \sim (v'_1, \ldots v'_k)$ și cele două repere sînt la fel orientate. Spațiul cît obținut îl vom nota $G_k^0(\mathbb{R}^n)$ și este numit *varietatea Grassmann a k-subspațiilor orientate din* $\mathbb{R}^n$. Să se arate că $G_2^0(\mathbb{R}^3)$ este homeomorf cu S^2.

10. Fie $X_n = \{[z_1, \ldots, z_{n+1}] \in P\mathbb{C}^n | z_1^2 + \ldots + z_{n+1}^2 = 0\}$. Să se arate că X_n este homeomorf cu $G_2^0(\mathbb{R}^{n+1})$.

§ 12. Retracte. Spații AR, ANR, AE și ANE

DEFINIȚIA 1. Fie X un spațiu topologic și A un subspațiu al lui X. O aplicație continuă, $r : X \to A$, este numită *retracție* dacă incluziunea $i : A \hookrightarrow X$ este o secțiune (deasupra lui A) pentru r, deci dacă $ri = 1_A$. Spunem că A este o *retractă a lui* X.

TEOREMA 1. *Dacă $B \subseteq A \subseteq X$ și dacă B este o retractă a lui X, atunci B este retractă și a lui A.*

Demonstrație. Fie retracția $r : X \to B$. Atunci, $r/A : A \to B$ este de asemenea o retracție.

EXEMPLE. 1. Fiecare punct al unui spațiu topologic X este retractă a acestuia.

2. Orice subspațiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$ este retractă a lui $\mathbb{R}^n$. În adevăr, dacă $\mathbb{R}^m$ este subspațiu liniar al lui $\mathbb{R}^n$, $m \leqslant n$,

putem scrie $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^m \oplus \mathbb{R}^{n-m}$ și deci $\forall x \in \mathbb{R}^n$, avem $x = x' + x''$, $x' \in \mathbb{R}^m$, $x'' \in \mathbb{R}^{n-m}$. Putem defini $r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ prin $r(x) = x'$ și aceasta este o retracție.

3. Dacă X și Y sînt două spații topologice și $Z = X \times Y$, atunci, pentru $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, fixate, fiecare din subspațiile $A = X \times \{y_0\}$, $B = \{x_0\} \times Y$ este retractă a lui Z. În adevăr, putem defini $r : Z \to A$, prin $r(x, y) = (x, y_0)$; $r' : Z \to B$, $r'(x, y) = (x_0, y)$.

4. S^0 nu este retractă a lui D^1. În adevăr, dacă $r : D^1 \to S^0$ este o aplicație continuă, deoarece D^1 este spațiu conex, rezultă că r este constantă. Avem, de exemplu, $r(D^1) = \{-1\}$. Dar atunci $ri(\{1\}) = \{-1\} \neq \{1\}$.

5. S^n este o retractă pentru $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. În adevăr, există retracția $r : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$.

6. Fie $X = I^2$ și A spațiul „puricele și pieptenele", din Obs. 6 § 7. Atunci, A nu este retractă a lui X, deoarece A nu este spațiu liniar conex; or, o retracție $r : X \to A$ fiind surjecție și I^2 spațiu liniar conex, se contrazice Teorema 12 § 7.

TEOREMA 2. *O retracție $r : X \to A$ este o aplicație de identificare.*

Demonstrație. Dacă $D \subseteq A$ este o deschisă, din continuitatea lui r rezultă că $r^{-1}(D)$ este deschisă în X. Reciproc, dacă $r^{-1}(D) = D'$ este deschisă în X, atunci $i^{-1}(D') = i^{-1}r^{-1}(D)$ este deschisă în A. Dar $i^{-1}(D') = (r \circ i)^{-1}(D) = D$ și deci D este deschisă în A.

TEOREMA 3. *Dacă A este o retractă a unui spațiu Hausdorff X, atunci A este o submulțime închisă a lui X.*

Demonstrație. Fie $x \notin A$. Deoarece X este spațiu Hausdorff și $r : X \to A$ este continuă, punctele x și $r(x)$ (avem $r(x) \neq x$) au respectiv vecinătăți U și V care nu se intersectează și putem presupune că $r(U) \subset V$. Rezultă că $\forall y \in U$, $r(y) \in V$, adică $r(y) \notin U$, deci $r(y) \neq y$, care arată că $U \cap A = \emptyset$. Prin urmare, $x \notin \bar{A}$. Am obținut deci $A = \bar{A}$.

TEOREMA 4. *Un subspațiu A este retractă a spațiului X dacă și numai dacă orice funcție $f : A \to Y$, cu Y un spațiu arbitrar, se poate prelungi la o aplicație continuă $\bar{f} : X \to Y$.*

Demonstrație. Dacă există retracția $r : X \to A$, definim $\bar{f} = f \circ r$. Reciproc, luînd $f = 1_A : A \to A$, atunci $r = \bar{f}$ este o retracție.

DEFINIȚIA 2. Fie X un spațiu topologic și $A \subset X$. Se spune că A este *retractă de vecinătate* a lui X dacă A este retractă a unei vecinătăți V a lui A în X.

COROLAR 1. *Dacă A este retractă a lui X, atunci A este retractă de vecinătate a lui X.*

EXEMPLUL 7. S^n este retractă de vecinătate a celulei D^{n+1}, deoarece este retractă a lui $D^{n+1} \setminus \{0\}$, care este o vecinătate a lui S^n în D^{n+1}, prin retracția $r : D^{n+1} \setminus \{0\} \to S^n$, $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$. (Vom vedea că S^n nu este retractă a lui D^{n+1}; pentru $n = 0$, vezi exemplul 4.)

Fie $\mathscr{M}$ clasa spațiilor metrice.

DEFINIȚIA 3. a) Un spațiu topologic Y se numește *retractă absolută (pentru clasa spațiilor metrice)* și vom scrie $Y \in \mathrm{AR}(\mathscr{M})$ (sau $Y \in \mathrm{AR}$) dacă:

i) $Y \in \mathscr{M}$;

ii) Dacă Y este homeomorf cu Y' și Y' este o submulțime închisă a unui $X \in \mathscr{M}$, atunci Y' este retractă a lui X.

b) Dacă în ii) Y' este retractă de vecinătate a lui X, se spune că Y este *retractă absolută de vecinătate (pentru clasa spațiilor metrice)* și vom scrie $Y \in \mathrm{ANR}(\mathscr{M})$ (sau $Y \in \mathrm{ANR}$)*).

Precizăm că în definițiile de mai sus, clasa $\mathscr{M}$ se poate înlocui, de exemplu, cu clasa spațiilor normale.

OBSERVAȚIA 1. Dacă $Y \in \mathrm{AR} \Rightarrow Y \in \mathrm{ANR}$.

DEFINIȚIA 4. a) Fie (X, A) o pereche formată dintr-un spațiu topologic X și o submulțime închisă a lui X. Un spațiu topologic Y se numește un *extensor pentru perechea* (X, A), dacă orice aplicație continuă $f : A \to Y$ admite o extensie continuă $\tilde{f} : X \to Y$.

b) Y este un *extensor de vecinătate pentru* (X, A) dacă f se poate extinde la o vecinătate U a lui A în X.

c) Spațiul Y este numit un *extensor absolut (pentru clasa spațiilor metrice)* dacă Y este un extensor pentru orice pereche (X, A), cu $X \in \mathscr{M}$ și A închisă în X. Vom scrie $Y \in \mathrm{AE}(\mathscr{M})$ (sau $Y \in \mathrm{AE}$);

d) Y este un *extensor absolut de vecinătate (pentru clasa spațiilor metrice)* dacă Y este un extensor de vecinătate pentru (X, A), cu $X \in \mathscr{M}$ și A închisă în X. Vom scrie $Y \in \mathrm{ANE}(\mathscr{M})$ (sau $Y \in \mathrm{ANE}$)*).

---

*) În l. engleză, *absolute neighborhood retract.*

TEOREMA 5 (teorema de extensie a lui Dugundji). *Fiecare submulțime convexă a unui spațiu vectorial normat L este un spațiu* AE.

Pentru demonstrația acestei importante teoreme vom stabili mai întîi următoarea lemă.

LEMA 1. *Fie (X, d) un spațiu metric și $A \subseteq X$ o submulțime închisă. Există o acoperire deschisă local finită, $\mathscr{D} = \{D_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, a lui $X \setminus A$, încît pentru orice $a \in A$ și orice vecinătate V a lui a în X există o vecinătate W a lui a în X cu proprietatea că $D_\lambda \cap W \neq \emptyset$ implică $D_\lambda \subseteq V$.*

Demonstrație. Presupunînd $A \neq \emptyset$, pentru $x \in X \setminus A$ fie $V_x = D(x, \varepsilon_x) \cap (X \setminus A)$, unde $\varepsilon_x = \frac{1}{2} d(x, A) > 0$. Deoarece $X \setminus A$ este spațiu metric, există o acoperire deschisă $\mathscr{D} = \{D_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$, local finită, a lui $X \setminus A$, mai fină decît $\{V_x \mid x \in X \setminus A\}$, adică $\forall D_\lambda \in \mathscr{D}$, $\exists V_x$, încît $D_\lambda \subseteq V_x$ **). Fie $a \in A$ și $V \in \mathscr{V}(a)$ în X și $\varepsilon > 0$, suficient de mic, încît $\mathring{D}(x, \varepsilon_x) \subseteq V$. Se definește atunci $W = \mathring{D}\left(a, \frac{1}{3} \varepsilon\right)$. Să arătăm că $W \cap D_\lambda \neq \emptyset$ implică $D_\lambda \subseteq V$. În adevăr, dacă $z \in W \cap D_\lambda$ și $D_\lambda \subseteq V_x$, pentru $x \in X \setminus A$, atunci $\forall y \in D_\lambda$, avem $d(a, y) \leqslant d(a, z) + d(z, x) + d(x, y) < \frac{1}{3} \varepsilon + 2\varepsilon_x$. Însă $2\varepsilon_x = d(x, A) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, z) + d(z, a) < \varepsilon_x + \frac{1}{3} \varepsilon$, încît $\varepsilon_x < \frac{1}{3} \varepsilon$. Deducem $d(a, y) < \frac{2}{3} \varepsilon < \varepsilon \Rightarrow y \in V$.

Demonstrația Teoremei 5. Considerăm un spațiu metric X, o submulțime închisă $A \subseteq X$ și o aplicație $f : A \to K \subseteq L$. Fie $\mathscr{D} = \{D_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ o acoperire deschisă, local finită, a lui $X \setminus A$ ca în Lema 1. Alegem o partiție a unității subordonată lui $\mathscr{D}$ (vezi exerc. 10 § 9) $\{\Phi_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Pentru $\lambda \in \Lambda$, alegem un punct $x_\lambda \in D_\lambda$ și un punct $a_\lambda \in A$, încît $d(x_\lambda, a_\lambda) <$

---

*) Este valabilă precizarea de la Def. 3.

) Un spațiu metric este paracompact, *teorema Dieudonné-Stone*, vezi Math. Pures Appl. **23 (1944), 65–76; Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948), 977–982.

$< 2d(x_\lambda, A)$. Definim atunci $g : X \to K$ prin

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A, \\ \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda(x) f(a_\lambda), & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Deoarece $\mathscr{D}$ este local finită, pentru orice punct $x \in X \setminus A$ suma de mai sus este finită. În consecinţă, g este bine definită şi continuă pe $X \setminus A$. Fie $a_0 \in A$ şi U o vecinătate convexă a lui $g(a_0) = f(a_0)$ în K. Fie $\varepsilon > 0$, încît $d(a, a_0) < 3\varepsilon$ să implice $f(a) \in U$, $a \in A$. Fie $V = \{x \in X \mid d(x, a_0) < \varepsilon\}$ şi W alese ca în Lema 1. Vom arăta că pentru $x \in W \setminus A$ şi $\Phi_\lambda(x) \neq \neq 0$ avem $f(a_\lambda) \in U$ şi de aceea, din convexitatea lui U, va rezulta că $x \in W \setminus A$ atrage $g(x) = \sum\limits_{\lambda \in \Lambda} \Phi_\lambda(x) f(a_\lambda) \in U$. Or, dacă $x \in W \setminus A$ şi $\Phi_\lambda(x) \neq 0$, avem $x \in D_\lambda \cap W \neq \emptyset$ şi deci $x_\lambda \in D_\lambda \subseteq V$. Prin urmare, $d(a_0, a_\lambda) \leqslant d(a_0, x_\lambda) + d(x_\lambda, a_\lambda) \leqslant \leqslant d(a_0, x_\lambda) + 2d(x_\lambda, A) \leqslant 3d(a_0, x_\lambda) < 3\varepsilon$. Din modul cum a fost ales ε, deducem $f(a_\lambda) \in U$.

TEOREMA 6 (teorema de scufundare Kuratowski-Wojdyslawski). *Pentru fiecare spaţiu metric Y, există un spaţiu vectorial normat (şi complet) L şi o scufundare $h : Y \to L$, încît $h(Y)$ este o submulţime închisă a* **înfăşurătoarei convexe** *) *K a lui $h(Y)$.*

Demonstraţie. Putem presupune că metrica d pe Y este mărginită (în caz contrar, putem înlocui d cu d', definită prin $d'(y_1, y_2) = \dfrac{d(y_1, y_2)}{1 + d(y_1, y_2)}$, $y_1, y_2 \in Y$). Vom lua $L = \{f : Y \to Y \mid f$ mărginită$\}$. Introducem norma $\|f\| = \sup\{|f(y)| \mid y \in Y\}$. Pentru $y \in Y$, considerăm aplicaţia mărginită $f_y : Y \to \mathbb{R}$, definită prin $f_y(x) = d(x, y)$. Fie $h : Y \to \to L$ dată de $h(y) = f_y$. Avem atunci $\|h(y_1) - h(y_2)\| = \sup\{|d(y, y_1) - d(y, y_2)| \mid y \in Y\} \leqslant d(y_1, y_2)$. Dar, pentru $y = = y_2$, rezultă $|d(y, y_1) - d(y, y_2)| = d(y_1, y_2)$, încît $\|h(y_1) - - h(y_2)\| \geqslant d(y_1, y_2)$. Prin urmare, $\|h(y_1) - h(y_2)\| = d(y_1, y_2)$, care arată că h este o *scufundare* **izometrică** şi deci o scufundare topologică.

Fie acum K înfăşurătoarea convexă a lui $h(Y)$ în L. Să arătăm că avem $K \setminus h(Y)$ deschisă în K. Fie $g \in K \setminus h(Y)$.

*) Intersecţia tuturor submulţimilor convexe ce conţin $h(Y)$.

Există atunci nişte puncte $y_0, y_1, \ldots, y_n \in Y$ şi $\lambda_0, \ldots, \lambda_n \geqslant \geqslant 0$, cu $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i = 1$, încît $g = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i h(y_i)$**). Întrucît $g \neq h(y_0), \ldots \ldots, h(y_n)$, există $\delta > 0$, încît $2\delta < \|g - h(y_i)\|$, $i = 0, 1, \ldots \ldots, n$. Fie $V = \mathring{D}(g, \delta)$ în K. Este suficient să arătăm că $V \subseteq K \setminus h(Y)$. Or, dacă $f \in V$, adică $\|f - g\| < \delta$, atunci, $\|f - h(y_i)\| \geqslant \delta$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Dacă există $y \in Y$, încît $f = h(y)$, avem $f(y) = h(y)(y) = d(y, y) = 0$ şi $d(y, y_i) = = \|h(y) - h(y_i)\| = \|f - h(y_i)\| \geqslant \delta$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Obţinem astfel $g(y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i h(y_i)(y) = \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i d(y, y_i) \geqslant \delta$ şi prin urmare $\|f - g\| \geqslant \|f(y) - g(y)\| = g(y) \geqslant \delta$, care contrazice faptul că $f \in V$. Avem deci $f \neq h(y)$, $\forall y \in Y$, adică $f \in K \setminus h(Y)$.

TEOREMA 7. *Fiecare spaţiu* AR(ANR) *este un spaţiu* AE(ANE). *În consecinţă :*

i) $Y \in \mathrm{AR} \Leftrightarrow Y \in \mathscr{M}$ *şi* $Y \in \mathrm{AE}$;

ii) $Y \in \mathrm{ANR} \Leftrightarrow Y \in \mathscr{M}$ *şi* $Y \in \mathrm{ANE}$.

Demonstraţie. Fie $Y \in \mathrm{AR}$, X un spaţiu metric, A o submulţime închisă a lui X şi $f : A \to X$ o aplicaţie continuă. După Teorema 6, putem presupune că Y este o submulţime închisă a unei mulţimi convexe K dintr-un spaţiu vectorial normat L. Deoarece $Y \in \mathrm{AR}$, există o retracţie $r : K \to \to Y$. După Teorema 5, $K \in \mathrm{AE}$ şi deci există $f' : X \to K$ extinzind f. Este clar acum că $\tilde{f} = rf' : X \to Y$ este o extensie a lui f.

Demonstraţia implicaţiei $Y \in \mathrm{ANR} \Rightarrow Y \in \mathrm{ANE}$ este similară. Completarea echivalenţelor i) şi ii) rezultă din Teorema 4 şi din analoaga acesteia pentru retracte de vecinătate.

Aplicînd Teoremele 5 şi 7 avem următorul exemplu.

EXEMPLUL 8. I^n, $\mathbb{R}^n$, $\mathring{D}^n$, D^n sînt spaţii metrice AE şi deci şi ANE, AR şi ANR.

TEOREMA 8. *Produsul topologic al unei mulţimi finite de spaţii* AE (ANE) *este un spaţiu* AE (ANE).

Demonstraţie. Fie $(X_i)_{i \in I}$ o mulţime dată de spaţii AE (ANE) şi $X = \prod\limits_{i \in I} X_i$. Dacă (Y, A) este o pereche, cu $Y \in \mathscr{M}$,

*) Pentru mai multe proprietăţi ale înfăşurătoarei convexe vezi [4].

A închisă în Y, iar $f : A \to X$ o aplicație continuă, atunci aplicațiile $\pi_i \circ f : A \to X_i$, pentru $\pi_i : X \to X_i$ proiecțiile canonice, sînt continue. Datorită ipotezei, există $\tilde{f}_i : Y \to X_i$ care extinde aplicația $\pi_i \circ f$, $\forall i \in I$. Definim atunci $\tilde{f} : Y \to X$, $\tilde{f}(y) = \tilde{f}_i(y))$, $i \in I$, care este continuă, deoarece $\pi_i \circ \tilde{f} = \tilde{f}_i$ sînt continue. Este clar de asemenea că $\tilde{f}$ extinde pe f. Dacă I este finită și V_i sînt vecinătăți ale lui A în Y iar $\tilde{f}_i : V_i \to X_i$ sînt extensii continue pentru $\pi_i \circ f$, atunci $\tilde{f} : \bigcap_{i \in I} V_i \to X$, $\tilde{f}(y) = (\tilde{f}_i(y))_{i \in I}$, este definită pe o vecinătate a lui A în Y, este continuă și extinde pe f.

COROLAR 2. *Pentru o mulțime I, fie X_i spații* AR(ANR), $i \in I$. *Dacă produsul topologic $X = \prod_{i \in I} X_i$ este un spațiu metric (în particular, dacă I este finită), atunci X este* AR(ANR).

Demonstrație. Se aplică Teoremele 7 și 8 și exerc. 9 § 6.

EXEMPLUL 9. Cubul lui Hilbert este un spațiu AE și deci ANE, AR și ANR (vezi exerc. 3 § 4 și 8 § 6).

COROLAR 3. *Sfera S^n, $n \geq 0$, este un spațiu metric* ANE, *deci și* ANR.

Demonstrație. Fie (X, A) o pereche topologică, cu $X \in \mathcal{M}$ și A închisă în X. Fie $f : A \to S^n$ o aplicație continuă. Putem considera atunci $f : A \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ și deoarece $\mathbb{R}^{n+1}$ este spațiu AR, rezultă că există o extensie continuă $\bar{f} : X \to \mathbb{R}^{n+1}$ a lui f. Deoarece $\bar{f}|A = f$, rezultă că $\bar{f}^{-1}(0) \cap A = \emptyset$ și, cum X este spațiu normal, există o vecinătate V a lui A care nu intersectează pe $\bar{f}^{-1}(0)$. Fie atunci $\bar{f}|V : V \to \mathbb{R}^{n+1}$. Deoarece $\bar{f}(x) \neq 0$, $\forall x \in V$, putem defini $\tilde{f} : V \to S^n$, prin $\tilde{f}(x) = \dfrac{\bar{f}(x)}{\|\bar{f}(x)\|}$. Aceasta este o aplicație continuă și dacă $a \in A$, atunci $\bar{f}(a) = f(a) \in S^n$, deci $\|\bar{f}(a)\| = 1 \Rightarrow \tilde{f}(a) = \bar{f}(a) = f(a)$.

TEOREMA 9. *Fie $Y \in \mathcal{M}$, $Y = Y_1 \cup Y_2$, cu Y_1, Y_2 închise în Y și $Y_0 = Y_1 \cap Y_2$. Atunci:*

i) $Y_0, Y_1, Y_2 \in$ AR $\Rightarrow Y \in$ AR;

ii) $Y_0, Y_1, Y_2 \in$ ANR $\Rightarrow Y \in$ ANR;

iii) $Y, Y_0 \in$ AR $\Rightarrow Y_1, Y_2 \in$ AR;

iv) $Y, Y_0 \in$ ANR $\Rightarrow Y_1, Y_2 \in$ ANR.

Demonstrație. i) Fie Y submulțime închisă a unui spațiu metric X. Să arătăm că Y este retractă a lui X. Notăm:

$$X_0 = \{x \in X \mid d(x, Y_1) = d(x, Y_2)\};$$

$$X_1 = \{x \in X \mid d(x, Y_1) < d(x, Y_2)\};$$

$$X_2 = \{x \in X \mid d(x, Y_1) > d(x, Y_2)\}.$$

Avem $X = X_0 \cup X_1 \cup X_2$, $Y_0 \subset X_0$ este închisă și $Y_i \cap X_0 = Y_0$, $i = 1, 2$; există deci retracția $r_0 : X_0 \to Y_0$. Apoi, mulțimea $Y_i \cup X_0$ este închisă în $X_i \cup X_0$, $i = 1, 2$. După Teorema 7, aplicația $r_i : Y_i \cup X_0 \to Y_i$, definită prin

$$r_i(y) = \begin{cases} y, & y \in Y_i, \\ r_0(y), & y \in X_0, \end{cases}$$

are o extensie continuă $f_i : X_i \cup X_0 \to Y_i$, $i = 1, 2$. Pentru a obține retracția $r : X \to Y$, este suficient să punem $r(x) = f_i(x)$, pentru $x \in X_i \cup X_0$, $i = 1, 2$.

ii) Trebuie să arătăm că dacă Y este închisă într-un spațiu metric X, atunci există în X o vecinătate U a lui Y, pentru care Y este retractă. Considerăm mulțimile X_0, X_1, X_2 introduse la i). Atunci, Y_0 este închisă în X_0 și deci există o vecinătate W_0 a lui Y_0 în X_0 și o retracție $r_0 : W_0 \to Y_0$. Punînd $r_i(z) = \begin{cases} r_0(z), & z \in W_0 \\ z, & z \in Y_i \end{cases}$, obținem o retracție r_i a mulțimii $Y_i \cup W_0$ (închisă în $X_0 \cup X_i$) în mulțimea Y_i, $i = 1, 2$. Cum $Y_i \in$ ANR, rezultă din Teorema 7 că există $r'_i : V_i \to Y_i$, o extensie a lui r_i la o vecinătate V_i a mulțimii $Y_i \cup W_0$ în $X_0 \cup X_i$. În V_i există o vecinătate închisă U_i a mulțimii Y_i în spațiul $X_0 \cup X_i$, încît $U_i \cap X_0 \subset W_0$. Deoarece $U_1 \cap U_2 \subset U_1 \cap (X_0 \cup X_1) \cap (X_0 \cup X_2) = U_1 \cap X_0 \subset W_0$, formula $r(z) = r'_i(z)$, pentru $z \in U_i$, $i = 1, 2$, definește o retracție r a mulțimii $U = U_1 \cup U_2$ (care este o vecinătate a lui Y în X) pe mulțimea Y.

iii) Din condiția $Y_0 \in$ AR, rezultă că există retracțiile $r_i : Y_i \to Y_0$, $i = 1, 2$. Definim

$$r(y) = \begin{cases} y, & y \in Y_1, \\ r_2(y), & y \in Y_2, \end{cases}$$

și obținem o retracție $r : Y \to Y_1$. Deoarece $Y \in \mathrm{AR}$, rezultă din Teorema 1 că $Y_1 \in \mathrm{AR}$. Se arată în mod analog că $Y_2 \in \mathrm{AR}$.

iv) Condiția $Y_0 \in \mathrm{ANR}$ implică existența unei vecinătăți U_0 a mulțimii Y_0 în spațiul Y, încît există retracțiile $r_i : Y_i \cap U_0 \to Y_0$. Definim

$$r(y) = \begin{cases} y, & y \in Y_1, \\ r_2(y), & y \in Y_2 \cap U_0, \end{cases}$$

și obținem o retracție $r : U_0 \cup Y_1 \to Y_1$. Cum $U_0 \cup Y_1$ este o vecinătate a lui Y_1 în spațiul Y și deoarece $Y \in \mathrm{ANR}$, rezultă ușor (vezi exerc. 3) că $Y_1 \in \mathrm{ANR}$. În mod analog se arată că $Y_2 \in \mathrm{ANR}$.

EXERCIȚII

1. Să se arate că torul T^n este un spațiu ANE și ANR.

Indicație. Se utilizează Cor. 2 și 3.

2. Să se arate că cilindrul compact, sau necompact, al unui spațiu AE (ANE, AR, ANR) este un spațiu de același tip.

3. Să se arate că dacă Y_0 este o retractă de vecinătate a unui spațiu ANR, atunci Y_0 este ANR.

4. Să se arate că suma topologică a două spații AR(ANR) este un spațiu AR(ANR).

Indicație. Se aplică Teorema 9.

5. Să se arate că un buchet finit de cercuri este un ANR.

Indicație. Se aplică Cor. 3 și Teorema 9.

§13. Aplicații omotope și spații omotope

Fie X și Y două spații topologice. Vom nota prin $\mathrm{Top}(X, Y)$ mulțimea aplicațiilor continue $f : X \to Y$.

DEFINIȚIA 1. Două aplicații $f_0, f_1 \in \mathrm{Top}(X, Y)$ se numesc *(h)omotope* (se scrie $f_0 \simeq f_1$) dacă există o aplicație continuă, numită *(h)omotopie* a lui f_0 cu f_1, $F : X \times [0, 1] \to Y$, încît $F(x, 0) = f_0(x)$ și $F(x, 1) = f_1(x)$, $\forall x \in X$. Vom nota $F : f_0 \simeq f_1$.

Putem scrie $F_t : X \to Y$, $t \in I = [0, 1]$, cu $F_t(x) = F(x, t)$ și $F_0 = f_0$, $F_1 = f_1$.

EXEMPLE. 1. Fie $X = Y = \mathbb{R}^n$, $f_0(x) = x$, $f_1(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$. Definim $F : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, prin $F(x, t) = (1 - t)x$. Atunci $F : f_0 \simeq f_1$.

2. Fie X un spațiu topologic arbitrar și Y o submulțime convexă în $\mathbb{R}^n$, iar $f_0, f_1 \in \mathrm{Top}(X, Y)$, arbitrare. Aplicația $F : X \times I \to Y$, definită prin $F(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x)$, satisface $F : f_0 \simeq f_1$.

OBSERVAȚIA 1. Dacă $f_0 \simeq f_1$, aplicația ce realizează omotopia acestora nu este în general unică.

Pentru exemplul 1 de mai sus, dacă $x_0 \in \mathbb{R}^n$ este un punct oarecare, atunci $G : \mathbb{R}^n \times I \to \mathbb{R}^n$, definită prin

$$G(x, t) = \begin{cases} (1 - 2t)x + 2tx_0, & 0 \leqslant t \leqslant 1/2, \\ (2 - 2t)x_0, & 1/2 \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

este o aplicație continuă și avem $G : f_0 \simeq f_1$.

DEFINIȚIA 2. Fie $f_0, f_1 \in \mathrm{Top}(X, Y)$ și X' un subspațiu al lui X, încît $f_0|X' = f_1|X'$. Spunem că f_0 este *(h)omotopă cu f_1 relativ la X'* (se scrie $f_0 \simeq f_1$ rel X' dacă există o omotopie $F : X \times I \to Y$, a lui f_0 cu f_1, care satisface în plus condiția: $F(x', t) = f_0(x') = f_1(x')$, $\forall x' \in X'$, $\forall t \in I$. Vom nota $F : f_0 \simeq f_1$ rel X'.

Dacă $X' = \emptyset$, obținem Def. 1.

EXEMPLE. 3. $X = Y = \mathbb{R}^n$, $X' = \{0\}$, $f_0(x) = x$, $f_1(x) = 0$, $\forall x \in X$. Atunci, $F : f_0 \simeq f_1$ rel $\{0\}$ pentru $F(x, t) = (1 - t)x$. Omotopia G din Obs. 1 nu este omotopie rel $\{0\}$ între f_0 și f_1.

4. $X = Y = I$, $f_0(t) = t$, $f_1(t) = 0$, $\forall t \in I$. Atunci, $F : f_0 \simeq f_1$ rel $\{0\}$ pentru $F(t, t') = (1 - t')t$.

5. X un spațiu topologic arbitrar, Y o submulțime convexă din $\mathbb{R}^n$ și $X' \subseteq X$ o submulțime arbitrară, iar $f_0, f_1 \in \mathrm{Top}(X, Y)$, cu $f_0|X' = f_1|X'$. Atunci, $F : X \times I \to Y$, definită prin $F(x, t) = (1 - t)f_0(x) + tf_1(x)$, satisface $F : f_0 \simeq f_1$ rel X'.

Dacă $f \in \mathrm{Top}(X, Y)$, $A \subset X$ și $B \subset Y$, încît $f(A) \subseteq B$, vom scrie $f \in \mathrm{Top}((X, A), (Y, B))$.

DEFINIȚIA 3. Dacă $f_0, f_1 \in \mathrm{Top}((X, A), (Y, B))$ și $X' \subseteq X$, încît $f_0|X' = f_1|X'$, vom spune că f_0 este *(h)omotopă cu f_1 relativ la X'* dacă există o omotopie $F : X \times I \to Y$, relativă la X', între f_0 și f_1 și astfel că $F(A \times I) \subseteq B$. Vom mai scrie $F : (X \times I, A \times I) \to (Y, B)$ sau $F : (X, A) \times I \to (Y, B)$ și vom nota, ca și în Def. 2, $F : f_0 \simeq f_1$ rel X'.

EXEMPLUL 6. Fie $X = Y = D^2 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = re^{i\theta}, 0 \leqslant r \leqslant 1, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ și $A = B = S^1 = \{z \in \mathbb{C} \mid z = e^{i\theta}, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$. Fie $f_0, f_1 : (D^2, S^1) \to (D^2, S^1)$, $f_0 = Id_{D^2}$, f_1 *aplicația antipodală*, adică simetria față de origine ($f_1(re^{i\theta}) = re^{i(\theta+\pi)}$), iar $X' = \{0\}$. Atunci, $f_0 \simeq f_1$ rel X', prin omotopia $F(re^{i\theta}, t) = re^{i(\theta+t\pi)}$, $\forall re^{i\theta} \in D^2$, $\forall t \in I$. O altă omotopie este $F'(re^{i\theta}, t) = re^{i(\theta-t\pi)}$.

TEOREMA 1. *Dacă (X, A) este o pereche topologică și $X' \subseteq X$, atunci omotopia relativ la X' este o relație de echivalență în mulțimea* $\mathrm{Top}((X, A), (Y, B))$, *pentru orice pereche topologică (Y, B).*

Demonstrație. Fie $f, g, h \in \mathrm{Top}((X, A), (Y, B))$, cu $f|X' = g|X' = h|X'$. Avem

$$f \simeq f \text{ rel } X', \text{ prin } F(x, t) = f(x), \ \forall x \in X, \ \forall t \in I.$$

Dacă $G : f \simeq g$ rel X', atunci $G' : g \simeq f$ rel X', pentru $G'(x, t) = G(x, 1 - t)$. În sfîrșit, dacă $H : f \simeq g$ rel X', $K : g \simeq h$ rel X', atunci $L : f \simeq h$ rel X', unde

$$L(x, t) = \begin{cases} H(x, 2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ K(x, 2t - 1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

cum este sugerat în fig. 28.

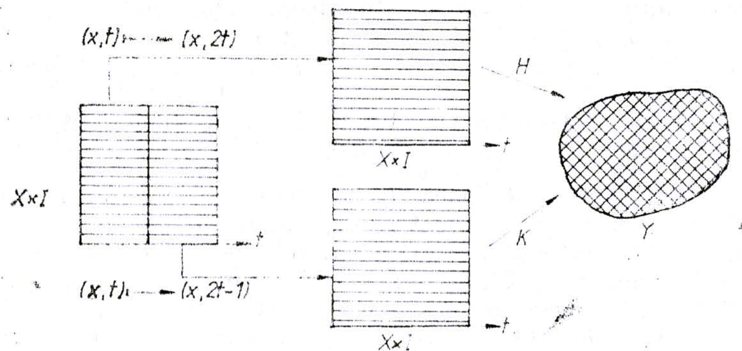


Fig. 28

Continuitatea aplicației L rezultă din lema de lipire (Teorema 2 § 3): $X \times I = X \times \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ și $\left(X \times \left[0, \frac{1}{2}\right]\right) \cap \left(X \times \left[\frac{1}{2}, 1\right]\right) = X \times \left\{\frac{1}{2}\right\}$, iar $H\left(x, 2 \cdot \frac{1}{2}\right) = H(x, 1) = g(x)$ și $K\left(x, 2 \cdot \frac{1}{2} - 1\right) = K(x, 0) = g(x)$. Restul condițiilor de omotopie relativă se verifică ușor.

TEOREMA 2. *Fie $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$, cu $f_0 \simeq f_1$ rel X' și $g_0, g_1 : (Y, B) \to (Z, C)$, cu $g_0 \simeq g_1$ rel Y', încît $f_0(X') = f_1(X') \subseteq Y'$. Atunci, $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$ rel X'.*

Demonstrație. Fie $F : (X, A) \times I \to (Y, B)$, încît $F : f_0 \simeq f_1$ rel X' și $G : (Y, B) \times I \to (Z, C)$, cu $g_0 \simeq g_1$ rel Y'. Avem $g_0 f_0 \simeq g_0 f_1$ rel X', prin omotopia $(X, A) \times I \xrightarrow{F} (Y, B) \xrightarrow{g_0} (Z, C)$. Apoi, $g_0 f_1 \simeq g_1 f_1$ rel X', prin omotopia $(X, A) \times I \xrightarrow{f_1 \times 1_I} (Y, B) \times I \xrightarrow{G} (Z, C)$. Aplicînd Teorema 1, obținem $g_0 f_0 \simeq g_1 f_1$ rel X'.

NOTAȚIA 1. Mulțimea claselor de omotopie ale aplicațiilor $(X, A) \to (Y, B)$, relativ la X', se notează $[(X, A), (Y, B)]_{X'}$. Dacă $X' = \emptyset$, acesta nu se mai scrie. Clasa de echivalență omotopică a unei aplicații f se notează $[f]$.

DEFINIȚIA 4. O aplicație continuă de perechi, $f : (X, A) \to (Y, B)$, se numește *echivalență omotopică*, și cele două *perechi* se numesc *echivalente omotopic* dacă există $g : (Y, B) \to (X, A)$, încît $gf \simeq 1_{(X,A)}$, $fg \simeq 1_{(Y,B)}$ (omotopiile fiind relativ la mulțimea vidă). Dacă $A = \emptyset$, $B = \emptyset$, spunem că spațiile topologice X și Y sînt *echivalente omotopic* sau că acestea au *același tip de omotopie*.

COROLAR 1. *Omotopia perechilor de spații topologice (în particular a spațiilor topologice) este o relație de echivalență.*

OBSERVAȚIA 2. Două spații topologice homeomorfe sînt echivalente omotopic. Reciproc nu este adevărat, cum se va vedea în numeroase exemple.

DEFINIȚIA 5. Un spațiu topologic X se numește *contractibil* dacă aplicația identică 1_X este omotopă cu o aplicație constantă $X \to \{x_0\}$. O omotopie dintre aceste două aplicații se numește *contracția lui X în x_0*.

EXEMPLUL 6. Orice mulțime convexă din $\mathbb{R}^n$ este un spațiu contractibil (vezi exemplul 2).

LEMA 1. *Oricare două aplicații continue într-un spațiu contractibil sînt omotope.*

Demonstrație. Fie Y un spațiu contractibil și fie $1_Y \simeq e_{y_0}$, unde e_{y_0} este aplicația constantă $Y \to \{y_0\}$. Fie $f_0, f_1 : X \to Y$ două aplicații continue arbitrare. Avem $1_Y f_0 \simeq e_{y_0} f_0$, deci $f_0 \simeq e_{y_0} f_0$ și, în mod analog, $f_1 \simeq e_{y_0} f_1$. Dar $(e_{y_0} f_0)(x) = y_0$, deci $e_{y_0} f_0 = e_{y_0} f_1 = e_{y_0}$. Rezultă că $f_0 \simeq f_1 \simeq c_{y_0}$, unde c_{y_0} este aplicația constantă $X \to \{y_0\}$.

COROLAR 2. *Dacă Y este un spațiu contractibil, atunci două aplicații constante ale lui Y în el însuși sînt omotope și aplicația identică 1_Y este omotopă cu orice aplicație constantă.*

COROLAR 3. *Orice spațiu contractibil este liniar conex.*

Demonstrație. Fie $y_1, y_2 \in Y$ și $F : Y \times I \to Y$, cu $F(y, 0) = y_1$, $F(y, 1) = y_2$, $\forall y \in Y$. Atunci, pentru y_0 fixat, aplicația $\alpha : I \to Y$, $\alpha(t) = F(y_0, t)$, este un drum în Y, ce unește y_1 cu y_2.

TEOREMA 3. *Un spațiu topologic este contractibil dacă și numai dacă are același tip omotopic cu un spațiu format dintr-un singur punct.*

Demonstrație. Fie X contractibil și $F : X \times I \to X$ o contracție a sa în $x_0 \in X$. Fie $P = \{x_0\}$ și $f : X \to P$, $j : P \hookrightarrow X$ aplicațiile evidente. Atunci, $f \circ j = 1_P$ și $F : 1_X \simeq j \circ f$. Prin urmare, f este o echivalență omotopică.

Reciproc, dacă X are același tip omotopic cu un spațiu P, constînd dintr-un singur punct, fie $f : X \to P$ echivalență omotopică, cu inversa $g : P \to X$. Avem $1_X \simeq gf = $ const, deci X este contractibil.

COROLAR 4. *Oricare două spații contractibile au același tip omotopic și orice aplicație continuă între două asemenea spații este o echivalență omotopică.*

TEOREMA 4. *Dacă $f_0 \simeq f_1 : X \to Y$, atunci aplicațiile $(f_0)_*, (f_1)_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ coincid* (vezi § 7, după Def. 8).

Demonstrație. Fie $x \in X$. Atunci, $(f_0)_*(L_x) = L_{f_0(x)}$ și $(f_1)_*(L_x) = L_{f_1(x)}$. Pentru a arăta că $L_{f_0(x)} = L_{f_1(x)}$, este suficient să arătăm că $f_0(x)$ și $f_1(x)$ pot fi unite cu un drum in Y. Fie $F : f_0 \simeq f_1$. Atunci, $\alpha : I \to Y$, $\alpha(t) = F(x, t)$, satisface $\alpha(0) = f_0(x)$ și $\alpha(1) = f_1(x)$.

COROLAR 5. *Dacă $f : X \to Y$ este o echivalență omotopică, atunci $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ este o bijecție. În particular, un spațiu echivalent omotopic cu un spațiu liniar conex este el însuși liniar conex.*

Demonstrație. Fie $g : Y \to X$ o invers omotopică cu f. Avem $gf \simeq 1_X$, $fg \simeq 1_Y \Rightarrow (gf)_* = (1_X)_* = 1_{\pi_0(X)}$ și $(fg)_* = (1_Y)_* = 1_{\pi_0(Y)} \Rightarrow g_* f_* = 1_{\pi_0(X)}$, $f_* g_* = 1_{\pi_0(Y)}$, și prin urmare f_* este bijecție.

TEOREMA 5. *Fie $z_0 \in S^n$ și $f : S^n \to Y$ o aplicație continuă. Atunci, următoarele condiții sînt echivalente:*

i) *f este* **nul omotopă** (*adică omotopă cu o aplicație constantă*);

ii) *f are o extensie continuă la celula D^{n+1}*;

iii) *f este nul omotopă relativ la $\{z_0\}$.*

Demonstrație. i) $\Rightarrow$ ii) Fie $F : f \simeq e_{y_0}$ pentru $y_0 \in Y$, deci $F : S^n \times I \to Y$, $F(z, 0) = f(z)$, $F(z, 1) = y_0$, $z \in S^n$. Definim $f' : D^{n+1} \to Y$ prin

$$f'(x) = \begin{cases} y_0, & 0 \leqslant \|x\| \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ F\left(\dfrac{x}{\|x\|}, 2 - 2\|x\|\right), & \dfrac{1}{2} \leqslant \|x\| \leqslant 1. \end{cases}$$

Deoarece $F(z, 1) = y_0$, $\forall z \in S^n$, rezultă că f' este bine definită și apoi, utilizînd lema de lipire (Teorema 2 § 3), se deduce imediat că este și continuă. Întrucît $F(z, 0) = f(z)$, $\forall z \in S^n$, rezultă $f' \mid S^n = f$.

ii) $\Rightarrow$ iii) Fie $f' : D^{n+1} \to Y$ o extensie a lui f. Definim $F : S^n \times I \to Y$ prin $F(z, t) = f'((1-t)z + tz_0)$. Atunci, $F(z, 0) = f'(z) = f(z)$, $F(z, 1) = f'(z_0)$, $\forall z \in S^n$ și $F(z_0, t) = f'(z_0) = f(z_0)$, $\forall t \in I$.

iii) $\Rightarrow$ i) Este evidentă.

COROLAR 6. *Fiecare aplicație continuă a sferei S^n într-un spațiu contractibil se poate extinde la D^{n+1}.*

Demonstrație. Se aplică Teorema 5 și Cor. 2.

DEFINIȚIA 6. Un subspațiu A al unui spațiu topologic X se numește *retractă slabă a lui X* dacă incluziunea $i : A \hookrightarrow X$ are un invers omotopic la stînga, adică există $r : X \to A$, încît $ri \simeq 1_A$. Aplicația continuă r se numește *retracție slabă*. Este evident că dacă A este retractă a lui X este și retractă slabă. Reciproc nu este adevărat.

EXEMPLUL 7. Fie $X = I^2$ și A „spațiul pieptene" din Obs. 6 § 7. Atunci A nu este retractă a lui X (vezi exerc. 6) dar atît A cît și X sînt contractibile și, aplicînd Cor. 4, rezultă că incluziunea $i : A \hookrightarrow X$ este o echivalență omotopică și prin urmare A este o retractă slabă a lui X.

DEFINIȚIA 7. O *deformare* a spațiului X în subspațiul $A \subset X$ este o omotopie $D : X \times I \to X$, încît $D(x, 0) = x$, $D(x, 1) \in A$, $\forall x \in A$.

Dacă, în plus, $D(A \times I) \subseteq A$ (resp. $D(a, t) = a$, $\forall a \in A$, $\forall t \in I$), atunci D se numește *retracție (tare) de deformare* iar A este *retractă (tare) de deformare*.

EXEMPLE. 8. Dacă $X \subseteq \mathbb{R}^n$ este o mulțime convexă și $A = \{x_0\} \subseteq X$, atunci A este retractă tare de deformare a lui X.

9. Sfera S^n este retractă tare de deformare a spațiului $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$. Aplicația $D : (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times I \to \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, definită prin $D(x, t) = (1-t)x + \dfrac{tx}{\|x\|}$, $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $t \in I$, este o retracție tare de deformare *).

LEMA 2. *Spațiul X are o deformare în subspațiul A dacă și numai dacă incluziunea $i : A \hookrightarrow X$ are un invers omotopic la dreapta.*

Demonstrație. Dacă i are un invers omotopic la dreapta, $f : X \to A$, $if \simeq 1_X$, fie $F : X \times I \to X$, cu $F(x, 0) = x$ și $F(x, 1) = if(x) = f(x) \in A$. Rezultă că F este o deformare.

Reciproc, dacă X se deformează în A, fie $D : X \times I \to X$ o deformare, $D(X \times I) \subseteq A$. Fie $f : X \to A$, definită prin $f(x) = D(x, 1)$, $x \in X$. Atunci, $D : if \simeq 1_X$, deci f este un invers omotopic la dreapta pentru i.

DEFINIȚIA 8. Subspațiul A al lui X este o *retractă slabă de deformare a acestuia* dacă incluziunea $i : A \hookrightarrow X$ este o echivalență omotopică.

COROLAR 7. *Subspațiul A este retractă slabă de deformare a lui X dacă și numai dacă A este retractă slabă a lui X și X se deformează în A.*

EXEMPLUL 10. Spațiul „pieptene" este retractă slabă de deformare a pătratului I^2, dar nu este retractă de deformare a acestuia.

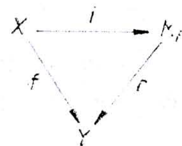
TEOREMA 6. *O aplicație $f : X \to Y$ este nul omotopă dacă și numai dacă există o extensie continuă a lui f, $\tilde{f} : CX \to Y$, unde CX este conul lui X* (vezi exemplul 1 § 10).

Demonstrație. Fie $F : X \times I \to Y$, cu $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = y_0$. Definim $\tilde{f} : CX \to Y$, $\tilde{f}([x, t]) = F(x, t)$. Aplicația $\tilde{f}$ este bine definită, deoarece dacă $t = 1$, $F(x, 1) = y_0$, $\forall x \in X$. Este și continuă și dacă identificăm X cu $X \times \{0\} \subset CX$, avem $\tilde{f}([x, 0]) = F(x, 0) = f(x)$. Deci $\tilde{f}$ extinde pe f. Reciproc, dacă există $\tilde{f} : CX \to Y$, cu $\tilde{f} \mid X \times \{0\} = f$, definim $F : X \times I \to Y$ prin $F(x, t) =$

---

*) Arătați că $D(x, t) \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$, $\forall (x, t) \in (\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \times I$.

$= \tilde{f}([x, t])$. Aplicația F este continuă și avem $F(x, 0) = \tilde{f}([x, 0]) = f(x)$, $F(x, 1) = \tilde{f}([x, 1]) = \tilde{f}(v) = \text{const.}$



TEOREMA 7. *Fie $f : X \to Y$ o aplicație continuă și M_f cilindrul acestei aplicații* (vezi exerc. 7 § 10). *Există atunci o diagramă comutativă adică $f = r \circ i$, unde i este incluziunea și r este o echivalență omotopică relativ la Y.*

Demonstrație. Fie elementele lui M_f, $[x, t]$, cu $x \in X$, $t \in I$ și $[y]$, cu $y \in Y$. Definim $i(x) = [x, 0]$. Aceasta este o incluziune, deoarece $[x_1, 0] = [x_2, 0] \Leftrightarrow x_1 = x_2$. Fie apoi $j : Y \to M_f$, $j(y) = [y]$; și această aplicație este o incluziune. În sfîrșit, fie $r : M_f \to Y$, $r([x, t]) = f(x)$ dacă $x \in X$, $t \in I$ și $r([y]) = y$, $\forall y \in Y$. Avem $r([x, 1]) = f(x) = r([f(x)])$, deci r este bine definită și cum componentele $X \times I \to Y$, $(x, t) \mapsto f(x)$ și $Y \to Y$, $y \mapsto y$ sînt continue, rezultă că r este continuă. Comutativitatea diagramei: $ri(x) = r([x, 0]) = f(x)$. Apoi, $rj(y) = r([y]) = y$, deci $rj = 1_Y$. În sfîrșit, definim $F : M_f \times I \to M_f$, prin $F([x, t]), t') = [x, (1 - t')t + t']$, $x \in X$, $t, t' \in I$ și $F([y], t') = [y]$, $y \in Y$, $t' \in I$. Se verifică imediat că F este bine definită și continuă. Apoi

$$F([x, t], 0) = [x, t], \quad F([y], 0) = [y],$$

$$F([x, t], 1) = [x, 1] = [f(x)] = jf(x) = jr([x, t]),$$

$$F([y], 1) = [y] = jr([y]), \quad F([y], t') = [y].$$

Prin urmare, $F : 1_{M_f} \simeq jr$ rel Y.

COROLAR 8. *Două spații topologice X și Y au același tip omotopic dacă și numai dacă acestea pot fi scufundate ca retracte slabe de deformare în același spațiu Z.*

Demonstrație. Dacă $i : X \hookrightarrow Z$, $j : Y \hookrightarrow Z$ sînt echivalențe omotope, rezultă că X și Y sînt omotopic echivalente.

Reciproc, fie $f : X \to Y$ o echivalență omotopică. Atunci, după Teorema 7, f poate fi scrisă drept compunerea $X \to M_f \xrightarrow{r} Y$ și deci $r \circ i$ este o echivalență omotopică. Deoarece r este întotdeauna o echivalență omotopică, rezultă că i este echivalență omotopică. Din demonstrația Teoremei 7, avem de asemenea că incluziunea $j : Y \to M_f$ este o echivalență omotopică *).

EXERCIȚII

1. Să se arate că dacă $f_0, f_1 : X \to S^n$ sînt două aplicații continue, încît $f_0(x) \neq -f_1(x)$, $\forall x \in X$, atunci $f_0 \simeq f_1$.

Indicație. Se poate construi $F : X \times I \to S^n$ prin

$$F(x, t) = \frac{(1 - t)f_0(x) + tf_1(x)}{|(1 - t)f_0(x) + tf_1(x)|}, \quad \forall (x, t) \in X \times I.$$

2. Să se arate că dacă $f_0, f_1 : X \to S^n$, $n \geqslant 1$, nu sînt surjective, atunci $f_0 \simeq f_1$.

Indicație. Dacă $z_0 \notin f_0(X)$, $z_1 \notin f_1(X)$, atunci, după exerc. 1, se obține $f_0 \simeq \varepsilon_{-z_0}$, $f_1 \simeq \varepsilon_{-z_1}$, unde ε_z este aplicația constantă $X \to \{z\}$. Se arată acum ușor că $\varepsilon_{-z_0} \simeq \varepsilon_{-z_1}$, deoarece S^n este liniar conex.

3. Fie $f_0, f_1 : P\mathbb{R}^1 \to P\mathbb{R}^2$, aplicațiile definite prin $f_0([x, y]) = [x, y, 0]$ și respectiv $f_1[x, y] = [x, -y, 0]$. Să se construiască o omotopie între f_0 și f_1.

Indicație. $F : P\mathbb{R}^1 \times I \to P\mathbb{R}^2$, cu $F([x, y], t) = [x, (1 - 2t)y, \varphi(t)y]$, unde

$$\varphi(t) = \begin{cases} t, & t \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \\ 1 - t, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \end{cases}$$

4. Să se arate că dacă X este spațiul din exemplul 6 §7, acesta este contractibil, dar aplicația constantă $X \to \{(0, 0)\}$ nu este omotopă cu 1_X rel $\{(0, 0)\}$.

Indicație. $F : X \times I \to X$, $F((x, y), t) = (0, 1) + t(x, y - 1) = (tx, 1 + t(y - 1))$, care arată că X este contractibil. Pentru partea a doua a demonstrației vezi, de exemplu [43, exerc. 2.4, p. 12].

5. Să se arate că banda lui Möbius are același tip de omotopie ca și cercul S^1.

Indicație. Există retracția tare de deformare $D : M \times I \to M$, definită prin $D([x, t], t') = \left[x, \left(\frac{1}{2} - t\right)t' + t\right]$ (vezi fig. 29).

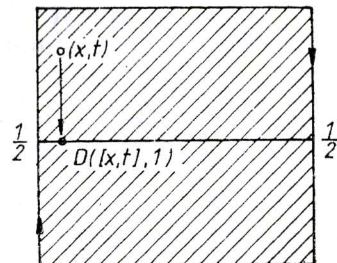


Fig. 29

*) Arătați că Y este chiar retractă tare de deformare a lui M_f.

6. Să se arate că spațiul „pieptene" A nu este retractă a lui $X = I^2$.
Soluție. Fie $r : X \to A$ continuă și satisfăcînd condiția $r|A = 1_A$. Considerăm șirul $z_n = \frac{1}{n\sqrt{2}} + i \in X$. Avem $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = i$, deci $\lim\limits_{n\to\infty} r(z_n) = r(i) = i$. Dar, deoarece $\frac{1}{n\sqrt{2}} \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$ (pentru $n \geqslant 2$), în mod necesar $r(z_n) \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, încît $\lim\limits_{n\to\infty} r(z_n) = 0$, contrar relației de mai sus.

7. Motivați afirmațiile din exemplul 10.

8. Fie X spațiul din exemplul 6 § 7 și fie Y spațiul constînd din X și din simetricul acestuia față de origine (vezi fig. 30). Să se arate că: a) X este un spațiu contractibil; b) Y nu este contractibil.

Soluție. a) $h : X \times I \to X$, $h\left(\left(\frac{t}{n}, 1 - t\right), t'\right) = \left(\frac{t(1-t')}{n}, 1 - t + tt'\right)$.

b) Să presupunem că există $H : Y \times I \to Y$, $H : 1_Y \simeq c_{x_0}$. Deoarece I este compact, continuitatea lui H implică faptul că dat $x \in Y$ și $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, încît $d(x, y) < \delta \Rightarrow d(H(x, t), H(y, t)) < \varepsilon$, $\forall t \in I$. Dar, pentru orice $n > 0$, omotopia H definește drumurile $\alpha^+(t) = H\left(\left(\frac{1}{n}, 0\right), t\right)$,

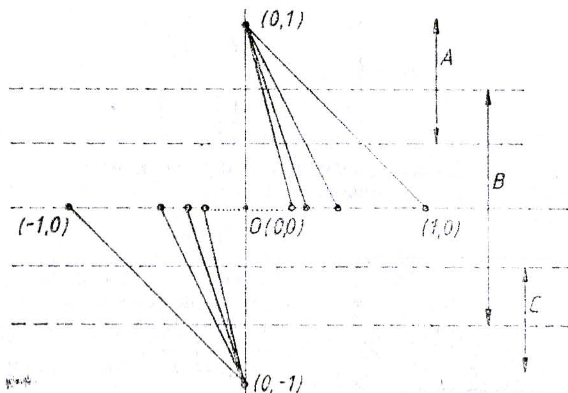


Fig. 30

de la $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ la x_0, și $\alpha^-(t) = H\left(\left(-\frac{1}{n}, 0\right), t\right)$, de la $\left(-\frac{1}{n}, 0\right)$ la x_0. Fie acum mulțimile:

$$A = \left\{(x_1, x_2) \in Y \mid x_2 > \frac{1}{3}\right\}, \quad B = \left\{(x_1, x_2) \in Y \mid \frac{2}{3} < x_2 < \frac{2}{3}\right\},$$

$$C = \left\{(x_1, x_2) \in Y \mid x_2 > -\frac{1}{3}\right\}$$

(vezi fig. 30). Putem diviza intervalul $I = [0, 1]$, încît fiecare subinterval să fie aplicat prin drumurile α^+ și α^- în întregime în una din mulțimile A, B, C. Deoarece $\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ și $\left(-\frac{1}{n}, 0\right)$ sînt în componente diferite ale lui B, există un prim punct al divizării lui I, t, pentru care $\alpha^+(t) \in A$ sau $\alpha^-(t) \in C$.
Fie, de exemplu, $\alpha^+(t) \in A$. Atunci, $\alpha^-(t)$ este în semiplanul $x_2 \leqslant 0$. Deci $d(\alpha^+(t), \alpha^-(t)) > \frac{1}{3}$. Aceasta contrazice continuitatea aplicației H. În adevăr, să presupunem că H este continuă și fie $x = (0, 0)$ și $\varepsilon = \frac{1}{6}$. Fie $\delta > 0$ corespunzător lui x și ε. Luăm n, astfel încît $\frac{1}{n} < \delta$. Avem atunci $d\left(x, \left(\frac{1}{n}, 0\right)\right) = \frac{1}{n} < \delta$ și, în mod analog, $d\left(x, \left(-\frac{1}{n}, 0\right)\right) < \delta$. Rezultă $d\left(H(x, t), H\left(\left(\frac{1}{n}, 0\right), t\right)\right) < \frac{1}{6}$ și $d\left(H(x, t), H\left(\left(-\frac{1}{n}, 0\right), t\right)\right) < \frac{1}{6}$ și prin urmare $d\left(H\left(\left(\frac{1}{n}, 0\right), t\right), H\left(\left(-\frac{1}{n}, 0\right), t\right)\right) < \frac{1}{3}$ pentru orice t, deci $d(\alpha^+(t), \alpha^-(t)) < \frac{1}{3}$, contrar unei relații stabilite mai sus.

§14. Proprietatea de extensie a omotopiei

DEFINIȚIA 1. Fie $\mathcal{U} = \{U_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ o acoperire a unui spațiu Y. Spunem că două aplicații $f, g : X \to Y$ sînt *$\mathcal{U}$-apropiate* dacă $\forall x \in X$, $\exists \lambda \in \Lambda$, încît $f(x), g(x) \in U_\lambda$. O omotopie $H : X \times I \to Y$ este numită *$\mathcal{U}$-omotopie* dacă $\forall x \in X$, $\exists \lambda \in \Lambda$, încît $H(x \times I) \subseteq U_\lambda$.

TEOREMA 1. *Fie Y un spațiu* ANR. *Atunci, pentru fiecare acoperire deschisă $\mathcal{D} = \{D_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ a lui Y, există o acoperire deschisă $\mathcal{D}' = \{D'_\mu \mid \mu \in M\}$ a lui Y, încît oricare două aplicații, $f, g : X \to Y$, de la un spațiu arbitrar X în Y, care sînt $\mathcal{D}'$-apropiate sînt $\mathcal{D}$-omotope. Mai mult, se poate asigura ca omotopia între f și g să fie constantă pe $\{x\} \times I$ dacă $f(x) = g(x)$.*

Demonstrație. După Teorema 6 §12, putem presupune că Y este o submulțime închisă a unei mulțimi convexe $K \subseteq L$, unde L este un spațiu vectorial normat. Deoarece $Y \in$ ANR, există o vecinătate deschisă V a lui Y *în* K și o retracție $r : V \to Y$. Atunci, $r^{-1}(\mathscr{D})$ este o acoperire deschisă a lui V. Fie $\mathscr{W} = \{W_\mu \mid \mu \in M\}$ o acoperire mai fină decît $r^{-1}(\mathscr{D})$, constînd din discuri deschise în K și fie $\mathscr{D}' = \{D'_\mu \mid \mu \in M\}$, unde $D'_\mu = W_\mu \cap Y$. Pentru două aplicații $f, g : X \to Y \subseteq K$, $\mathscr{D}'$-apropiate, definim omotopia $G : X \times I \to K$, între f și g, prin $G(x, t) = (1 - t)f(x) + tg(x)$, $(x, t) \in X \times I$. Pentru orice $x \in X$, există $\mu \in M$, încît $f(x)$, $g(x) \in D'_\mu \subseteq W_\mu$.

Deoarece W_μ este o mulțime convexă, conținută într-o mulțime $r^{-1}(D_\lambda) \subseteq V$, avem $G(x \times I) \subseteq W_\mu \subseteq V$, adică G este o $\mathscr{W}$-omotopie. În sfîrșit, fie $H = rG : X \times I \to Y$. Atunci, H este o $\mathscr{D}$-omotopie, deoarece $\mathscr{W}$ este mai fină decît $r^{-1}(\mathscr{D})$. În plus, $H_0 = rf = f$ și $H_1 = rg = g$. Apoi, dacă $f(x) = g(x)$, pentru un $x \in X$, avem $H(x, t) = f(x) = g(x)$, $\forall t \in I$.

COROLAR 1. *Dacă Y este un* ANR, *există o acoperire deschisă $\mathscr{D}'$ a lui Y, încît oricare două aplicații $\mathscr{D}'$-apropiate, $f, g : X \to Y$, să fie omotope.*

Demonstrație. Fie în Teorema 1, $\mathscr{D} = \{Y\}$. Atunci, există $\mathscr{D}'$, încît dacă f, g sînt $\mathscr{D}'$-apropiate, acestea sînt $\mathscr{D}$-omotope (deci omotope).

TEOREMA 2. *Fiecare spațiu* ANR *este* **local contractibil**, *adică* $\forall y_0 \in Y$ *și* $\forall U \in \mathscr{V}(y_0)$, $\exists V \in \mathscr{V}(y_0)$, $V \subseteq U$, *astfel încît incluziunea $V \hookrightarrow U$ este omotopă* **în** *U cu aplicația constantă* ε_{y_0}.

Demonstrație. Se poate presupune că U este deschisă. Atunci, $\mathscr{D} = \{U, Y \setminus \{y_0\}\}$ este o acoperire deschisă a lui Y. Fie $\mathscr{D}'$ o acoperire deschisă a lui Y încît două aplicații $\mathscr{D}'$-apropiate să fie $\mathscr{D}$-omotope (vezi Teorema 1). Fie $V \in \mathscr{D}'$, încît $y_0 \in V$. Incluziunea $i : V \hookrightarrow Y$ și aplicația constantă $\varepsilon_{y_0} : V \to Y$ sînt $\mathscr{D}'$-apropiate și deci sînt $\mathscr{D}$-omotope, adică există $H : V \times I \to Y$, încît $H(y, 0) = y$, $H(y, 1) = y_0$ și $\forall y \in V$, $H(y \times I) \subset U$ sau $H(y \times I) \subset Y \setminus \{y_0\}$. Deoarece $H(y, 1) = y_0 \notin Y \setminus \{y_0\}$, rezultă că are loc prima situație. În consecință, $H : V \times I \to U$ este o omotopie în U între incluziunea $V \hookrightarrow U$ și aplicația constantă ε_{y_0}.

TEOREMA 3. *Fie X un spațiu metric, $A \subseteq X$ o submulțime închisă, $Y \in$ ANR și $f, g : X \to Y$ două aplicații continue, încît există o omotopie $H : A \times I \to Y$, între $f|A$ și $g|A$. Atunci, putem găsi o vecinătate V a lui A în X și o omotopie $\widetilde{H} : V \times I \to Y$, între $f|V$ și $g|V$, încît $\widetilde{H}|A \times I = H$.*

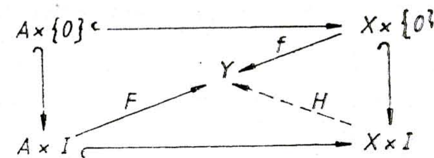
Demonstrație. Considerăm mulțimea închisă $C = (A \times I) \cup (X \times 0) \cup (X \times 1) \subseteq X \times I$ și aplicația $h : C \to Y$, dată prin $h(x,0) = f(x)$, $h(x,) = g(x)$, $\forall x \in X$, $h(a, t) = H(a, t)$, $\forall (a, t) \in A \times I$. Atunci, prin Teorema 7 §12, există o extensie continuă $\tilde{h} : U \to Y$, unde U este o vecinătate a lui C în $X \times I$. Folosind compactitatea lui I, se poate găsi o vecinătate V a lui A în X, încît $V \times I \subseteq U$. Atunci $\widetilde{H} = \tilde{h}|V \times I$ este o omotopie între $f|V$ și $g|V$, încît $\widetilde{H}|A \times I = H$.

DEFINIȚIA 2. Fie o pereche topologică (X, A) și Y un spațiu. Spunem că Y *are proprietatea de extensie a omotopiei* (prescurtat, HEP), *în raport cu* (X, A) (sau (X, A) *are* HEP *în raport cu* Y), dacă $\forall f : X \to Y$, $\forall F : A \times I \to Y$, cu $F(a, 0) = f(a)$, $\forall a \in A$, $\exists H : X \times I \to Y$, încît $H(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in X$ și $H|A \times I = F$.

Definiția HEP este descrisă schematic în diagrama de mai jos.

Dacă (X, A) are HEP în raport cu toate spațiile, atunci incluziunea $i : A \hookrightarrow X$ este numită *cofibrare*.

COROLAR 2. *Aplicația $i : X \to M_f$ din* Teorema 7 §13 *este o cofibrare.*



Demonstrație. Fie $g : M_f \to W$ și $G : X \times I \to W$, cu W spațiu arbitrar și $G(x, 0) = g([x, 0])$. Definim $H : M_f \times I \to W$ prin $H([y], t') = g(y)$, $\forall y \in Y$, $\forall t' \in I$ și

$$H([x, t], t') = \begin{cases} g([x, t + (t-1)t']), & t + (1-t)t' \geqslant 0, \\ G(x, (1-t)t' - t), & t + (t-1)t' \leqslant 0. \end{cases}$$

Continuitatea aplicației H rezultă ușor din lema de lipire (Teorema 2 §3)), utilizînd faptul că $\{(t, t') \in I^2 \mid t + (1 -$

$- t(t' \geqslant 0\}$ și $\{(t, t') \in I^2 | t + (t-1)t' \leqslant 0\}$ sînt submulțimi închise în I^2.

TEOREMA 4 (HEP). *Fiecare spațiu* $Y \in \mathrm{ANR}$ *are proprietatea de extensie a omotopiei în raport cu toate perechile* (X, A), *cu* X *spațiu metric și* A *o submulțime închisă a lui* X.

Pentru demonstrația teoremei stabilim mai întîi lema următoare.

LEMA 1. *Fie* X *un spațiu metric,* A *o submulțime închisă a lui* X *și* V *o vecinătate deschisă a lui* A *în* X. *Există atunci o aplicație continuă* $r : X \times I \to (V \times I) \cup (X \times \{0\})$ *a cărui restricție la* $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$ *este incluziunea.*

Demonstrație. După Lema lui Urîson, există $\Phi : X \to I$, o aplicație continuă, cu $\Phi | A = 1$ și $\Phi | (X \setminus V) = 0$. Fie $r : X \times I \to X \times I$ aplicația definită prin $r(x, t) = (x, \Phi(x)t)$. Avem atunci $r(x, t) \in V \times I$, $\forall x \in V$ și $r(x, t) \in X \times \{0\}$, $\forall x \in X \setminus V$, deoarece $\Phi(x) = 0$. Rezultă $r(X \times I) \subseteq (V \times I) \cup (X \times \{0\})$ și r lasă invariante punctele lui $(A \times I) \cup (X \times \{0\})$.

Demonstrația Teoremei 4. Fie (X, A) o pereche ca în enunț și $f : X \to Y$, $F : A \times I \to Y$, aplicații continue, cu $F_0 = f | A$. Atunci, $B = (A \times I) \cup (X \times \{0\})$ este o submulțime închisă a lui $X \times I$ și există $g : B \to Y$, dată prin $g(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in X$, și $g | A \times I = F$. Deoarece Y este ANE (vezi Teorema 7 § 12), există o extensie $\tilde{g} : U \to Y$ a aplicației g la o vecinătate U a lui B în $X \times I$. Folosind compactitatea lui I, se poate găsi o vecinătate deschisă V a lui A în X, încît $V \times I \subseteq U$. Din Lema 1, există $r : X \times I \to (V \times I) \cup (X \times \{0\})$, încît $r | B$ este incluziunea. Omotopia $H = \tilde{g} r : X \times I \to Y$ satisface Def. 2.

COROLAR 3. *Fie* X *un spațiu metric,* $A \subseteq X$ *închisă și* $Y \in \mathrm{ANR}$. *Dacă* $f, g : A \to Y$ *sînt omotope și* f *admite o extensie continuă* $\bar{f} : X \to Y$, *atunci și* g *are o extensie continuă* $\tilde{g}$, *încît* $\bar{f} \simeq \tilde{g}$.

Demonstrație. Fie $F : A \times I \to Y$, cu $F(a, 0) = f(a)$, $F(a, 1) = g(a)$. După Teorema 4, $\exists H : X \times I \to Y$, cu $H(x, 0) = \bar{f}(x)$, $H(a, t) = F(a, t)$. Definim $\tilde{g} : X \to Y$ prin $\tilde{g}(x) = H(x, 1)$. Avem $\tilde{g}(a) = H(a, 1) = F(a, 1) = g(a)$, $\forall \in A$, deci $\tilde{g}$ este o extensie a lui g și este evidentă relația $H : \bar{f} \simeq \tilde{g}$.

COROLAR 4. a) *Fiecare spațiu* AR *este contractibil.*

b) *Dacă* $Y \in \mathrm{ANR}$ *și* Y *este contractibil, atunci* $Y \in \mathrm{AR}$.

Demonstrație. a) Fie $Y \in \mathrm{AR}$, $X = Y \times I$, $A = (Y \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})$ și $f : A \to Y$, dată prin $f(y, 0) = y$, $f(y, 1) = y_0$, $\forall y \in Y$, pentru $y_0 \in Y$, fixat. Deoarece $Y \in \mathrm{AE}$ (Teorema 7 § 12), f are o extensie, $F : Y \times I \to Y$. Este clar că F este o omotopie a identității 1_Y cu aplicația constantă ε_{y_0}, deci Y este contractibil.

b) Fie Y contractibil, $Y \in \mathrm{ANR}$ și X un spațiu metric cu $A \subseteq X$, închisă, iar $f : A \to Y$ o aplicație continuă. Deoarece $1_Y \simeq \varepsilon_{y_0} \Rightarrow f \circ 1_Y \simeq f \circ \varepsilon_{y_0}$, adică $f \simeq \varepsilon_{y_0}$. Dar aplicația constantă ε_{y_0} se extinde în mod evident la întreg spațiul X. După Corolarul 3, rezultă că f are o extensie continuă pe X. Deci $Y \in \mathrm{AE}$ și, după Teorema 7 § 12, rezultă $Y \in \mathrm{AR}$.

TEOREMA 5. *Perechea topologică* (D^n, S^{n-1}), $n \geqslant 1$, *are proprietatea de extensie a omotopiei în raport cu orice spațiu topologic* X.

Demonstrație. Arătăm mai întîi că subspațiul $A = D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I$, al cilindrului $Y = D^n \times I$, este retractă tare de deformare a acestuia. Considerăm un sistem de coordonate în $\mathbb{R}^{n+1}$ în raport cu care $D^n \times I = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times I \mid \|x\| \leqslant 1,\ t \in I\}$. Fie apoi punctul $V(0, \ldots, 0, 2)$ și C conul cu vîrful în V și baza S^{n-1} (vezi fig. 31).

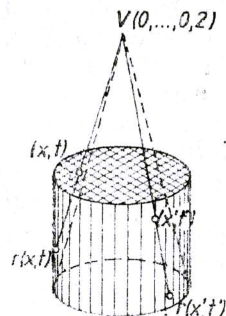


Fig. 31

Definim aplicația $r : Y \to A$ ca fiind proiecția din V. Punctele din interiorul conului se aplică în $D^n \times \{0\}$ iar celelalte în $S^{n-1} \times I$. Reprezentarea analitică a aplicației r o obținem astfel: dacă $(x_0, 0) = (x_0^1, \ldots, x_0^n, 0) \in S^{n-1} \times \{0\}$, generatoarea conului prin acest punct este $\dfrac{x^1}{x_0^1} = \ldots = \dfrac{x^n}{x_0^n} = \dfrac{t-2}{-2}$ și deducem ecuația conului

$$4\|x\|^2 = (t-2)^2, \text{ adică } \|x\| = \frac{2-t}{2} \text{ (deoarece } 0 \leqslant t \leqslant 2).$$

Punctele din interiorul conului sînt cele pentru care $\|x\| < \frac{2-t}{2}$. Pentru un asemenea punct (x, t), generatoarea Vx intersectează hiperplanul $t = 0$ în $\left(\frac{2x}{2-t}, 0\right)$. Apoi, punctul (x, t) fiind în exteriorul conului, generatoarea Vx intersectează cilindrul $S^{n-1} \times I$ în $\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{t+2\|x\|-2}{\|x\|}\right)$. Avem astfel aplicaţia

$$r(x, t) = \begin{cases} \left(\frac{2x}{2-t}, 0\right), & \|x\| \leqslant \frac{2-t}{2}, \\ \left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{t+2\|x\|-2}{\|x\|}\right), & \|x\| \geqslant \frac{2-t}{2}. \end{cases}$$

Continuitatea aplicaţiei r se deduce imediat, aplicînd lema de lipire (Teorema 2 §3). Este evident că $r(x, t) \in A$ iar dacă $(x, t) \in A$, atunci $r(x, t) = (x, t)$. Astfel, r este retracţie. Putem defini deformarea $H : (D^n \times I) \times I \to D^n \times I$ prin $H((x, t), t') = t'r(x, t) + (1 - t')(x, t)$, deoarece $D^n \times I$ este mulţime convexă. Aplicaţia H satisface Def. 7 §13.

Fie acum X un spaţiu topologic arbitrar şi $f : D^n \to X$, $F : S^{n-1} \times I \to X$ aplicaţii continue, încît $F(x, 0) = f(x)$, pentru $\forall x \in S^{n-1} \subset D^n$.

Considerăm aplicaţia $f' : D^n \times \{0\} \cup S^{n-1} \times I \to X$, definită prin $f'(y, 0) = f(y)$, $y \in D^n$ şi $f'(x, t) = F(x, t)$, $(x, t) \in S^{n-1} \times I$. Compunînd aceasta cu retracţia de mai sus, obţinem aplicaţia $G = f' \circ r : D^n \times I \to X$. Aceasta satisface condiţiile $G(x, t) = f'r(x, t) = f'((x, t)) = F(x, t)$ dacă $(x, t) \in S^{n-1} \times I$ şi $G(x, 0) = f'r(y, 0) = f'((y, 0)) = f(y)$, $\forall y \in D^n$.

Ţinînd seama de exerc. 7 §11, deducem rezultatul următor.

COROLAR 5. *Perechile*

$$(I^n, \partial I^n) \text{ şi } (I^n \times I, I^n \times \{0\} \cup I^n \times \{1\} \cup \partial I^n \times I)$$

au proprietatea de extensie a omotopiei în raport cu orice spaţiu X.

(Perechea a doua este $(I^{n+1}, \partial I^{n+1})$.)

COROLAR 6. *Dacă spaţiul topologic X este obţinut din A prin ataşare de n-celule, atunci perechea (X, A) are* HEP.

Demonstraţie. Fie aplicaţiile caracteristice

$$\varphi_j : (D^n, S^{n-1}) \to (e_j^n, \dot{e}_j^n) \subset (X, A)$$

şi $H : (D^n \times I) \times I \to D^n \times I$ deformarea din Teorema 5. Considerăm $H_j : (e_j^n \times I) \times I \to e_j^n \times I$, prin

$$H_j((\varphi_j(z), t), t') = (\varphi_j \times 1_I)(H(z, t, t')), \quad z \in D^n, \ t, t' \in I.$$

Putem defini atunci $H' : (X \times I) \times I \to X \times I$, încît $H' | (e_j^n \times I) \times I = H_j$ şi $H'(a, t, t') = (a, t)$, $\forall a \in A$, $t, t' \in I$. Aplicaţia H' este o deformaţie, deci $X \times \{0\} \cup \cup A \times I$ este retractă tare de deformare a lui $X \times I$. Mai departe se procedează ca în demonstraţia Teoremei 5.

EXERCIŢII

1. Un spaţiu topologic X se numeşte *binormal* dacă cilindrul $X \times I$ este spaţiu normal. Să se arate că:

a) Dacă X este binormal, Y este normal şi $f : X \to Y$ este o aplicaţie continuă, atunci cilindrul aplicaţiei f (vezi exerc. 7 §10) este spaţiu normal.

b) Dacă X este un ANR pentru clasa spaţiilor normale (fără ca X să fie normal) şi dacă X este binormal, acesta este local contractibil *).

2. Să se arate că dacă X este binormal şi ANR pentru clasa spaţiilor normale, atunci X este AR pentru clasa spaţiilor normale dacă şi numai dacă este contractibil *).

3. Să se arate că dacă A este o submulţime închisă a unui spaţiu binormal X, atunci orice spaţiu Y care este ANR pentru clasa spaţiilor normale are HEP în raport cu perechea (X, A) (*teorema lui Borsuk*).

4. Fie A o submulţime închisă a unui spaţiu binormal X şi fie $A \times \times I \cup X \times \{0\} \subset X \times I$ o retractă absolută de vecinătate. Atunci (X, A) are HEP în raport cu orice spaţiu Y.

5. Să se arate că prin compunerea a două cofibrări se obţine o cofibrare.

6. Să se arate că dacă incluziunile submulţimilor închise $A \subset X$, $B \subset Y$ sînt cofibrări, atunci incluziunile $A \times B \subset X \times B \cup A \times Y$ şi $X \times B \cup A \times Y \subset X \times Y$ sînt de asemenea cofibrări.

---

*) Să se compare rezultatele cu cele pentru ANR($\mathcal{M}$).

CAPITOLUL II

GRUPURI DE OMOTOPIE

Acest capitol este destinat studiului grupurilor de omotopie și proprietăților lor fundamentale. Cuprinde grupurile de omotopie absolută și relativă, șirul exact de omotopie al unei perechi punctate, fibrări și spații de acoperire. Sînt date unele aplicații, incluzînd calculul unor grupuri de omotopie și demonstrații ale teoremei fundamentale a algebrei și teoremei Borsuk-Ulam.

§ 1. Grupurile $\pi_n(X, x_0)$

Fie X un spațiu topologic și $x_0 \in X$ un punct fixat. Vom nota perechea $(X, \{x_0\})$ prin (X, x_0) și o vom numi *spațiu topologic punctat.*

Pentru $n \geqslant 1$, considerăm n-cubul standard $I^n = \{t = (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid 0 \leqslant t_i \leqslant 1\}$ și fie ∂I^n frontiera sa, adică $\partial I^n = \{t = (t_1, \ldots, t_n) \in I^n \mid \exists i = 1, \ldots, n, \text{ cu } t_i = 0 \text{ sau } t_i = 1\}$.

DEFINIȚIA 1. Numim *n-drum în spațiul topologic X**) orice aplicație continuă $f: I^n \to X$. Dacă $f(\partial I^n) = x_0$, vom scrie $f: (I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ (vezi Cap. I. § 13) și vom spune că f este un *n-drum închis* în (X, x_0).

NOTAȚIA 1. Mulțimea claselor de omotopie ale n-drumurilor închise în spațiul (X, x_0), relativ la ∂I^n, adică mulțimea $[(I^n, \partial I^n), (X, x_0)]$, o vom nota prin $\pi_n(X, x_0)$, $n \geqslant 1$.

Fie S^n n-sfera euclidiană, în care considerăm punctul bază $p_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$.

TEOREMA 1. *Există o bijecție*

$$\Phi : [(S^n, p_0), (X, x_0)] \to \pi_n(X, x_0).$$

*) Se mai spune *n-cub singular în X.*

Demonstrație. După Propoziția 7 § 11 Cap. I, există o aplicație continuă de perechi $\theta : (D^n, S^{n-1}) \to (S^n, p_0)$, care induce un homeomorfism $\bar{\theta} : D^n/S^{n-1} \to S^n$. Apoi, după exerc. 7 § 11. Cap. I. există un homeomorfism $\varphi : (I^n, \partial I^n) \to (D^n, S^{n-1})$. Prin compunere, avem $\theta\varphi : (I^n, \partial I^n) \to (S^n, p_0)$.

Definim aplicația $\Phi : [(S^n, p_0), (X, x_0)] \to \pi_n(X, x_0)$ prin $\Phi([f']) = [f'\theta\varphi]$. Aceasta este bine definită datorită Teoremei 2 § 13 Cap. I. Putem construi inversa acesteia. Dacă $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, aplicația $f :(I^n, \partial I^n) \to (X, x_0)$ induce aplicația continuă $\bar{f} : I^n \setminus \partial I^n \to X$ (Cor. 2 § 10 Cap. I). Avem apoi homeomorfismul $\mu : S^n \to I^n \setminus \partial I^n$ și definim $\Psi : \pi_n(X, x_0) \to [(S^n, p_0), (X, x_0)]$, prin $\Psi([f]) = [\bar{f}\mu]$. Rezultă ușor că dacă $f \simeq g$ rel ∂I^n, prin omotopia F, aceasta induce $\bar{F} : \bar{f} \simeq \bar{g}$ și deducem că Ψ este bine definită. Din definițiile aplicațiilor Φ și Ψ, rezultă imediat că $\Phi\Psi = 1$ și $\Psi\Phi = 1$, încît Φ este o bijecție.

LEMA 1. a) *Fie n-drumurile $f, g \in \mathrm{Top}(I^n, X)$, satisfăcînd condiția $f(1, t_2, \ldots, t_n) = g(0, t_2, \ldots, t_n)$ (în particular, f, g închise). Atunci, aplicația $f * g : I^n \to X$, definită prin*

$$(1) \quad (f * g)(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases}$$

este un n-drum în X. Acest n-drum este numit **compusul dintre** *f și g**). *Dacă f și g sînt închise, $f * g$ este de asemenea închisă.*

b) *Aplicația constantă $c_{x_0}(I^n) = \{x_0\}$ este un n-drum închis în (X, x_0).*

c) *Pentru un n-drum f în X, aplicația $\hat{f} : I^n \to X$, definită prin*

$$(2) \quad \hat{f}(t_1, \ldots, t_n) = f(1 - t_1, t_2, \ldots, t_n),$$

este un n-drum, numit **inversul n-drumului** *f***). *Dacă f este închis, $\hat{f}$ este de asemenea închis.*

Demonstrație. Afirmațiile b) și c) sînt evidente. Pentru a), aplicăm lema de lipire (Teorema 2 § 3). Avem $I^n = I_1^n \cup I_2^n$, cu $I_1^n = \left[0, \frac{1}{2}\right] \times I \times \ldots \times I$ și $I_2^n =$

*) Se poate defini compusul și în raport cu altă variabilă decît t_1.
**) în direcția lui t_1.

$= \left[\frac{1}{2}, 1\right] \times I \times \ldots \times I$ închise, $I_1^n \cap I_2^n = \left\{ t = \left(\frac{1}{2}, t_2, \ldots \right.\right.$
$\left.\left. \ldots, t_n\right) \in I^n \right\}$, iar $f\left(2 \cdot \frac{1}{2}, t_2, \ldots, t_n\right) = g\left(2 \cdot \frac{1}{2} - 1, t_2, \ldots, t_n\right)$.

LEMA 2. *Omotopia n-drumurilor închise într-un spațiu topologic punctat (X, x_0), relativ la ∂I^n, este compatibilă cu compunerea definită prin (1). Adică, dacă $f, g, f', g' \in \mathrm{Top}((I^n, \partial I^n), (X, x_0))$, încît $f \simeq f'$ rel ∂I^n și $g \simeq g'$ rel ∂I^n, atunci $f * g \simeq f' * g'$ rel ∂I^n.*

Demonstrație. Fie $F : f \simeq f'$ rel ∂I^n, $G : g \simeq g'$ rel ∂I^n. Definim $H : I^n \times I \to X$ prin

$$H((t_1, \ldots, t^n), t') = \begin{cases} F((2t_1, t_2, \ldots, t_n), t'), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ G((2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), t'), & \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Continuitatea aplicației H rezultă din faptul că poate fi privită drept compunerea $(n+1)$-drumurilor F și G, adică $H = F * G$.

Dacă $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \partial I^n$, atunci $(2t_1, t_2, \ldots, t_n) \in \partial I^n$, cînd $0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}$ și $(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n) \in \partial I^n$ pentru $\frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1$. Astfel, $H(\partial I^n \times I) = \{x_0\}$. În sfîrșit, $H(t, 0) = (f * g)(t)$ și $H(t, 1) = (f' * g')(t)$.

TEOREMA 2. *În mulțimea $\pi_n(X, x_0)$, $n \geqslant 1$, este bine definită operația internă*

(3) $\quad [f][g] = [f * g], \ \forall [f], [g] \in \pi_n(X, x_0),$

și aceasta satisface axiomele unui grup. Grupul obținut este numit ***n*-grupul de omotopie al spațiului *X*, cu punctul bază x_0.**

Demonstrație. Faptul că (3) definește corect o operație internă în $\pi_n(X, x_0)$ rezultă din Lema 1 a) și Lema 2. Vom verifica acum axiomele grupului.

Asociativitatea. Dacă f, g, h sînt n-drumuri închise în (X, x_0), relația $([f][g])[h] = [f]([g][h])$ este echivalentă cu relația

(4) $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$ rel ∂I^n, care urmează s-o demonstrăm.

Elementul neutru. Vom stabili că $[e_{x_0}]$ este elementul neutru în raport cu operația (3), adică avem

(5) $e_{x_0} * f \simeq f * e_{x_0} \simeq f$ rel ∂I^n, pentru oricare n-drum închis f.

Existența simetricului unui element. Pentru un n-drum închis f în (X, x_0) vom arăta că are loc relația

(6) $f * \hat{f} \simeq \hat{f} * f \simeq e_{x_0}$ rel ∂I^n, care va stabili că $[f]^{-1} = [\hat{f}]$.

Pentru a construi omotopii ce stabilesc relațiile (4), (5), (6) convenim mai întîi asupra unor notații care vor permite să găsim intuitiv asemenea omotopii.

Pentru o aplicație continuă $\varphi : [a, b] \to [0, 1]$, unde $[a, b]$ este un interval arbitrar, încît $\varphi(a) = 0$, $\varphi(b) = 1$, și f un n-drum în X, notăm cu f_φ aplicația continuă

(7) $$f_\varphi : [a, b] \times \underbrace{I \times \ldots \times I}_{n-1 \text{ ori}} \to X,$$

definită prin

(8) $f_\varphi(t, t_2, \ldots, t_n) = f[\varphi(t), t_2, \ldots, t_n]$.

Dacă φ este homeomorfismul $\varphi(t) = \frac{t-a}{b-a}$, aplicația f_φ o vom nota prin f_{ab} sau $f_{[a, b]}$.

Dacă f este un n-drum închis, atunci $f_\varphi(t, t_2, \ldots, t_n) = x_0$ dacă $t \in \{a, b\}$ iar dacă $(t_2, \ldots, t_n) \in \partial I^{n-1}$, atunci $f_\varphi(t, t_2, \ldots, t_n) = x_0$. Prin urmare, f_φ este un n-drum închis, dar parcurs cu altă viteză decît f, în direcția t_1. Dacă $a < b < c$ și f, g sînt două n-drumuri închise în (X, x_0), atunci, considerînd f_{ab} și g_{bc}, acestea se pot compune după legea

(9) $$(f_{ab} \circledast g_{bc})(t, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} f_{ab}(t, t_2, \ldots, t_n), & t \in [a, b], \\ g_{bc}(t, t_2, \ldots, t_n), & t \in [b, c]. \end{cases}$$

Legea de compunere (9) este în mod evident asociativă (spre deosebire de (1)), adică pentru $a < b < c < d$, avem $(f_{ab} \circledast g_{bc}) \circledast h_{cd} = f_{ab} \circledast (g_{bc} \circledast h_{cd})$.

Se verificăm acum relația (4). Avem

$$((f * g) * h)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(4t_1, t_2, \ldots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{4}, \\ g(4t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \frac{1}{4} \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ h(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq 1, \end{cases}$$

adică

(10) $(f * g) * h = f_{\left[0, \frac{1}{4}\right]} \circledast g_{\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]} \circledast h_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]}$. Apoi,

$$(f * (g * h))(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1}{2}, \\ g(4t_1 - 2, t_2, \ldots, t_n), & \frac{1}{2} \leq t_1 \leq \frac{3}{4}, \\ h(4t_1 - 3, t_2, \ldots, t_n), & \frac{3}{4} \leq t_1 \leq 1, \end{cases}$$

deci

(11) $f * (g * h) = f_{\left[0, \frac{1}{2}\right]} \circledast g_{\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]} \circledast h_{\left[\frac{3}{4}, 1\right]}$.

Formulele (10) și (11) sugerează clar cum trebuie construită o omotopie $H : (f * g) * h \simeq f * (g * h) \text{ rel } \partial I^n$. Anume, pentru un nivel t' fixat în cubul $I^n \times I = \{((t_1, \ldots, t_n), t') \mid 0 \leq t_i \leq 1, 0 \leq t' \leq 1\}$, luăm $H_{t'} = f_{[0, a]} \circledast g_{[a, b]} \circledast h_{[b, 1]}$, cum apare în fig. 32 (cazul $n = 1$). După calcule simple, se obține

$$a = \frac{1 + t'}{4}, \quad b = \frac{2 + t'}{4}$$

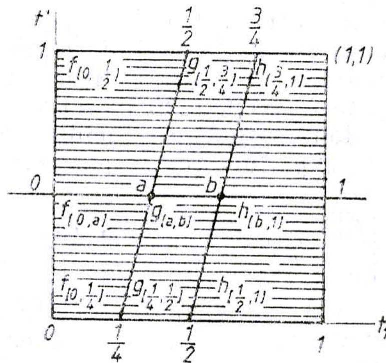


Fig. 32

și prin urmare

$$H(t_1, \ldots, t_n, t') = H_{t'}(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= (f_{\left[0, \frac{1+t'}{4}\right]} \circledast g_{\left[\frac{1+t'}{4}, \frac{2+t'}{4}\right]} \circledast h_{\left[\frac{2+t'}{4}, 1\right]})(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \begin{cases} f_{\left[0, \frac{1+t'}{4}\right]}(t_1, \ldots, t_n), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1 + t'}{4}, \\ g_{\left[\frac{1+t'}{4}, \frac{2+t'}{4}\right]}(t_1, \ldots, t_n), & \frac{1 + t'}{4} \leq t_1 \leq \frac{2 + t'}{4}, \\ h_{\left[\frac{2+t'}{4}, 1\right]}(t_1, \ldots, t_n), & \frac{2 + t'}{4} \leq t_1 \leq 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f\left(\frac{4t_1}{1 + t'}, t_2, \ldots, t_n\right), & 0 \leq t_1 \leq \frac{1 + t'}{4}, \\ g(4t_1 - t' - 1, t_2, \ldots, t_n), & \frac{1 + t'}{4} \leq t_1 \leq \frac{2 + t'}{4}, \\ h\left(\frac{4t_1 - t' - 2}{2 - t'}, t_2, \ldots, t_n\right), & \frac{2 + t'}{4} \leq t_1 \leq 1. \end{cases}$$

Verificarea riguroasă că aplicația $H : I^n \times I \to X$ este o omotopie necesară se face astfel. Avem $I^n \times I = J_1^{n+1} \cup J_2^{n+1} \cup J_3^{n+1}$, unde $J_1^{n+1} = \left\{((t_1, \ldots, t_n), t') \mid t_1 \leq \frac{1 + t'}{4}\right\}$, $J_2^{n+1} = \left\{((t_1, \ldots, t_n), t') \middle| \frac{1 + t'}{4} \leq t_1 \leq \frac{2 + t'}{4}\right\}$, $J_3^{n+1} = \left\{((t_1, \ldots, t_n), t') \middle| \frac{2 + t'}{4} \leq t_1 \leq 1\right\}$.

Acestea sînt submulțimi închise. În adevăr, fie aplicațiile continue $\varphi_1, \varphi_2 : I^n \times I \to \mathbb{R}$ definite respectiv prin

$$\varphi_1((t_1, \ldots, t_n), t') = t_1 - \frac{1 + t'}{4},$$

$$\varphi_2((t_1, \ldots, t_n), t') = t_1 - \frac{2 + t'}{4}.$$

Avem

$$J_1^{n+1} = \varphi_1^{-1}((-\infty, 0]), \ J_2^{n+1} = \varphi_1^{-1}([0, +\infty)) \cap$$

$$\cap \varphi_2^{-1}((-\infty, 0]), \ J_3^{n+1} = \varphi_2^{-1}([0, +\infty)).$$

Se poate acum aplica lema de lipire (Teorema 2 § 3). Verificarea celorlalte condiţii pentru H ($H(t_1,\ldots,t_n, 0) = ((f * g) * h)(t_1,\ldots,t_n)$, $H(t_1,\ldots,t_n, 1) = (f * (g * h))(t_1,\ldots,t_n)$, $H(\partial I^n \times I) = \{x_0\}$) o lăsăm în seama cititorului.

Să arătăm că are loc (5). Avem

$$(e_{x_0} * f)(t_1,\ldots,t_n) = \begin{cases} x_0, & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ f(2t_1 - 1, t_2,\ldots,t_n), & \dfrac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases}$$

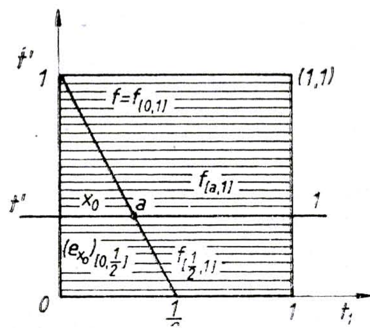


Fig. 33

adică

(12) $e_{x_0} * f = (e_{x_0})_{\left[0, \frac{1}{2}\right]} * f_{\left[\frac{1}{2}, 1\right]}$.

Definim omotopia K: $e_{x_0} * f \simeq f$ rel ∂I^n, luînd la nivelul t', $K_{t'} = (e_{x_0})_{[0, a]} \circledast f_{[a, 1]}$, ca în fig. 33 (cazul $n = 1$). Se găseşte $a = \dfrac{1 - t'}{2}$ şi deci

$$K((t_1, t_2,\ldots,t_n), t') = \begin{cases} x_0, & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1 - t'}{2}, \\ f\left(\dfrac{2t_1 + t' - 1}{1 + t'}, t_2,\ldots,t_n\right), & \dfrac{1 - t'}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Verificarea continuităţii aplicaţiei K, a condiţiilor pentru aceasta, precum şi construcţia unei omotopii $K' : f * e_{x_0} \simeq f$ rel ∂I^n, le lăsăm în seama cititorului.

Să verificăm acum relaţiile (6). Pentru un n-drum f şi pentru $s \in [0, 1]$, vom nota prin f_s n-drumul

(13) $\quad f_s : I^n \to X, \ f_s(t_1, t_2,\ldots,t_n) = f(st_1, t_2,\ldots,t_n).$

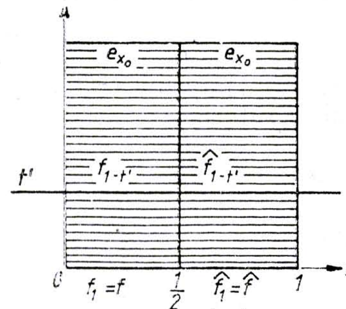


Fig. 34

Acesta poate fi privit ca o „porţiune" din n-drumul f. Cu notaţia (13), putem scrie $f * \hat{f} = f_1 * \hat{f}_1$. Apoi, $e_{x_0} = e_{x_0} * e_{x_0} = f_0 * \hat{f}_0$. Aceasta sugerează să construim o omotopie $L : f * \hat{f} \simeq e_{x_0}$ rel ∂I^n, luînd la nivelul t', $L_{t'} = f_{1-t'} * \hat{f}_{1-t'}$, observînd că n-drumurile acestea se pot compune (vezi fig. 34).

Aşadar, fie

$$L((t_1,\ldots,t_n), t') = \begin{cases} f_{1-t'}(2t_1, t_2,\ldots,t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ (\widehat{f_{1-t'}})(2t_1 - 1, t_2,\ldots,t_n), & \dfrac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f[2t_1(1 - t'), t_2,\ldots,t_n], & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ f[(2 - 2t_1)(1 - t'), t_2,\ldots,t_n], & \dfrac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Se arată uşor că L este în adevăr continuă şi satisface condiţiile necesare. Cu aceasta teorema este demonstrată.

TEOREMA 3. *Pentru $n \geqslant 2$ grupurile $\pi_n(X, x_0)$ sînt abeliene.*

Pentru demonstraţia teoremei vom stabili mai întîi:

LEMA 3. *Fie „$\circ$" şi „$*$" două legi de compoziţie interne pe o mulţime M, avînd acelaşi element neutru e şi fiind distributive una faţă de cealaltă. Atunci, cele două legi coincid şi sînt comutative* *).

*) Sînt şi asociative; demonstraţi aceasta.

Demonstrație. Fie $x, y, z \in M$. Atunci

$$x * y = (x \circ e) * (e \circ y) = (x * e) \circ (e * y) = x \circ y,$$

$$x * y = (e \circ x) * (y \circ e) = (e * y) \circ (x * e) = y \circ x,$$

deci $x \circ y = y \circ x$, adică legile coincid și sînt comutative.

Demonstrația Teoremei 3. Considerăm mulțimea $\pi_n(X, x_0)$, cu următoarele legi de compoziție interne:

$[f][g] = [f * g]$, cu $f * g$ definit de (1);

$[f] \circ [g] = [f \circ g]$, unde

$$(14) \quad (f \circ g)(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} f(t_1, \ldots, 2t_n), & 0 \leqslant t_n \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(t_1, \ldots, 2t_n - 1), & \frac{1}{2} \leqslant t_n \leqslant 1. \end{cases}$$

Această a doua lege de compunere are de asemenea elementul neutru $[e_{x_0}]$, ca și prima. De exemplu, $\bar{K} : e_{x_0} \circ f \simeq f$ rel ∂I^n pentru

$$\bar{K}((t_1, \ldots, t_n), t') = \begin{cases} x_0, & 0 \leqslant t_n \leqslant \frac{1-t'}{2}, \\ f\left(t_1, \ldots, \frac{2t_n + t' - 1}{1 + t'}\right), & \frac{1-t'}{2} \leqslant t_n \leqslant 1. \end{cases}$$

Operațiile sînt distributive una față de cealaltă

$$[(f * g) \circ (f' * g')](t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \begin{cases} (f * g)(t_1, \ldots, 2t_n), & 0 \leqslant t_n \leqslant \frac{1}{2}, \\ (f' * g')(t_1, \ldots, 2t_n - 1), & \frac{1}{2} \leqslant t_n \leqslant 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, 2t_n), & 0 \leqslant t_n \leqslant \frac{1}{2}, \ 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, 2t_n), & 0 \leqslant t_n \leqslant \frac{1}{2}, \ \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \\ f'(2t_1, t_2, \ldots, 2t_n - 1)), & \frac{1}{2} \leqslant t_n \leqslant 1, \ 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ g'(2t_1 - 1, t_2, \ldots, 2t_n - 1), & \frac{1}{2} \leqslant t_n \leqslant 1, \ \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (f \circ f')(2t_1, t_2, \ldots, t_n), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ (g \circ g')(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), & \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases} =$$

$$= [(f \circ f') * (g \circ g')] \ (t_1, \ldots, t_n).$$

Aplicînd Lema 3, avem $[f][g] = [f] \circ [g] = [g][f]$.

DEFINIȚIA 2. Grupul $\pi_1(X, x_0)$ se numește și *grupul fundamental al spațiului X, cu punctul bază* x_0.

OBSERVAȚIA 1. Teorema 3 nu este valabilă în cazul grupului fundamental, după cum vom vedea mai tîrziu. În ceea ce privește demonstrația Teoremei 3, aceasta nu se mai poate utiliza pentru $n = 1$, deoarece nu putem arăta că legea de compunere (3) este distributivă față de sine însăși.

DEFINIȚIA 3. Un spațiu topologic punctat (Y, y_0) se numește *H-spațiu**) dacă este dată o aplicație continuă $Y \times Y \to Y$, $(y_1, y_2) \mapsto y_1 \cdot y_2$ și două omotopii, $S, D : Y \times I \to Y$, cu $S(y, 0) = y_0 \cdot y$, $S(y, 1) = y$, $S(y_0, t) = y_0$ și $D(y, 0) = y \cdot y_0$, $D(y, 1) = y$, $D(y_0, t) = y_0$, $\forall\, y \in Y$, $\forall\, t \in I$.

---

*) sau *spațiu Hopf*.

DEFINIȚIA 4. Se numește *grup topologic* un grup G, dotat cu o topologie, în raport cu care operațiile de compunere $G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto xy$, și de inversare, $G \to G$, $x \mapsto x^{-1}$, sînt continue.

COROLAR 1. *Dacă G este un grup topologic cu elementul neutru e, atunci spațiul punctat (G, e) este un H-spațiu.*

TEOREMA 4. *Dacă (Y, y_0) este un H-spațiu, atunci $\pi_1(Y, y_0)$ este abelian.*

Demonstrație. Dacă α, β sînt 1-drumuri închise în (Y, y_0), putem defini *produsul* lor, $(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$. Dacă $F : \alpha' \simeq \alpha$ rel ∂I și $G : \beta' \simeq \beta$ rel ∂I, atunci $F \cdot G : \alpha' \cdot \beta' \simeq \alpha \cdot \beta$ rel ∂I, unde $(F \cdot G)(t, t') = F(t, t') \cdot G(t, t')$. Avem $(F \cdot G)(t, 0) = \alpha'(t) \cdot \beta'(t)$, $(F \cdot G)(t, 1) = \alpha(t) \cdot \beta(t)$, $(F \cdot G)(0, t') = y_0 \cdot y_0 = y_0$ (din Def. 3) și $(F \cdot G)(1, t') = y_0 \cdot y_0 = y_0$.

Rezultă că putem defini și produsul a două clase

(15) $$[\alpha] \cdot [\beta] = [\alpha \cdot \beta].$$

Avem $(\alpha \cdot e_{y_0})(t) = \alpha(t) \cdot y_0 = D(\alpha(t), 0)$, astfel că dacă definim $H : I \times I \to Y$, prin $H(t, t') = D(\alpha(t), t')$, rezultă $H : \alpha \cdot e_{y_0} \simeq \alpha$ rel ∂I, prin urmare $[\alpha] \cdot [e_{y_0}] = [\alpha]$. În mod analog, utilizînd omotopia S, deducem că $[e_{y_0}][\alpha] = [\alpha]$.

Pentru a aplica Lema 3 mulțimii $\pi_1(Y, y_0)$ și legilor de compoziție (3) și (15), să arătăm că acestea sînt distributive una față de alta. Avem

$$[(\alpha * \beta) \cdot (\alpha' * \beta')](t) = (\alpha * \beta)(t) \cdot (\alpha' * \beta')(t) =$$

$$= \begin{cases} \alpha(2t) \cdot \alpha'(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \beta(2t-1) \cdot \beta'(2t-1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} (\alpha \cdot \alpha')(2t), & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ (\beta \cdot \beta')(2t-1), & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} =$$

$$= [(\alpha \cdot \alpha') * (\beta \cdot \beta')]\,(t).$$

Se poate aplica deci Lema 3 și avem

$$[\alpha][\beta] = [\alpha] \cdot [\beta] = [\beta][\alpha].$$

OBSERVAȚIA 2. Prin intermediul bijecției Φ din Teorema 1, putem introduce pe mulțimea $[(S^n, p_0), (X, x_0)]$ o structură de grup, în raport cu care Φ devine un izomorfism de grupuri.

Pentru a descrie analitic compunerea *n-drumurilor sferice* $f, g : (S^n, p_0) \to (X, x_0)$, să notăm :

$$I^n_- = \{t = (t_1, \ldots, t_n) \mid 0 \leqslant t_1 \leqslant 1/2\},$$

$$I^n_+ = \left\{t = (t_1, \ldots, t_n) \,\middle|\, \frac{1}{2}, \leqslant t_1 \leqslant 1\right\},$$

și fie $S^n_- = \{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid x_2 \leqslant 0\}$, $S^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_{n+1} \mid x_2 \geqslant 0\}$.

Cu notațiile din Teorema 1 (și din Prop. 7 și exerc. 7 §11 Cap. I), dacă $t = (t_1, \ldots, t_n) \in I^n_-$, atunci $l(t) = (2t_1 - 1, 2t_2 - 1, \ldots, 2t_n - 1)$, cu $2t_1 - 1 \in [-1, 0]$, ceea ce implică $\varphi(t) = (\lambda(2t_1 - 1), \lambda(2t_2 - 1), \ldots, \lambda(2t_n - 1))$, unde $\lambda(2t_1 - 1) \leqslant 0$. Aceasta atrage $\theta\varphi(t) \in S^n$ (vezi definiția aplicației θ). În mod analog obținem incluziunea $\theta\varphi(I^n_+) \subset S^n_+$.

Să considerăm acum aplicația $q : S^n \to S^n \vee S^n$, obținută identificînd punctele ecuatorului $x_2 = 0$, al sferei S^n, la un punct. Dacă $f', g' : (S^n, p_0) \to (X, x_0)$, definim $f' * g' : (S^n, p_0) \to (X, x_0)$ prin $f' * g' = (f' \vee g')q$. Atunci, în baza celor de mai sus, avem $\Phi([f'][g']) = \Phi([f' * g']) = \Phi[f']\,\Phi[g']$ (vezi și fig. 35).

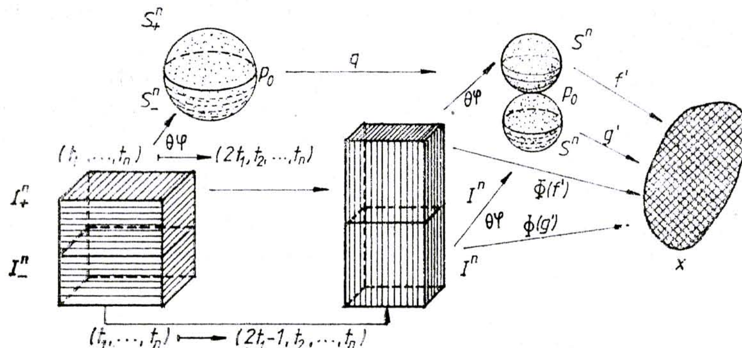


Fig. 35

Vom da o nouă descriere a grupurilor $\pi_n(X, x_0)$, care arată legătura acestora cu functorul $X \to \pi_0(X)$ (vezi § 7 Cap. I).

Fie X un spațiu topologic. Notăm cu $\mathrm{Top}(I^n, X)$ mulțimea tuturor n-drumurilor în X.

LEMA 4. *Fie K un compact în I^n și D deschisă în X. Notăm $B(K, D)=\{f \in \mathrm{Top}\,(I^n, X) \mid f(K) \subset D\}$. Atunci, mulțimea $\mathscr{S} = \{B(K, D) \mid D$ deschisă în X, K un compact în $I^n\}$ este subbază pentru o topologie pe $\mathrm{Top}\,(I^n, X)$. Topologia astfel definită se numește* **topologia compact deschisă** *).

Demonstrație. După Teorema 3 § 2 Cap. I, este suficient să observăm că $\mathrm{Top}\,(I^n, X) = B(I^n, X)$.

Baza topologiei compact deschise este formată din submulțimile de forma $\bigcap_{i=1}^{r} B(K_i, D_i)$.

LEMA 5. *Aplicația de evaluare $\omega : \mathrm{Top}\,(I^n, X) \times I^n \to X$, definită prin $\omega(f\,; t_1, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_n)$, este continuă.*

Demonstrație. Fie $(f\,; (t_1, \ldots, t_n)) \in \mathrm{Top} : (I^n, X) \times I^n$ și fie D o vecinătate deschisă a lui $\omega(f\,; (t_1, \ldots, t_n)) = f(t_1, \ldots, t_n)$. Atunci, $t = (t_1, \ldots, t_n) \in f^{-1}(D)$. Deoarece I^n este spațiu local compact, există o vecinătate compactă $K \in \mathscr{V}(t)$ în I^n, încît să avem $K \subset f^{-1}(D)$. Considerăm $B(K,D) \times \mathrm{Int}\, K \subset \mathrm{Top}(I^n, X) \times I^n$. Aceasta este o vecinătate deschisă pentru (f, t). Mai mult, dacă $(f', t') \in B(K, D) \times \mathrm{Int}\, K$, atunci $f'(K) \subset D$ și $t' \in \mathrm{Int}\, K$, deci $f'(t') \in D$, adică $\omega(f', t') \in D$, și prin urmare $\omega[B(K, D) \times \mathrm{Int}\, K] \subset D$.

Fie (X, x_0) un spațiu topologic punctat și $\Omega_n(X, x_0) = \{f \in \mathrm{Top}\,(I^n, X) \mid f(\partial I^n) = x_0\}$, mulțimea n-drumurilor închise în x_0.

LEMA 6. *Dacă X este un spațiu Hausdorff, atunci $\Omega_n(X, x_0)$ este o submulțime închisă în spațiul $\mathrm{Top}(I^n, X)$, dotat cu topologia compactă deschisă.*

Demonstrație. Fie $\omega_i, \omega_i' : \mathrm{Top}\,(I^n, X) \to \mathrm{Top}\,(I^{n-1}, X)$, definite prin

$$\omega_i(f)(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_n),$$
$$\omega_i'(f)\,(t_1, \ldots, t_{i-1}, t_{i+1}, \ldots, t_n) = f(t_1, \ldots, t_{i-1}, 1, t_{i+1}, \ldots, t_n).$$

*) Dacă X este spațiu metric, atunci topologia compact deschisă coincide cu topologia metricii $d^*(f, g) = \sup d(f(t), g(t))$. Se poate consulta [13, p. 109].

Aceste aplicații sînt continue. În adevăr, dacă $B(K, D) \subset \mathrm{Top}\,(I^{n-1}, X) \Rightarrow \omega_i^{-1}(B(K(D)) = B(K', D)$, unde K' este o submulțime homeomorfă cu K. Rezultă deci că aplicațiile ω_i sînt continue. Analog, rezultă continuitatea aplicațiilor ω_i'. Pe de altă parte, putem scrie $\Omega_n(X, x_0) = \bigcap_{i=1}^{n-1} [\omega_i^{-1}(e_{x_0}) \cap \omega_i'^{-1}(e_{x_0})]$. Deoarece spațiul X este spațiu Hausdorff, rezultă ușor că spațiul $\mathrm{Top}\,(I^{n-1}, X)$ este Hausdorff*) și deci $\{e_{x_0}\}$ este închisă în $\mathrm{Top}\,(I^{n-1}, X)$. Rezultă că $\Omega_n(X, x_0)$ este închisă.

NOTAȚIA 2. $B_0(K, D)$ va desemna mulțimea $B(K, D) \cap \cap\, \Omega_n(X, x_0)$.

TEOREMA 5. *n-drumurile $f, g \in \Omega_n(X, x_0)$ sînt în aceeași componentă liniar conexă a lui $\Omega_n(X, x_0)$ dacă și numai dacă $f \simeq g$ rel ∂I^n.*

Demonstrație. Fie $f, g \in \Omega_n(X, x_0)$ în aceeași componentă liniar conexă și $\alpha : I \to \Omega_n(X, x_0)$ un drum, încît $\alpha(0) = f$ și $\alpha(1)) = g$. Definim $F : I^n \times I \to X$ prin $F(t, t') = \alpha(t')(t)$. Avem $F(t, t') = \omega(\alpha(t'), t)$ și, din Lema 5, rezultă că F este continuă. În plus, $F(t, 0) = \alpha(0)(t) = f(t)$, $F(t, 1) = \alpha(1)\,(t) = g(t)$, $F(\partial I^n, t') = \alpha(t')\,\partial(I^n) = x_0$, deci $F : f \simeq g$ rel ∂I^n.

Reciproc, dacă $F : f \simeq g$ rel ∂I^n, definim $\alpha : I \to \Omega_n(X, x_0)$ prin $\alpha(t')(t) = F(t, t')$. Orice valoare $\alpha(t')$ este o aplicație continuă în X, deoarece F este continuă. Este chiar în $\Omega_n(X, x_0)$, deoarece $\alpha(t')\,(\partial I^n) = F(\partial I^n, t') = x_0$. Aplicația α este continuă: fie $B_0(K, D)$ încît $\alpha(t') \in B_0(K, D)$, deci $t' \in \alpha^{-1}(B(K, D) \cap \Omega_n(X, x_0))$. Avem atunci $\alpha(t')\,(K) = F(K \times \{t'\}) \subset D$. Deoarece K este compact, există o deschisă D' în I, încît $t' \in D'$ și $F(K \times D') \subset D$*). Prin urmare, $t' \in D' \subset \alpha^{-1}(B_0(K, D))$, astfel că $\alpha^{-1}(B_0(K, D))$ este deschisă și deci α este continuă. În sfîrșit, $\alpha(0)(t) = F(t, 0) = f(t)$ și $\alpha(1)(t) = F(t, 1) = g(t)$.

COROLAR 2. *Mulțimile $\pi_n(X, x_0)$ și $\pi_1(\Omega_n(X, x_0))$ coincid.*

TEOREMA 6. *Pentru $n \geqslant 2$, există un izomorfism natural între grupurile $\pi_n(X, x_0)$ și $\pi_{n-1}(\Omega(X, x_0)), e_{x_0})$. Pentru $n = 1$ avem bijecția din* Cor. 2.)

*) Arătați aceasta.

Demonstrație. Să stabilim mai întîi că există o bijecție

$$\Phi : \Omega_n(X, x_0) \to \Omega_{n-1}(\Omega(X, x_0), e_{x_0}).$$

Fie $f \in \Omega_n(X, x_0)$. Definim $\Phi(f) = \bar{f}$, unde $\bar{f} : I^{n-1} \to \Omega(X, x_0)$ este $\bar{f}(t_1, \ldots, t_{n-1})(t) = f(t_1, \ldots, t_{n-1}, t)$. Datorită continuității lui f, fiecare valoare $\bar{f}(t_1, \ldots, t_{n-1})$ este continuă și definește un drum închis în (X, x_0). Însăși aplicația $\bar{f}$ este continuă. În adevăr, dacă $B_0(K, D) \subset \Omega(X, x_0)$ și $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \bar{f}^{-1}(B_0(K, D))$, atunci $\bar{f}((t_1, \ldots, t_{n-1}))(K) = f(\{(t_1, \ldots, t_{n-1})\} \times K) \subset D$ și, deoarece K este compact, există D' deschisă în I^{n-1}, încît $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in D'$ și $f(D' \times K) \subset D$, deci $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in D' \subset \bar{f}^{-1}(B_0(K, D))$. Așadar, $\bar{f}^{-1}(B_0(K, D))$ este deschisă, deci $\bar{f}$ este continuă. Dacă $(t_1, \ldots, t_{n-1}) \in \partial I^{n-1}$, atunci $(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) \in \partial I^n$ și prin urmare $\bar{f}(t_1, \ldots, t_{n-1})(t) = x_0$, adică $\bar{f}(\partial I^{n-1}) = \{e_{x_0}\}$. Avem deci $\bar{f} \in \Omega_{n-1}(\Omega(X, x_0), e_{x_0})$.

Reciproc, dacă $\bar{f} \in \Omega_{n-1}(\Omega(X, x_0), e_{x_0})$, definim $f : I^n \to X$ prin $f(t_1, \ldots, t_n) = \bar{f}(t_1, \ldots, t_{n-1})(t_n)$ și rezultă ușor că $f \in \Omega_n(X, x_0)$. Corespondența $\bar{f} \mapsto f$ definește inversa aplicației Φ.

Dacă $f, g \in \Omega_n(X, x_0)$ și $f \simeq g$ rel ∂I^n, atunci $\bar{f} \simeq \bar{g}$ rel ∂I^{n-1}. În adevăr, dacă $F : I^n \times I \to X$ realizează $f \simeq g$ rel ∂I^n, definim $\bar{F} : I^{n-1} \times I \to \Omega(X, x_0)$ prin
$\bar{F}((t_1, \ldots, t_{n-1}), t')(t) = F((t_1, \ldots, t_{n-1}, t), t')$.

Rezultă continuitatea lui $\bar{F}$, ca mai sus. Avem

$$\bar{F}((t_1, \ldots, t_{n-1}), 0)(t) = F((t_1, \ldots, t_{n-1}, t), 0) =$$

$$= f(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) = \bar{f}(t_1, \ldots, t_{n-1})(t),$$

adică $\quad \bar{F}((t_1, \ldots, t_{n-1}), 0) = \bar{f}(t_1, \ldots, t_{n-1}).$

În mod analog, $\bar{F}((t_1, \ldots, t_{n-1}), 1) = \bar{g}(t_1, \ldots, t_{n-1})$. Apoi, $\bar{F}(\partial I^{n-1}, t')(t) = F(\partial I^{n-1} \times \{t\} \times \{t'\}) = \{x_0\}$, deoarece

$\partial I^{n-1} \times \{t\} \subset \partial I^n$. Astfel, $\bar{F}(\partial I^{n-1}, t') = \{e_{x_0}\}$, $\forall t' \in I$,

adică, avem $\bar{F} : \bar{f} \simeq \bar{g}$ rel ∂I^{n-1}.

Reciproc, dacă $\bar{f}, \bar{g} \in \Omega_{n-1}(\Omega(X, x_0), e_{x_0})$ și $\bar{F} : \bar{f} \simeq \bar{g}$ rel ∂I^{n-1}, definim $F : I^n \times I \to X$ prin $F((t_1, \ldots, t_n), t') = \bar{F}((t_1, \ldots, t_{n-1}), t')(t_n)$ și se arată ușor că $F : f \simeq g$ rel ∂I^n.

În felul acesta, aplicația Φ induce bijecția

$$\hat{\Phi} : \pi_n(X, x_0) \to \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), e_{x_0}), \ \hat{\Phi}([f]) = [\bar{f}].$$

A mai rămas să arătăm că $\hat{\Phi}$ este un homomorfism pentru $n \geqslant 2$. Dacă $f, g \in \Omega_n(X, x_0)$, atunci

$$\overline{(f * g)}(t_1, \ldots, t_{n-1})(t) = (f * g)(t_1, \ldots, t_{n-1}, t) =$$

$$= \begin{cases} f(2t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ g(2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_{n-1}, t), & \dfrac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} \bar{f}(2t_1, \ldots, t_{n-1})(t), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \dfrac{1}{2}, \\ \bar{g}(2t_1 - 1, \ldots, t_{n-1})(t), & \dfrac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases}$$

deci $\overline{f * g}(t_1, \ldots, t_{n-1}) = (\bar{f} * \bar{g})(t_1, \ldots, t_{n-1})$, adică $\overline{f * g} = \bar{f} * \bar{g}$, care implică

$$\hat{\Phi}([f]\,[g]) = \hat{\Phi}[\overline{f * g}] = [\bar{f} * \bar{g}] =$$

$$= [\bar{f}]\,[\bar{g}] = \hat{\Phi}[f]\ \hat{\Phi}[g].$$

Aceasta încheie demonstrația teoremei.

TEOREMA 7. *Spațiul topologic punctat* $(\Omega_n(X, x_0), e_{x_0})$ *(cu topologia compact deschisă) este un H-spațiu, oricare ar fi* (X, x_0).

Demonstrație. Considerăm multiplicarea

$$m : \Omega_n(X, x_0) \times \Omega_n(X, x_0) \to \Omega_n(X, x_0), \quad m(f, g) = f * g.$$

Aplicația m este continuă deoarece

$$m^{-1}(B_0(K, D)) = \{(f, g) \in \Omega_n(X, x_0) \times \Omega_n(X, x_0) \mid$$

$$|(f * g)(K) \subset D\} = B_0(K_1, D) \times B_0(K_2, D),$$

unde $K_1 = \left\{t = (t_1, \ldots, t_n) \in K \mid 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}\right\}$ și $K_2 = \left\{t = (t_1, \ldots, t_n) \in K \mid \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1\right\}$.

Putem defini (vezi demonstrația Teoremei 2 §1) $S, D : \Omega_n(X, x_0) \times I \to \Omega_n(X, x_0)$ respectiv prin

$$S(f, t')(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} x_0, & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1-t'}{2}, \\ f\left(\frac{2t_1 + t' - 1}{t' + 1}, t_2, \ldots, t_n\right), & \frac{1-t'}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1, \end{cases}$$

$$D(f, t')(t_1, \ldots, t_n) = \begin{cases} f\left(\frac{2t_1}{t' + 1}, t_2, \ldots, t_n\right), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1+t'}{2}, \\ x_0, & \frac{1+t'}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Aplicînd lema de lipire (Teorema 2 §3), rezultă că valorile $S(f, t')$ și $D(f, t')$ sînt continue. Se verifică apoi ușor că fiecare din acestea definește cîte un drum închis în (X, x_0). Continuitatea aplicațiilor S și D rezultă din Lema 5 și din continuitatea aplicațiilor $\omega(S \times 1)$, $\omega(D \times 1) : (\Omega_n(X, x_0) \times I) \times I^n \to X$, aplicîndu-se raționamentul din Teorema 5. În sfîrșit, avem $S(f, 0) = e_{x_0} * f$, $S(f, 1) = f$, $S(e_{x_0}, t') = e_{x_0}$ și relații corespunzătoare pentru D, ceea ce arată că, în adevăr, $(\Omega_n(X, x_0), e_{x_0})$ este un H-spațiu.

OBSERVAȚIA 3. Avînd în vedere Teoremele 6, 7 și 4, regăsim rezultatul Teoremei 3.

DEFINIȚIA 5. Un spațiu topologic liniar conex se numește *n-conex* dacă grupurile $\pi_k(X, x_0)$ sînt nule pentru orice întreg $1 \leqslant k \leqslant n$ și orice punct $x_0 \in X$*).

*) Vezi paragraful următor.

Un spațiu 1-conex se mai numește *simplu conex*. De asemenea, putem extinde denumirea și în cazul $n = 0$, numind spațiile liniar conexe spații *0-conexe*.

TEOREMA 8. *Orice spațiu contractibil este n-conex, pentru orice* $n \geqslant 0$.

Demonstrație. Conform Corolarului 3 §13 Cap. I, un spațiu contractibil este liniar conex. Fie apoi $n \geqslant 1$ și $[f] \in [(S^n, p_0), (X, x_0)]$ pentru X un spațiu contractibil. Aplicația $f : S^n \to X$ este omotopă cu o aplicație constantă (Cor. 2 §13 Cap. I). Rezultă atunci, conform Teoremei 5 §13 Cap. I, că $f : (S^n, p_0) \to (X, x_0)$ este nul omotopă relativ la $\{p_0\}$, deci $f \simeq e_{x_0}$ rel $\{p_0\}$. Aceasta arată că mulțimea $[(S^n, p_0), (X, x_0)]$ conține o singură clasă (a aplicației constante) și, folosind Teorema 1 §1, deducem că $\pi_n(X, x_0) = \{e_{x_0}\}$.

EXERCIȚII

1. a) Să se arate că dacă $\varphi : I = [0, 1] \to I$ este o aplicație continuă, atunci pentru un n-drum închis $f \in \Omega_n(X, x_0)$, avem

$$f_\varphi \simeq \begin{cases} f & \text{dacă } \varphi(1) = 1, \\ e_{x_0} & \text{dacă } \varphi(1) = 0. \end{cases}$$

b) Utilizînd aplicațiile

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{4}, \\ t + \frac{1}{4}, & \frac{1}{4} \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \frac{t}{2} + \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \qquad \varphi_2(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ 2t - 1, & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$\varphi_3(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ -2t + 2, & \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

respectiv pentru n-drumurile

$f_1 = (f * g) * h$, $f_2 = f$, $f_3 = \bar{f}$, cu $f, g, h \in \Omega_n(X, x_0)$, să se deducă relațiile (4), (5), (6) din Teorema 2.

2. Să se construiască o omotopie

$$H:(f*g)*(h*k)\simeq f*((g*h)*k)) \text{ rel } \partial I^n.$$

3. Dacă $(X, \mathscr{T}_1)$ este un spațiu discret, atunci $\forall x_0\in X$, $\pi_n(X, x_0) = 0$, $n\geqslant 1$.

4. Să se arate că pentru spațiul topologic $\mathbb{Q}$ al numerelor raționale, cu topologia uzuală, avem $\pi_n(\mathbb{Q}, x_0)=0$, $\forall\ n>1$, $\forall\ x_0\in\mathbb{Q}$.

Indicație. $\mathbb{Q}$ are numai n-drumuri constante deoarece submulțimile conexe ale lui $\mathbb{Q}$ sînt numai punctele (Obs. 3 § 7 Cap. I).

5. Să se arate că $(\Omega(X, x_0), e_{x_0})$ este un *H-grup*, adică multiplicarea m din Teorema 7 este asociativă, deci există $H: m(m\times 1)\simeq m(1\times m)$, și dacă $\varphi:\Omega(X, x_0)\to\Omega(X, x_0)$ este aplicația $\varphi(\alpha)=\hat{\alpha}$, atunci φ este continuă și există $K: m(1\times\varphi)\Delta\simeq e_{x_0}$, $K': m(\varphi\times 1)\Delta\simeq e_{x_0}$, unde e_{x_0} este aplicația constantă, iar Δ este *aplicația diagonală* $\Delta(\alpha)=(\alpha, \alpha)$ a spațiului $\Omega(X, x_0)$.

§ 2. Schimbarea punctului bază

OBSERVAȚIA 1. Dacă (X, x_0) este un spațiu topologic cu punct bază și dacă L_{x_0} este componenta liniar conexă a lui x_0, atunci $\pi_n(X, x_0)=\pi_n(L_{x_0}, x_0)$, $\forall n\geqslant 1$, deoarece $\Omega_n(X, x_0)=\Omega_n(L_{x_0}, x_0)$ și orice omotopie $H:(I^n\times I, \partial I^n\times I)\to(X, x_0)$ este o omotopie în L_{x_0}.

Dacă $x_1\notin L_{x_0}$, atunci, în general, $\pi_n(X, x_0)\neq\pi_n(X, x_1)$ și nu se poate stabili nici o relație între aceste grupuri.

TEOREMA 1. *Fie x_0 și x_1 două puncte ale unui spațiu topologic X, situate în aceeași componentă liniar conexă. Atunci, pentru un drum α în X, de la x_0 la x_1, se poate defini un izomorfism de grupuri $h_\alpha:\pi_n(X, x_0)\to\pi_n(X, x_1)$, $n\geqslant 1$, cu următoarele proprietăți:*

a) *Dacă $\alpha\simeq\beta$ rel ∂I, atunci $h_\alpha=h_\beta$;*

b) $h_{e_{x_0}}=1_{\pi_n(X, x_0)}$;

c) *Dacă β este un drum de la x_1 la x_2, atunci $h_{\alpha*\beta}=h_\beta\circ h_\alpha$.*

Demonstrație. a) Fie $f\in\Omega_n(X, x_0)$, $n\geqslant 1$. Considerăm diagrama de mai jos, unde $F(\bar{t}, t')=\alpha(t')$, $\forall\,\bar{t}\in\partial I^n$, $t'\in I$. Avem atunci $F(\bar{t},0)=\alpha(0)=x_0=f(\partial I^n)$. Aplicînd Corolarul 5 § 14 Cap. I, există $G: I^n\times I\to X$, încît $G(t, 0)=f(t)$, $G(\bar{t}, t')=F(\bar{t}, t')=\alpha(t')$, $\forall t\in I^n$, $\bar{t}\in\partial I^n$, $\bar{t}'\in I$. Vom defini

$$\begin{array}{ccc} \partial I^n & \hookrightarrow & I^n \\ \downarrow & {}^{F}\searrow\ X\ \swarrow^{f} & \downarrow \\ \partial I^n\times I & \hookrightarrow & I^n\times I \end{array}$$

atunci $f': I^n\to X$ prin $f'(t)=G(t, 1)$. Avem astfel $f'(\bar{t})=G(\bar{t}, 1)=F(\bar{t}, 1)=\alpha(1)=x_1$, deci $f':(I^n, \partial I^n)\to(X, x_1)$, adică $f'\in\Omega_n(X, x_1)$. Pentru a putea defini $h_\alpha[f]=[f']$, avem de arătat că $[f']$ nu depinde de alegerea particulară a lui f', deci de reprezentantul clasei $[f]$ și de alegerea lui G. Vom arăta aceasta simultan cu a). Fie deci $\beta\simeq\alpha$ rel ∂I și $G': I^n\times I\to X$, cu $G'(t, 0)=g(t)$, $G'(\bar{t}, t')=\beta(t')$, unde $g\simeq f$ rel ∂I^n. Luăm $g'(t)=G'(t, 1)$ și trebuie să arătăm că $[f']=[g']$. Avem $f'\simeq f\simeq g\simeq g'$, dar omotopia între g' și f' nu este rel ∂I^n, deci încă nu putem deduce relația $[f']=[g']$. Să notăm totuși prin H omotopia compusă de mai sus, $H: f'\simeq g'$. Avem

$$H(t, t')=\begin{cases} G(t, 1-3t'), & 0\leqslant t'\leqslant \dfrac{1}{3}, \\[2ex] L(t, 3t'-1), & \dfrac{1}{3}\leqslant t'\leqslant\dfrac{2}{3}, \quad t\in I^n, \quad t'\in I, \\[2ex] G'(t, 3t'-2), & \dfrac{2}{3}\leqslant t'\leqslant 1, \end{cases}$$

unde $L: f\simeq g$ rel ∂I^n. În acest fel avem

$$H(\bar{t}, t')=\begin{cases} \alpha(1-3t'), & 0\leqslant t'\leqslant\dfrac{1}{2}, \\[2ex] x_0, & \dfrac{1}{2}\leqslant t'\leqslant\dfrac{2}{3} \end{cases} =(\hat{\alpha}*e_{x_0}*\beta)(t'),\ \forall\,\bar{t}\in\partial I^n, t'\in I.$$
$$\qquad\begin{cases} \beta(3t'-2), & \dfrac{2}{3}\leqslant t'\leqslant 1. \end{cases}$$

Deoarece $\beta\simeq\alpha$ rel ∂I rezultă că există $h:\hat{\alpha}*e_{x_0}*\beta\simeq e_{x_1}$ rel ∂I *).

Construim aplicația: $K:(I^n\times\{0\}\cup I^n\times\{1\}\cup\partial I^n\times I)\times I\to X$ prin $K(t, 0, t'')=f'(t)$, $K(t, 1, t'')=g'(t)$, $K(\bar{t}, t', t'')=h(t', t'')$, $t\in I^n$, $\bar{t}\in\partial I^n$, $t'\in I$ și putem considera diagrama

---

*) Arătați aceasta.

$$\begin{array}{ccc}
I^n\times\{0\}\cup I^n\times\{1\}\cup\partial I^n\times I & \hookrightarrow & I^n\times I \\
\downarrow & \overset{K}{\searrow} \ X \ \overset{H}{\swarrow} & \downarrow \\
(I^n\times\{0\}\cup I^n\times\{1\}\cup\partial I^n\times I)\times I & \longrightarrow & (I^n\times I)\times I
\end{array}$$

Aplicînd Corolarul 5 §14 Cap. I, există $K' : (I^n \times I) \times I \to X$, încît

$$K'(t, t', 0) = H(t, t') \text{ și } K'(t, 0, t'') = f'(t), \ K'(t, 1, t'') =$$

$$= g'(t), \ K'(\bar{t}, t', t'') = h(t', t''), \ t \in I^n, \ t', t'' \in I, \quad \bar{t} \in \partial I^n.$$

Luăm $H' : I^n \times I \to X$, $H'(t, t') = K'(t, t', 1)$. Avem atunci

$$H'(t, 0) = K'(t, 0, 1) = f'(t), \ H'(t, 1) =$$

$$= K'(t, 1, 1) = g'(t), \ H'(\bar{t}, t') = K'(\bar{t}, t', 1) = h(t', 1) = x_1,$$

și astfel $H' : f' \simeq g'$ rel ∂I^n, deci $h_\alpha[f]$ este bine definită și $h_\alpha[f] = h_\beta[f]$.

Să arătăm că h_α este un homomorfism de grupuri. Dacă $f_1, f_2 \in \Omega_n(X, x_0)$, fie $G_1, G_2 : I^n \times I \to X$, cu $G_i(t, 0) = f_i(t)$, $G_i(\bar{t}, t') = \alpha(t')$. Avem atunci $h_\alpha[f_i] = [f_i']$, cu $f_i'(t) = G_i(\bar{t}, 1)$.

Definim $G : I^n \times I \to X$ prin

$$G((t_1, \ldots, t_n), t') = \begin{cases} G_1((2t_1, t_2, \ldots, t_n), t'), & 0 \leqslant t_1 \leqslant \frac{1}{2}, \\ G_2((2t_1 - 1, t_2, \ldots, t_n), t'), & \frac{1}{2} \leqslant t_1 \leqslant 1. \end{cases}$$

Avem

$$G(t, 0) = (f_1 * f_2)(t), \ G(\bar{t}, t') = \alpha(t'),$$

$$G(t, 1) = (f_1' * f_2')(t), \quad t = (t_1, \ldots, t_n), \ \bar{t} \in \partial I^n.$$

Deci, $h_\alpha[f_1 * f_2] = [f_1' * f_2'] = h_\alpha[f_1] h_\alpha[f_2]$, adică h_α este homomorfism de grupuri. Va rezulta că este un izomorfism, din b) și c).

b) Este evidentă, luînd $G(t, t') = f(t)$.

c) Fie $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, cu $G : I^n \times I \to X$, $G(t, 0) = f(t)$, $G(\bar{t}, t') = \alpha(t')$, $G(t, 1) = f'(t)$ și deci $h_\alpha[f] = [f']$. Fie acum $G' : I^n \times I \to X$, cu $G'(t, 0) = f'(t)$, $G'(\bar{t}, t') = \beta(t)$; $G'(t, 1) = f''(t)$ și $h_\beta(h_\alpha[f]) = [f'']$. Definim $G'' : I^n \times I \to X$ prin

$$G''(t, t') = \begin{cases} G(t, 2t'), & 0 \leqslant t' \leqslant \frac{1}{2}, \\ G'(t, 2t' - 1), & \frac{1}{2} \leqslant t' \leqslant 1. \end{cases}$$

G'' este continuă, $G''(t, 0) = G(t, 0) = f(t)$, $G''(\bar{t}, t') = (\alpha * \beta)(t')$ și $G''(t, 1) = G'(t, 1) = f''(t)$, deci $h_{\alpha*\beta}[f] = [f'']$. Rezultă acum că h_α este izomorfism, cu $h_\alpha^{-1} = h_{\hat{\alpha}}$.

COROLAR 1. *Pentru un spațiu liniar conex, X, toate grupurile $\pi_n(X, x)$ sînt izomorfe, pentru n fixat $\geqslant 1$, cînd $x \in X$.*

OBSERVAȚIA 2. Există probleme în care este important să nu identificăm grupurile $\pi_n(X, x_0)$ și $\pi_n(X, x_1)$ în Teorema 1, atît timp cît izomorfismul $h_{[\alpha]}$ depinde de clasa de omotopie a drumului α.

COROLAR 2. *Pentru (X, x_0) un spațiu topologic punctat, grupul fundamental $\pi_1(X, x_0)$ acționează la dreapta pe $\pi_n(X, x_0)$, $n \geqslant 1$, prin $h : \pi_1(X, x_0) \to \mathrm{Aut}(\pi_n(X, x_0))$, $h([\alpha]) = h_{[\alpha]}$* *).

DEFINIȚIA 1. Un spațiu topologic liniar conex se numește *n-simplu* ($n \geqslant 1$) dacă pentru un punct $x_0 \in X$ grupul $\pi_1(X, x_0)$ acționează trivial pe $\pi_n(X, x_0)$.

COROLAR 3. a) *Pentru un spațiu n-simplu X, $\forall x \in X$ grupul $\pi_1(X, x)$ acționează trivial pe $\pi_n(X, x)$.*

---

*) $\mathrm{Aut}(G)$ notează grupul automorfismelor lui G.

b) *Pentru un spațiu n-simplu, izomorfismele* h_α *și* $h_\beta : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, x_1)$ *coincid, oricare ar fi drumurile* α, β *de la* x_0 *la* x_1.

Demonstrație. a) Fie $x_0 \in X$, încît $\pi_1(X, x_0)$ acționează trivial pe $\pi_n(X, x_0)$ și fie $[\alpha] \in \pi_1(X, x)$, $[f] \in \pi_n(X, x)$ pentru un punct oarecare $x \in X$. Fie ω un drum de la x_0 la x. Atunci, $\omega * \alpha * \hat{\omega}$ este un drum închis în (X, x_0). Avem $h_{\omega*\alpha*\hat{\omega}}[g] = [g]$, $\forall [g] \in \pi_n(X, x_0)$, adică $h_{\hat{\omega}} h_\alpha h_\omega [g] = [g]$. Fie $h_\omega[g] = [f]$. Avem $h_{\hat{\omega}} h_\alpha [f] = [g]$ și aplicînd h_ω, deducem $h_\alpha[f] = h_\omega[g] = [f]$, care dovedește a).

b) $\alpha * \hat{\beta}$ este un drum închis în (X, x_0) și avem $h_{\alpha*\hat{\beta}} = 1_{\pi_n(X, x_0)}$, adică $h_{\hat{\beta}} \circ h_\alpha = 1_{\pi_n(X, x_0)}$ și deci $h_\alpha = h_\beta$.

TEOREMA 2. *Un H-spațiu liniar conex este n-simplu,* $\forall n \geqslant 1$.

Demonstrație. Fie (X, x_0) un H-spațiu cu multiplicarea $m : X \times X \to X$ și fie $\alpha \in \Omega_1(X, x_0)$, $f \in \Omega_n(X, x_0)$. Considerăm m', $m'' : X \to X$, $m'(x) = m(x, x_0)$, $m''(x) = m(x_0, x)$. Avem $m' \simeq m'' \simeq 1_X$ rel $\{x_0\}$. Rezultă $[f] = [m'f]$ și $[\alpha] = [m''\alpha]$. Definim $F : I^n \times I \to X$, $F(t, t') = m(f(t), \alpha(t'))$. Avem $F(t, 0) = m(f(t), x_0) = m'f(t)$, $F(\bar{t}, t') = m(f(\bar{t}), \alpha(t')) = m(x_0, \alpha(t')) = (m''\alpha)(t')$ și $F(t, 1) = m(f(t), \alpha(1)) = m(f(t), x_0) = (m'f)(t)$. Deci, $h_{[\alpha]}[f] = h_{[m''\alpha]}[m'f] = [m'f] = [f]$.

TEOREMA 3. *Pentru* $n = 1$, *izomorfismul* $h_{[\alpha]}$ *din Teorema 1 este definit prin* $h_{[\alpha]}[\beta] = [(\hat{\alpha} * \beta) * \alpha] = [\hat{\alpha} * \beta * \alpha]$. *În particular, dacă* $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, *atunci izomorfismul* $h_{[\alpha]} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ *este automorfismul de conjugare* $h_{[\alpha]}[\beta] = [\alpha]^{-1}[\beta][\alpha]$.

Demonstrație. Considerăm aplicația

$G : I^2 \to X$, $G(t, t') = ((\hat{\alpha}_{t'} * \beta) * \alpha_{t'})(t)$ (vezi Notația 13 § 1). Aceasta este continuă, cum se constată imediat. Avem apoi, $G(t, 0) = ((e_{x_0} * \beta) * e_{x_0})(t)$, $G(t, 1) = ((\hat{\alpha} * \beta) * \alpha)(t)$, $G(0, t') = ((\hat{\alpha}_{t'} * \beta) * \alpha_{t'})(0) = \hat{\alpha}_{t'}(0) = \alpha_{t'}(1) = \alpha(t')$ și $G(1, t') = ((\hat{\alpha}_{t'} * \beta) * \alpha_{t'})(1) = \alpha_{t'}(1) = \alpha(t')$. Rezultă că $h_{[\alpha]}[(e_{x_0} * \beta) * e_{x_0}] = [(\hat{\alpha} * \beta) * \alpha]$, adică $h_{[\alpha]}[\beta] = [\hat{\alpha} * \beta * \alpha]$.

COROLAR 4. *Un spațiu topologic liniar conex X este 1-simplu dacă și numai dacă pentru un punct* $x_0 \in X$ *(și deci pentru toate) grupul* $\pi_1(X, x_0)$ *este abelian.*

EXERCIȚII

1. Fie $\pi_n'(X, x_0)$ subgrupul lui $\pi_n(X, x_0)$ generat de toate elementele de forma $[f] - h_{[\alpha]}[f]$, pentru $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ (pentru $n = 1$ acesta este interpretat ca $[f] \cdot (h_{[\alpha]}[f])^{-1}$). Să se arate că:

a) $\pi_n'(X, x_0)$ este subgrup normal al grupului $\pi_n(X, x_0)$;

b) Dacă X este liniar conex și $\pi_n^*(X, x_0) = \pi_n(X, x_0)/\pi_n'(X, x_0)$, atunci o clasă de omotopie (fără punct bază) de aplicații $f : S^n \to X$ definește un unic element al grupului $\pi_n^*(X, x_0)$ (pe care deci îl putem nota $\pi_n^*(X)$).

Indicație. Se poate consulta [43, p. 150].

2. Să se arate că două drumuri α și β de la x_0 la x_1, în spațiul X, definesc același izomorfism $h_\alpha = h_\beta : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ dacă și numai dacă $[\alpha * \hat{\beta}]$ aparține centrului lui $\pi_1(X, x_0)$ *).

3. Să se explicíteze și să se dovedească continuitatea aplicației G din demonstrația Teoremei 3.

4. Să se arate că dacă $\alpha \in \Omega(X, x_0)$, atunci există $\alpha' \in \Omega(\Omega(X, x_0), e_{x_0})$, încît, pentru $n \geqslant 2$, este comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), e_{x_0}) \\ {\scriptstyle h_\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h_{\alpha'}} \\ \pi_n(X, x_0) & \xrightarrow{\hat{\Phi}} & \pi_{n-1}(\Omega(X, x_0), e_{x_0}), \end{array}$$

unde $\hat{\Phi}$ este izomorfismul din Teorema 6 § 1.

Dacă $\alpha \simeq \beta$ rel ∂I, atunci $\alpha' \simeq \beta'$ rel ∂I.

§ 3. Invarianța omotopică a grupurilor de omotopie

TEOREMA 1. *Fie* $[\varphi] \in [(X, x_0), (Y, y_0)]$. *Atunci,* $\forall n \geqslant 1$, *este bine definit un homomorfism* $[\varphi]_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$, *prin* $[\varphi]_*[f] = [\varphi \circ f]$ **), $[f] \in \pi_n(X, x_0)$ *și acesta are următoarele proprietăți:*

i) *Dacă* $[\psi] \in [(Y, y_0), (Z, z_0)]$, *atunci* $\psi_* \varphi_* = (\psi\, \varphi)_*$;

ii) *Dacă* $1_X : (X, x_0) \to (X, x_0)$ *este aplicația identică, atunci* $(1_X)_* = 1_{\pi_n(X, x_0)}$;

iii) *Dacă* α *este un drum în* X, *de la* x_0 *la* x_1, *și dacă* $\varphi(x_1) = y_1$, *atunci*

$$\varphi_* h_{[\alpha]} = h_{[\varphi\alpha]} \varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_1).$$

Demonstrație. Dacă $[f] = [g]$, adică $f \simeq g$ rel ∂I^n, atunci (Teorema 2, § 13 Cap. I) $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ g$ rel ∂I^n, iar

*) *Centrul grupului G este* $Z(G) = \{a \in G \mid ab = ba,\ \forall b \in G\}$.

**) Vom nota $[\varphi]_*$ și prin φ_*.

dacă $\varphi \simeq \varphi' :(X, x_0) \to (Y, y_0) \Rightarrow \varphi \circ f \simeq \varphi' \circ f$. Este bine definită deci aplicația $[\varphi]_*$. Aceasta este un homomorfism, deoarece dacă $f, g \in \Omega_n(X, x_0)$, atunci $\varphi \circ (f * g) = (\varphi \circ f) * (\varphi \circ g)$, care implică $[\varphi]_*([f][g]) = ([\varphi]_*[f])([\varphi]_*[g])$.

Proprietățile i) și ii) se verifică imediat. Să dovedim proprietatea iii). Fie $[f] \in \pi_n(X, x_0)$. Avînd în vedere Teorema 1 § 2, fie $G : I^n \times I \to X$, încît $G(t, 0) = f(t)$, $G(\partial I^n, t') = \alpha(t')$. Atunci, notînd $G(t, 1) = g(t) \Rightarrow h_{[\alpha]}[f] = [g]$ și prin urmare $\varphi_* h_{[\alpha]}[f] = [\varphi \circ g]$. Să observăm acum că $\varphi \circ G : I^n \times I \to Y$ satisface condițiile $(\varphi \circ G)(t, 0) = (\varphi f)(t)$, $(\varphi \circ G)(\partial I^n, t') = (\varphi \circ \alpha)(t')$, $(\varphi \circ G)(t, 1) = (\varphi g)(t)$, de unde deducem $(h_{[\varphi\alpha]} \varphi_*)[f] = h_{[\varphi\alpha]}[\varphi \circ f] = [\varphi \circ g] = (\varphi_* h_{[\alpha]})[f]$.

TEOREMA 2. *Fie $\varphi : X \to Y$, o echivalență omotopică. Atunci, pentru orice $x_0 \in X$, cu $y_0 = \varphi(x_0)$ și $n \geq 1$, homomorfismul $\varphi_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ este izomorfism* *).

Demonstrație. Fie $\psi : Y \to X$ invers omotopă cu φ. Fie $F : X \times I \to X$, $F(x, 0) = \psi\varphi(x)$, $F(x, 1) = x$ și $[f] \in \pi_n(X, x_0)$. Atunci, putem considera $G = F(f \times 1) : I^n \times I \to X$. Avem $G(t, 0) = F(f(t), 0) = (\psi \circ \varphi \circ f)(t)$, $G(t, 1) = F(f(t), 1) = f(t)$. Notăm $G(\partial I^n, t') = F(x_0, t') = \alpha(t')$. Avem atunci $h_{[\alpha]}[\psi \circ \varphi \circ f] = [f]$, deci $h_{[\alpha]}\psi_*\varphi_*[f] = [f]$. Cum α nu depinde de f, deoarece $\alpha(t') = F(x_0, t')$, deducem $h_{[\alpha]}\psi_*\varphi_* = 1_{\pi_n(X, x_0)}$. Aceasta implică (vezi Teorema 1 § 2) faptul că $\psi_*\varphi_*$ este izomorfism. În mod analog, se deduce că $\varphi_*\psi_*$ este izomorfism, astfel că φ_* și ψ_* sînt ele însele izomorfisme.

COROLAR 1. *Dacă X este un spațiu n-conex ($n \geq 0$) și Y este echivalent omotopic cu X, atunci Y este de asemenea n-conex.*

Demonstrație. Se aplică Def. 5 § 1 și Teorema 2.

COROLAR 2. *Dacă X este un spațiu n-simplu ($n \geq 1$) și Y este echivalent omotopic cu X, atunci Y este el însuși n-simplu.*

Demonstrație. Dacă $\varphi : X \to Y$ este o echivalență omotopică și $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$, după Teorema 1 iii), rezultă $\varphi_* = h_{[\varphi\alpha]}\varphi_*$, care implică (vezi Teorema 2) $h_{[\varphi\alpha]} = 1_{\pi_n(Y, y_1)}$. Cum $\forall [\beta] \in \pi_1(Y, y_1)$ se poate scrie $[\beta] = [\varphi(\psi\beta)]$, rezultă $h_{[\beta]} = 1_{\pi_1(Y, y_1)}$.

*) Pentru $n = 0$, vezi Cor. 5 § 13 Cap. I.

COROLAR 3. *Dacă X este un spațiu n-simplu ($n \geq 1$), atunci există o corespondență biunivocă între $\pi_n(X)$ și $[S^n, X]$* *).

Demonstrație. Fie $x_0 \in X$, fixat. Presupunem că pentru $f : S^n \to X$ avem $f(p_0) = x_1$. Atunci, f definește o clasă $[f] \in \pi_n(X, x_1)$ și dacă α este un drum de la x_1 la x_0, avem $h_{[\alpha]}[f] \in \pi_n(X, x_0)$. Această ultimă clasă depinde numai de $[f] \in [S^n, X]$. În adevăr, fie $g \simeq f : S^n \to X$, cu $g(p_0) = x_2$. Dacă β este un drum de la x_2 la x_0, atunci $h_{[\beta]}[g] \in \pi_n(X, x_0)$. Dacă $F : f \simeq g$, fie $\gamma : I \to X$, $\gamma(t) = F(p_0, t)$. Avem atunci $h_{[\gamma]}[f] = [g]$ în $\pi_n(X, x_2)$. Prin urmare, $h_{[\beta]}h_{[\gamma]}[f] = h_{[\beta]}[g]$, adică $h_{[\gamma * \beta]}[f] = h_{[\beta]}[g]$ și, deoarece X este n-simplu, $h_{[\gamma * \beta]} = h_{[\alpha]}$, deci $h_{[\alpha]}[f] = h_{[\beta]}[g]$. Astfel, $[f] \in [S^n, X]$ definește un singur element al lui $\pi_n(X, x_0)$.

Reciproc, dacă $[f'] \in \pi_n(X, x_0)$, putem considera $f' \in \mathrm{Top}((S^n, p_0), (X, x_0))$ și acesteia îi corespunde o unică clasă de omotopie $[f'] \in [S^n, X]$.

COROLAR 4. *Dacă X și Y sînt n-simple ($n \geq 1$) și $\varphi \in \mathrm{Top}(X, Y)$, atunci $\varphi_* : \pi_n(X) \to \pi_n(Y)$ este definită prin $\varphi_*[f] = [\varphi \circ f]$, unde $[f] \in [S^n, X]$ (și $[\varphi \circ f] \in [S^n, Y]$).*

COROLAR 5. a) *Dacă A este retractă slabă a spațiului X, atunci incluziunea $i : A \hookrightarrow X$ induce un monomorfism $i_* : \pi_n(A, a_0) \to \pi_n(X, a_0)$, $\forall a_0 \in A$, și există un epimorfism $r_* : \pi_n(X, a_0) \to \pi_n(X, a_0)$, $\forall n \geq 1$.*

b) *Dacă A este o retractă slabă de deformare a lui X, atunci incluziunea $i : A \hookrightarrow X$ induce un izomorfism $i_* : \pi_n(A, a_0) \to \pi_n(X, a_0)$, $\forall a_0 \in A$, $\forall n \geq 1$* **).

Demonstrație. Se aplică definițiile din § 13 Cap. I și Teorema 1.

EXERCIȚII

1. Să se arate că dacă A este o retractă a lui X, cu incluziunea $i : A \hookrightarrow X$ și retracția $r : X \to A$ și dacă $i_*(\pi_1(A))$ este un subgrup normal al grupului $\pi_1(X)$, atunci $\pi_1(X)$ este produsul direct al subgrupurilor $\mathrm{Im}\, i_*$ și $\mathrm{Ker}\, r_*$.

2. Fie $f : X \to Y$ o aplicație continuă și $r : M_f \to Y$ retracția cilindrului aplicației f în Y (Teorema 7, § 13 Cap. I). Atunci $r_* : \pi_n(M_f, y_0) \to \pi_n(Y, y_0)$ este izomorfism, $\forall n \geq 0$, $\forall y_0 \in Y_0$.

*) Pentru $n = 0$, $i_* : \pi_0(A) \to \pi_0(X)$ este o bijecție.

**) Spațiul X fiind n-simplu, se poate omite scrierea punctului bază.

3. Să se arate că banda lui Möbius are grupurile de omotopie respectiv izomorfe cu grupurile de omotopie ale cercului.

Indicație. Vezi exercițiul 5 § 13 Cap. I.

4. Să se arate că dacă $f : X \to Y$ este o echivalență omotopică, atunci incluziunea $i : X \to M_f$, $i(x) = [x, 0]$, induce izomorfismele $i_* : \pi_n(X, x_0) \hookrightarrow \pi_n(M_f, [x_0, 0])$, $\forall n \geqslant 0$, $\forall x_0 \in X$ *).

Indicație. Vezi Teorema 7 § 13 Cap. I.

§ 4. $\pi_1(S^n)$ și $\pi_1(T^n)$. Teorema fundamentală a algebrei**)

În acest paragraf vom demonstra cîteva rezultate care permit calculul grupului fundamental al sferelor și torurilor.

OBSERVAȚIA 1. Pentru $n = 0$, avem $\pi_k(S^0) = 0$ și $\pi_k(T^0) = 0$, $\forall k \geqslant 1$ ***).

TEOREMA 1. *Fie X un spațiu topologic, pentru care $\{V_i\}_{i \in I}$ este o acoperire deschisă satisfăcînd următoarele condiții:*

a) $\bigcap\limits_{i \in I} V_i \neq \emptyset$;

b) *V_i este spațiu simplu conex, $\forall i \in I$;*

c) *$V_i \cap V_j$ este spațiu liniar conex, $\forall i, j \in I$.*

În aceste condiții X este un spațiu simplu conex.

Demonstrație. Deoarece subspațiile V_i sînt toate liniar conexe și $\bigcap\limits_{i \in I} V_i \neq \emptyset$, rezultă că X este un spațiu liniar conex (Teorema 14 § 7 Cap. I).

Fie acum $x_0 \in \bigcap\limits_{i \in I} V_i$. Vom arăta că $\pi_1(X, x_0) = 0$. Pentru $\alpha : (I, \partial I) \to (X, x_0)$, $\{\alpha^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$ constituie o acoperire deschisă a lui I. Deoarece I este spațiu metric compact, putem aplica teorema lui Lebesgue (Teorema 11 § 9 Cap. I). Fie ε un număr Lebesgue pentru acoperirea deschisă $\{\alpha^{-1}(V_i)\}_{i \in I}$ a lui I. Fie o divizare $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = 1$ a lui I, cu $|t_i - t_{i-1}| < \varepsilon$, $\forall i = 1, \ldots, n$. Renumerotînd, eventual, mulțimile acoperirii date, putem presupune că $[t_i, t_{i+1}] \subset \alpha^{-1}(V_i)$, pentru $0 \leqslant i \leqslant n - 1$, deci $\alpha([t_i, t_{i+1}]) \subset V_i$.

Putem considera următoarele drumuri în X:

$$\alpha_i : I \to X, \quad \alpha_i(t) = \alpha((1 - t)t_i + tt_{i+1}), \quad 0 \leqslant i \leqslant n - 1.$$

*) Se va citi bijecția $r_* : \pi_0(M_f) \to \pi_0(M)$, pentru $n = 0$.

**) Demonstrație cu ajutorul teoriei gradului.

***) $T^0 = \{\text{pct.}\}$.

Deoarece $\alpha_i(I) = \alpha([t_i, t_{i+1}])$, rezultă că α_i este un drum în spațiul simplu conex V_i. Deoarece $V_0 \cap V_1$ este liniar conex și x_0, $\alpha(t_1) \in V_0 \cap V_1$, există un drum β_1 în $V_0 \cap V_1$, unind x_0 cu $\alpha(t_1)$. În general, deoarece x_0, $\alpha(t_i) \in V_{i-1} \cap V_i$ și acest spațiu este liniar conex, există un drum β_i în $V_{i-1} \cap V_i$ unind x_0 cu $\alpha(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$ (vezi fig. 36). Putem scrie

$$[\alpha] = [(\alpha_0 * \hat{\beta}_1) * (\beta_1 * \alpha_1 * \hat{\beta}_2) * \ldots * (\beta_i * \alpha_i * \hat{\beta}_{i+1}) * \ldots$$

$$\ldots * (\beta_{n-2} * \alpha_{n-2} * \hat{\beta}_{n-1}) * (\beta_{n-1} * \alpha_{n-1})].$$

Avem

$[\alpha_0 * \hat{\beta}_1] \in \pi_1(V_0, x_0)$,

$[\beta_1 * \alpha_1 * \hat{\beta}_2] \in \pi_1(V_1, x_0), \ldots, [\beta_i * \alpha_i * \hat{\beta}_{i+1}] \in \pi_1(V_i, x_0), \ldots, [\beta_{n-1} * \alpha_{n-1}] \in \pi_1(V_{n-1}, x_0)$.

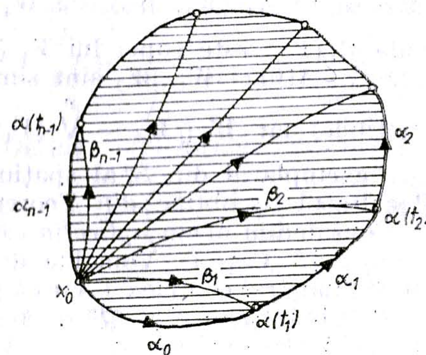


Fig. 36

Deoarece $V_0, V_1, \ldots, V_{n-1}$ sînt simplu conexe, rezultă

$$[\alpha] = [\alpha_0 * \hat{\beta}_1] \cdot [\beta_1 * \alpha_1 * \hat{\beta}_2] \ldots [\beta_i * \alpha_i * \hat{\beta}_{i+1}] \ldots$$

$$\ldots [\beta_{n-1} * \alpha_{n-1}] = [e_{x_0}].$$

COROLAR 1. *Pentru $n \geqslant 2$, sfera S^n este un spațiu simplu conex.*

Demonstrație. Pentru S^n putem considera acoperirea deschisă $\{V_1, V_2\}$, cu $V_1 = S^n \setminus \{x_1\}$, $V_2 = S^n \setminus \{x_2\}$, pentru $x_1 = (0, 0, \ldots, 0, 1)$, $x_2 = (0, 0, \ldots, 0, -1)$. Aplicînd Propoziția 6 § 5 Cap. I rezultă că V_i sînt simplu conexe. Apoi, $V_1 \cap V_2 = S^n \setminus \{x_1, x_2\} = (S^n_+ \setminus \{x_1\}) \cup (S^n_- \setminus \{x_2\})$ și cum $(S^n_+ \setminus \{x_1\}) \cap (S^n_- \setminus \{x_2\}) \neq \emptyset$, iar $S^n_+ \setminus \{x_1\}$, $S^n_- \setminus \{x_2\}$ sînt

homeomorfe fiecare cu $D^n\setminus\{0\}$ care este în mod evident liniar conex (pentru $n \geq 2$), rezultă că $V_1 \cap V_2$ este liniar conex. Putem aplica atunci Teorema 1.

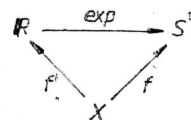
COROLAR 2. *Pentru $n \geq 2$, un buchet finit de n-sfere este un spațiu simplu conex.*

Demonstrație. Fie S^n, cu punctele x_1, x_2 fixate ca mai sus și punctul bază $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$. Considerăm buchetul de p sfere $X = \bigvee_{i=1}^{p} S^n_i$, unde S^n_i este un exemplar al sferei punctate (S^n, x_0). Putem considera acoperirea deschisă a lui X, $\{W_1, W_2\}$, cu $W_1 = \bigvee_{i=1}^{p} V_{1i}$, $W_2 = \bigvee_{i=1}^{p} V_{2i}$, unde $V_{1i}(V_{2i})$ este copia lui V_1 (resp. V_2) din Cor. 1 în (S^n_i, x_0). Atunci W_1, W_2 sînt simplu conexe (fiind contractibile) iar $W_1 \cap W_2 = \bigvee_{i=1}^{p} (V_1 \cap V_2)_i$, unde $(V_1 \cap V_2)_i$ este exemplarul din S^n_i al spațiului liniar conex $V_1 \cap V_2$. Rezultatul se obține din Teorema 1.

Considerăm acum *aplicația exponențială* $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ (Prop. 8 § 5 Cap. I). Vom lua drept punct bază al cercului S^1 numărul complex 1 iar ca punct bază al lui $\mathbb{R}$ pe 0.

O submulțime $X \subseteq \mathbb{R}^n$ o vom numi *stelată în raport cu* $x_0 \in X$ dacă oricare ar fi $x \in X$, segmentul $[x_0, x] \subset X$.

LEMA 1 (lema de ridicare). *Fie $X \subset \mathbb{R}^n$ o mulțime compactă, stelată în raport cu $x_0 \in X$. Atunci, pentru orice aplicație continuă $f : X \to S^1$ și $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, încît $\exp(t_0) = f(x_0)$, există o ridicare a aplicației f în raport cu $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, adică o aplicație continuă $f' : X \to \mathbb{R}$, încît este comutativă diagrama alăturată, deci $\exp \circ f' = f$ și, în plus, $f'(x_0) = t_0$.*



Demonstrație. Nu restrîngem generalitatea dacă presupunem $x_0 = 0$ *). Deoarece X și S^1 sînt spații metrice și X este compact, rezultă din teorema lui Weierstrass (Teorema 10 § 9 Cap. I) că f este uniform continuă. Există deci $\varepsilon > 0$, astfel încît dacă $x, x' \in X$, cu $d(x, x') < \varepsilon$, să avem $d(f(x), f(x')) < 2$, adică $f(x)$ și $f(x')$ nu sînt diametral opuse. Deoarece

*) De altfel, chiar această situație ne va interesa.

X este mărginită (fiind compactă), există $m \in \mathbb{N}$, încît $\frac{\|x\|}{m} < \varepsilon$, $\forall x \in X$. Dacă $0 \leq p < m$, atunci

$$d\left(\frac{p+1}{m}x, \frac{p}{m}x\right) = \left\|\frac{p+1}{m}x - \frac{p}{m}x\right\| = \left\|\frac{x}{m}\right\| = \frac{\|x\|}{m} < \varepsilon$$

și prin urmare $d\left(f\left(\frac{p+1}{m}x\right), f\left(\frac{p}{m}x\right)\right) < 2$ *), care arată că avem $f\left(\frac{p+1}{m}x\right) \neq -f\left(\frac{p}{m}x\right)$, deci $f\left(\frac{p+1}{m}x\right) / f\left(\frac{p}{m}x\right) \in S^1\setminus\{-1\}$. Definim aplicațiile continue $g_p : X \to S^1\setminus\{-1\} \subset S^1$, prin $g_p(x) = f\left(\frac{p+1}{m}x\right) / f\left(\frac{p}{m}x\right)$, $0 \leq p < m$. Avem atunci $f(x) = f(x_0)\, g_0(x)\, g_1(x) \dots g_{m-1}(x)$. Din Propoziția 8 § 5 Cap. I, avem că $\exp|\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ este un homeomorfism al intervalului $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ pe mulțimea deschisă $S^1\setminus\{-1\}$, încît 0 se aplică în $1 \in S^1$.

Notăm $L : S^1\setminus\{-1\} \to \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ aplicația inversă homeomorfismului de mai sus. Putem considera atunci funcția $f' : X \to \mathbb{R}$, $f' = t_0 + L \circ g_0 + \dots + L \circ g_{m-1}$. Aceasta este continuă și avem

$$f'(x_0) = f'(0) = t_0 + L(g_0(0)) + \dots + L(g_{m-1}(0)) =$$
$$= t_0 + L(1) + \dots + L(1) = t_0 + 0 = t_0.$$

*) $\frac{p}{m} x \in X$ deoarece X este stelată în raport cu $0 \in \mathbb{R}^n$.

Apoi, $(\exp\circ f')(x) = e^{2\pi i[t_0 + L(g_0(x)) + \ldots + L(g_{m-1}(x)]} =$

$$= e^{2\pi i t_0} \cdot e^{2\pi i L(g_0(x))} \ldots e^{2\pi i L(g_{m-1}(x))} =$$

$$= \exp(t_0) \exp(L(g_0(x)) \ldots \exp(L(g_{m-1})(x)) =$$

$$= f(x_0)g_0(x) \ldots g_{m-1}(x) = f(x).$$

LEMA 2 (lema de unică ridicare). *Fie X este un spațiu topologic conex și f', $g' : X \to \mathbb{R}$ două aplicații continue pentru care $\exp \circ f' = \exp \circ g'$. Dacă există $x_0 \in X$, încît $f'(x_0) = g'(x_0)$, atunci $f' = g'$.*

Demonstrație. Considerăm aplicația $h = f' - g'$. Funcția $\exp \circ h : X \to S^1 \subset \mathbb{C}$ este constantă, $(\exp \circ h)(x) = \dfrac{\exp(f'(x))}{\exp(g'(x))} = 1$. Rezultă $h(x) \in \mathbb{Z}$, deci $h : X \to \mathbb{Z}$. Cum h este continuă, X conex și $\mathbb{Z}$ discret, rezultă h constantă. Deci, $h(x) = h(x_0) = 0$, $\forall x \in X$, adică $f'(x) = g'(x)$.

COROLAR 3. *Pentru fiecare $\alpha \in \Omega(S^1, 1)$, există și este unic $\alpha' \in \mathrm{Top}((I, 0), (\mathbb{R}, 0))$, α' fiind o ridicare a lui α în raport cu aplicația* exp. *Mai mult, $\alpha'(1) \in \mathbb{Z}$. Acest număr întreg este notat cu* grad α *și se numește* **gradul drumului închis** α.

Demonstrație. Deoarece I este stelat în raport cu $0 \in I$, rezultă existența aplicației continue $\alpha' : I \to \mathbb{R}$, încît $\exp \circ \alpha' = \alpha$ și $\alpha'(0) = 0 \in (\exp)^{-1}(\alpha(0))$. Unicitatea drumului α' rezultă din Lema 2. În sfîrșit, avem $(\exp \circ \alpha')(1) = \alpha(1) = 1$, deci $e^{2\pi i \alpha'(1)} = 1 \Rightarrow \alpha'(1) \in \mathbb{Z}$.

COROLAR 4. *Dacă α, $\beta \in \Omega(S^1, 1)$, cu $\alpha \simeq \beta \operatorname{rel} \partial I$, atunci* grad α = grad β.

Demonstrație. Fie $F : (I \times I, \partial I \times I) \to (S^1, 1)$, încît $F : \alpha \simeq \beta \operatorname{rel} \partial I$. Cum pătratul $I \times I$ este compact și stelat în raport cu $(0, 0) \in I \times I$, rezultă din Lema 1 că există $F' : I \times I \to \mathbb{R}$ astfel că $F'(0, 0) = 0$ și $\exp \circ F' = F$. Avem atunci $\exp(F'(0, t')) = F(0, t') = 1$, $\exp(F'(1, t')) = F(1, t') = 1$, deci $F'(0, t')$, $F'(1, t') \in \mathbb{Z}$, $\forall t' \in I$. Aplicațiile $t' \mapsto F'(0, t')$, $t' \mapsto F'(1, t')$ fiind continue, rezultă că acestea sînt constante. Deci, $F'(0, t') = F'(0, 0) = 0$. Fie α', $\beta' : I \to \mathbb{R}$, $\alpha'(t) = F'(t, 0)$ și $\beta'(t) = F'(t, 1)$.

Avem $\alpha'(0) = F'(0, 0) = 0$, $\beta'(0) = F'(0, 1) = 0$, $(\exp\circ\alpha')(t) = \exp(F'(t, 0)) = F(t, 0) = \alpha(t)$, $(\exp\circ\beta')(t) = \exp(F'(t, 1)) = F(t, 1) = \beta(t)$. Rezultă că avem grad $\alpha = \alpha'(1) = F'(1, 0)$, grad $\beta = \beta'(1) = F'(1, 1)$. Deoarece $t' \mapsto F'(1, t')$ este constantă, rezultă $F'(1, 0) = F'(1, 1)$, deci grad α = grad β.

PROPOZIȚIA 1. *Aplicația* grad : $\pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$, $[\alpha] \mapsto$ grad α *este bine definită și este un izomorfism de grupuri.*

Demonstrație. Din Corolarele 3 și 4 rezultă că este bine definită aplicația de mai sus. Să arătăm că este un homomorfism de grupuri. Fie $[\alpha]$, $[\beta] \in \pi_1(S^1, 1)$. După Teorema 4 § 1 (vezi demonstrația), avem $[\alpha]\,[\beta] = [\alpha \circ \beta]$, cu $(\alpha \cdot \beta)(t) = \alpha(t)\beta(t)$. Fie α', $\beta' : I \to \mathbb{R}$, cu $\alpha'(0) = 0$, $\beta'(0) = 0$, $\exp\circ\alpha' = \alpha$, $\exp\circ\beta' = \beta$. Considerăm aplicația $\alpha' + \beta' : I \to \mathbb{R}$. Aceasta are proprietățile: $(\alpha' + \beta')(0) = 0$ și $\exp\circ(\alpha' + \beta') = (\exp\circ\alpha') \cdot (\exp\circ\beta') = \alpha\circ\beta$. Rezultă că $\mathrm{grad}(\alpha \circ \beta) = (\alpha' + \beta')(1) = \alpha'(1) + \beta'(1) =$ grad α + grad β. Deci, grad $([\alpha]\,[\beta])$ = grad $[\alpha]$ + grad $[\beta]$. Homomorfismul acesta este epimorfism: pentru $n \in \mathbb{Z}$, avem n = grad $[\alpha_n]$, unde $\alpha_n(t) = e^{2\pi i t n}$, deoarece acest drum are ridicarea $\alpha_n'(t) = tn$. În sfîrșit, dacă grad$[\alpha] = 0$, există $\alpha' : I \to \mathbb{R}$, cu $\alpha'(0) = 0$, $\alpha'(1) = 0$ și $\exp\circ\alpha' = \alpha$. Deci $\alpha' \in \Omega(\mathbb{R}, 0)$. Deoarece $\mathbb{R}$ este contractibil, $\alpha' \simeq e_0 \operatorname{rel} \partial I \Rightarrow \exp\circ\alpha' \simeq e_1 \operatorname{rel} \partial I$, adică $\alpha \simeq e_1 \operatorname{rel} \partial I \Rightarrow [\alpha] = [e_1]$, deci grad : $\pi_1(S^1, 1) \to \mathbb{Z}$ este și monomorfism.

Utilizînd Propoziția 1, exerc. 5 § 13 Cap. I și Teorema 2 § 3, obținem rezultatul următor.

COROLAR 5. *Pentru banda lui Möbius M avem* $\pi_1(M) \cong \mathbb{Z}$.

DEFINIȚIA 1. Dată o mulțime A, *grupul liber generat de A* *), $G\{A\}$, este definit astfel. Un *cuvînt* c în A este o expresie formală $c = a_1^{\varepsilon_1} \ldots a_n^{\varepsilon_n}$, unde $a_1, \ldots, a_n$ sînt elemente din A (nu neapărat distincte), $\varepsilon_i = \pm 1$ și $n \geqslant 0$ (dacă $n = 0$, c este *cuvîntul vid* și este notat cu 1). Se definește o relație de echivalență ρ pe mulțimea cuvintelor în A după regula: $c_1 \rho c_2$ dacă și numai dacă c_2 poate fi obținut din c_1 printr-un număr finit de operații de forma:

*) Vezi și § 7 Cap. III.

se înlocuiește $a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}$ prin $a_1^{\varepsilon_1} \dots a_r^{\varepsilon_r} a^1 a^{-1} a_{r+1}^{\varepsilon_{r+1}} \dots$ $\dots a_n^{\varepsilon_n}$ sau prin $a_1^{\varepsilon_1} \dots a_r^{\varepsilon_r} a^{-1} a^1 a_{r+1}^{\varepsilon_{r+1}} \dots a_n^{\varepsilon_n}$ sau invers ($0 \leqslant$ $\leqslant r \leqslant n$). Elementele lui $G\{A\}$ sînt clasele de echivalență $[c]$ ale cuvintelor în A și înmulțirea este definită prin $[a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n}][a_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}} \dots a_m^{\varepsilon_m}] = [a_1^{\varepsilon_1} \dots a_n^{\varepsilon_n} a_{n+1}^{\varepsilon_{n+1}} \dots a_m^{\varepsilon_m}]$. În mod obișnuit elementele lui $G\{A\}$ sînt scrise fără paranteze pătrate și notăm a în loc de a^1, a^2 în loc de a^1a^1, a^{-2} în loc $a^{-1}\, a^{-1}$ etc.*).

COROLAR 6. *Pentru $p \geqslant 1$, grupul fundamental al unui buchet de p cercuri, $\pi_1\left(\bigvee_{i=1}^{p} S_i^1\right)$, este grupul liber cu p generatori.*

Demonstrație. Fie $\alpha \in \Omega\left(\bigvee_{i=1}^{p} S_i^1, 1\right)$, atunci $\alpha = \alpha_{i_1} * \alpha_{i_2} * \dots$ $\dots * \alpha_{i_h}$, unde $\alpha_{i_1} \in \Omega(S_{i_1}^1, 1), \dots, \alpha_{i_h} \in \Omega(S_{i_h}^1, 1)$, iar indicii $i_1, i_2, \dots, i_n$ nu sînt neapărat distincți.

Fie grad $\alpha_{i_1} = g_{i_1}, \dots,$ grad $\alpha_{i_h} = g_{i_h}$. Să considerăm $G\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, unde $a_1, \dots, a_p$ sînt p elemente fixate distincte (de exemplu $a_i = S_i^1$). Asociem atunci drumului α cuvîntul $a_{i_1}^{g_{i_1}} a_{i_2}^{g_{i_2}} \dots a_{i_h}^{g_{i_h}}$. Se poate arăta ușor, utilizînd Cor. 4, că dacă $\beta \sim \alpha$ rel ∂I și $\beta = \beta_{j_1} * \dots * \beta_{j_k}$, iar grad $\beta_{j_1} = g'_{j_1}, \dots,$ grad $\beta_{j_k} = g'_{j_k}$, atunci cuvîntul $a_{j_1}^{g'_{j_1}} \dots a_{j_k}^{g'_{j_k}}$ este echivalent cu cuvîntul de mai sus asociat lui α. Obținem în felul acesta un izomorfism $\varphi : \pi_1\left(\bigvee_{i=1}^{p} S_i^1, 1\right) \to$ $\to G\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, $\varphi[\alpha] = [a_{i_1}^{g_{i_1}} \dots a_{i_p}^{g_{i_p}}]$ **).

TEOREMA 2. *Fie (X_i, x_i), $i = 1, 2, \dots, p$, spații topologice punctate. Atunci, pentru $\forall n \geqslant 1$, există izomorfismul*

$$\pi_n\left(\prod_{i=1}^{n} X_i, (x_1, \dots, x_p)\right) \cong \prod_{i=1}^{p} \pi_n(X_i, x_i) \;***).$$

---

*) Pentru mai multe proprietăți ale grupurilor libere vezi, de exemplu, [37, Cap. I] sau [32].

**) Completați amănuntele necesare, utilizînd Prop. 1.

***) Dacă este cazul, pentru definițiile și proprietățile produsului și sumei directe de grupuri se poate consulta, de exemplu, [32].

Demonstrație. Considerăm proiecțiile canonice p_j : $: \left(\prod_{i=1}^{p} X_i, (x_1, \dots, x_p)\right) \to (X_j, x_j)$. Acestea induc homomorfismele

$$(p_j)_* : \pi_n\left(\prod_{i=1}^{p} X_i, (x_1, \dots, x_p)\right) \to \pi_n(X_j, x_j).$$

Definim atunci homomorfismul

$$P : \pi_n\left(\prod_{i=1}^{p} X_i, (x_1, \dots, x_p)\right) \to \prod_{i=1}^{p} \pi_n(X_i, x_i),$$

$$P([f]) = ((p_j)_*[f])_{j=\overline{1,p}}.$$

Acesta este un monomorfism, deoarece dacă $F_j : p_j f \simeq e_{x_j}$, rel ∂I^n, atunci avem $f \simeq e_{(x_1 \dots x_p)}$ rel ∂I^n, prin omotopia $F : I^n \times I \to \prod_{i=1}^{p} X_i$, $F(t, t') = (F_j(t, t'))_{j=\overline{1,p}}$.

În sfîrșit, P este și epimorfism. În adevăr, dacă $[f_i] \in$ $\in \pi_n(X_i, x_i)$, definim $f : I^n \to \prod_{i=1}^{p} X_i$ prin $f(t) = (f_i(t))$. Rezultă imediat că $f \in \Omega_n\left(\prod_{i=1}^{p} X_i, (x_1, \dots, x_p)\right)$ și este evident că $p_j \circ f = f_j$, deci $([f_i])_{i=\overline{1,p}} = P[f]$.

COROLAR 7. $\pi_k(T^n) \cong \underbrace{\pi_k(S^1) \times \dots \times \pi_k(S^1)}_{n \text{ ori}}$, $\forall k \geqslant 1$, $n \geqslant 1$. *În particular,* $\pi_1(T^n) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}}_{n \text{ ori}}$, *grupul abelian liber cu n generatori* *).

TEOREMA 3 (teorema fundamentală a algebrei). *Orice polinom neconstant, cu coeficienți complecși, are cel puțin o rădăcină în $\mathbb{C}$.*

Demonstrație. Fie $P(Z) = a_0 + a_1 Z + \dots + a_{n-1} Z^{n-1} +$ $+ Z^n$, cu $n \geqslant 1$. Să presupunem că $P(Z)$ nu are nici o

---

*) Vom nota și $\mathbb{Z}^n$. Unele chestiuni asupra grupurilor abeliene libere se pot consulta în [32].

rădăcină în $\mathbb{C}$. Putem defini funcţia continuă $G : I \times [0, +\infty) \to S^1 \subset \mathbb{C}$ prin

$$G(t, r) = \frac{P(re^{2\pi i t})}{|P(re^{2\pi i t})|} \cdot \frac{|P(r)|}{P(r)}.$$

Cu ajutorul acesteia definim acum $F : I \times I \to S^1$ prin

$$F(t, t') = \begin{cases} G\left(t, \dfrac{t'}{1-t'}\right), & 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad 0 \leqslant t' < 1, \\ e^{2\pi i n t}, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \ t' = 1. \end{cases}$$

Aplicaţia F este continuă (vezi Teorema 3 § 4 Cap. I), deoarece

$$\lim_{\substack{t' \to 1 \\ t' < 1}} G\left(t, \frac{t'}{1-t'}\right) = \lim_{r \to \infty} G(t, r) = \lim_{r \to \infty} \frac{P(re^{2\pi i t})}{|P(re^{2\pi i t})|} \cdot$$

$$\cdot \frac{|P(r)|}{P(r)} = \lim_{r \to \infty} \frac{P(re^{2\pi i t})/r^n}{|P(re^{2\pi i t})/r^n|} \cdot \frac{|P(r)/r^n|}{P(r)/r^n} = e^{2\pi i t n}$$

şi deci, dat $\varepsilon > 0$, $\exists \delta_1 > 0$, încît $\left| G\left(t, \dfrac{t'}{1-t'}\right) - e^{2\pi i t n} \right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$, dacă $|t' - 1| < \delta_1$ *). Apoi $|e^{2\pi i t n} - e^{2\pi i t_0 n}| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ dacă $|t - t_0| < \delta_2$ şi prin urmare, pentru $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, $\|(t_0, 1) - (t, t')\| < \delta$ implică

$$\left| G\left(t, \frac{t'}{1-t'}\right) - e^{2\pi i n t_0} \right| \leqslant \left| G\left(t, \frac{t'}{1-t'}\right) - e^{2\pi i t n} \right| +$$

$$+ |e^{2\pi i t n} - e^{2\pi i t_0 n}| < \varepsilon.$$

Fie $f_0(t) = F(t, 0) = G(t, 0) = 1$, $f_1(t) = F(t, 1) = e^{2\pi i t n}$, $F(0, t') = F(1, t') = 1$. Deci $F : f_0 \simeq f_1$ rel ∂I. Dar grad $f_0 = 0$ iar grad $f_1 = n$, în contradicţie cu Cor. 4.

---

*) Arătaţi că δ_1 nu depinde de t.

EXERCIŢII

1. Să se arate că buchetul $\bigvee_{i=1}^{p} S_i^1$ nu este retractă a torului $T^p = S^1 \times \ldots \times S^1$, pentru $p \geqslant 2$.

2. Să se enunţe şi să se demonstreze Teorema 2 pentru o mulţime arbitrară de spaţii topologice.

3. Să se construiască o omotopie a drumurilor $\alpha * \beta$ şi $\beta * \alpha$ în $(S^1 \times S^1, (1, 1))$, unde $\alpha(t) = (e^{2\pi i t}, 1)$ şi $\beta(t) = (1, e^{2\pi i t})$.

4. Să se arate că S^1 nu este retractă a lui D^2.

5. Să se arate că pentru orice aplicaţie continuă $f : D^2 \to D^2$, există $x \in D^2$, încît $f(x) = x$ (*teorema lui Brouwer de punct fix*) *).

6. Fie $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$, continuă şi $x \in \mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$. Se poate defini atunci $\bar{f}_x : S^1 \to S^1$, aplicaţia continuă $\bar{f}_x(z) = \dfrac{f(z) - x}{|f(z) - x|} \cdot \left(\dfrac{f(1) - x}{|f(1) - x|} \right)^{-1}$. Avem $\bar{f}_x(1) = 1$, deci lui $\bar{f}_x$ îi corespunde un drum închis f_x în $(S^1, 1)$. Gradul lui f_x se notează prin $I_x(f)$ şi este numit *indicile lui* x *în raport cu* f. Să se arate că.

a) Dacă $f(S^1) = c$, fixat, atunci $\forall x \neq c$, $I_x(f) = 0$;

b) Dacă $f(S^1) \subset S^1$, $I_0(f) = \text{grad } f$;

c) Dacă x şi y sînt în aceeaşi componentă liniar conexă a lui $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$, $I_x(f) = I_y(f)$;

d) Dacă $x \in \mathbb{R}^2$ şi $f, g : S^1 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{x\}$ sînt omotope, atunci $I_x(f) = I_x(g)$;

e) Oricare ar fi $f : S^1 \to \mathbb{R}$, există un compact $C \subset \mathbb{R}^2$, încît $\forall x \in \mathbb{R}^2 \setminus C$, $I_x(f) = 0$;

f) Dacă $f : S^1 \to \mathbb{R}^2$ este continuă şi injectivă (deci o *curbă Jordan*), atunci $I_x(f) = \pm 1$ dacă x este în interiorul curbei $C = f(S^1)$ şi $I_x(f) = 0$ dacă x nu este în interiorul curbei C.

Indicaţii. c) Se defineşte o omotopie între $\bar{f}_x$ şi $\bar{f}_y$ prin

$$F(z, t) = \frac{f(z) - \alpha(t)}{|f(z) - \alpha(t)|} \cdot \left(\frac{(f(1) - \alpha(t)}{|f(1) - \alpha(t)|} \right)^{-1},$$

unde α este un drum în $\mathbb{R}^2 \setminus f(S^1)$, de la x la y.

d) Dacă $F : f \simeq g$, atunci $\bar{F} : \bar{f}_x \simeq \bar{g}_x$ rel $\{1\}$, prin

$$\bar{F}(z, t) = \frac{F(z, t) - x}{|F(z, t) - x|} \cdot \left(\frac{F(1, t) - x}{|F(1, t) - x|} \right)^{-1}.$$

e) Există o prelungire $\bar{f} : D^2 \to \mathbb{R}^2$ (Teorema 5 § 13 Cap. I) şi se ia atunci $C = \bar{f}(D^2)$.

f) Se aplică d), arătînd că în primul caz $f \simeq \pm 1_{S^1}$ iar în cel de al doilea $f \simeq c_x$.

7. Să se descrie homomorfismul $f_* : \pi_1(S^1, 1) \to \pi_1(S^1, f(1))$, pentru

a) $f(e^{it}) = e^{i(t+\pi)}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$,

b) $f(e^{it}) = \begin{cases} e^{it}, & 0 \leqslant t \leqslant \pi, \\ e^{i(2\pi - t)}, & \pi \leqslant t \leqslant 2\pi. \end{cases}$

---

*) Vezi şi Cor. 1 § 8 Cap. I, iar pentru cazul general Cor. 5 § 3 Cap. IV.

8. Să se arate că dacă $\alpha : S^1 \to S^1$, cu $\alpha(1) = 1$, este un homeomorfism local, atunci pentru orice punct $z \in S^1$, $\alpha^{-1}(z)$ are cardinalul egal cu $|\text{grad } \alpha|$.

Indicație. Se utilizează Teorema 4 § 3 Cap. I.

9. Fie $X = \bigcup_{j \in J} X_j$ un spațiu Hausdorff avînd topologia slabă (vezi exerc. 11 § 10 Cap. I), satisfăcînd condițiile a) și b) din exerc. 11 § 9 Cap. I și pentru orice $i, j \in J$ existînd $k \in J$, încît $X_k \supseteq X_i \cup X_j$. Fie (X_j, f_{ij}) sistemul inductiv de spații topologice din exerc. 11 § 10 Cap. I. Să se arate că pentru orice $n \geqslant 1$, avem $\pi_n(X) = \varinjlim_J \pi_n(X_j)$.

Soluție. Considerînd puncte bază în subspațiile X_j, încît aplicațiile f_{ij} să fie aplicații de spații punctate, obținem sistemul inductiv de grupuri $(\pi_n(X_j), (f_{ij})_*)_J$. Conform exercițiului 9 § 10 Cap. I există $\varinjlim_J \pi_n(X_j)$.

Apoi, conform exerc. 11 § 10 Cap. I, avem $X = \varinjlim_J X_j$, și fie incluziunile $q_j : X_j \hookrightarrow X$. Aceste aplicații induc homomorfismele $(q_j)_* : \pi_n(X_j) \to \pi_n(X)$, care definesc un homomorfism $q : \varinjlim_J \pi_n(X_j) \to \pi_n(X)$. Fie $[f] \in \pi_n(X)$, $f : S^n \to X$. Deoarece $f(S^n) \subseteq X_n$ este compactă, din exerc. 11 § 9 Cap. I și din ipoteză, rezultă că $f(S^n) \subseteq X_j$, pentru un indice $j \in J$. Aceasta implică imediat că q este epimorfism. Apoi, dacă $q(q'_j[f_j]) = 0$, pentru $q'_j : \pi_n(X) \to \varinjlim_J \pi_n(X_j)$ aplicațiile canonice și $[f_j] \in \pi_n(X_j)$, avem $[q_j f_j] = 0$. Există deci o prelungire $h : D^{n+1} \to X$ a aplicației $q_j f_j$. Avem $h(D^{n+1}) \subseteq X_i$. Fie $k \geqslant i$, $k \geqslant j$. Atunci $f_{ik} h$ este prelungire pentru $f_{jk} f_j$, deci $[f_{jk} f_j] = 0$. Cum $[f_j] l [f_{jk} f_j]$ (vezi exerc. 9 § 10 Cap. I), rezultă $[q'_j f_j] = 0$, deci q este monomorfism.

§ 5. Grupuri de omotopie relativă

O *pereche topologică punctată* (X, A, x_0) constă dintr-un spațiu topologic X, un subspațiu A al acestuia și un punct bază $x_0 \in A$. Mai general, un *triplet topologic* (X, A, B) constă dintr-un spațiu topologic X, un subspațiu A al acestuia și un subspațiu B al lui A. O *aplicație continuă de triplete*, $f : (X, A, B) \to (X', A', B')$, este o aplicație continuă $f : X \to X'$, încît $f(A) \subseteq A'$ și $f(B) \subseteq B'$. Omotopiile de triplete sînt de forma $F : (X \times I, A \times I, B \times I) \to (X', A', B')$.

Pentru n-cubul standard I^n, să notăm

$$J^{n-1} = \{t = (t_1, \ldots, t_n) \in \partial I^n \mid t_n \neq 0\}.$$

Atunci

$$\partial I^n = J^{n-1} \cup I^{n-1} \times \{0\}.$$

DEFINIȚIA 1. Numim *n-drum (relativ)*, în perechea topologică (X, A), o aplicație continuă de perechi $f : (I^n, \partial I^n) \to (X, A)$. Dacă $x_0 \in A$ și $f(J^{n-1}) = \{x_0\}$, vom spune că f este un n-drum *(relativ) închis în* (X, A, x_0).

NOTAȚIA 1. Notăm prin $\Omega_n(X, A, x_0)$ mulțimea n-drumurilor relative închise în (X, A, x_0) și prin $\pi_n(X, A, x_0)$ mulțimea claselor de omotopie ale elementelor din $\Omega_n(X, A, x_0)$, $n \geqslant 2$ [*].

Din Lema 1 §1 obținem imediat afirmația următoare

LEMA 1. *Pentru* $n \geqslant 2$, $\forall f, g \in \Omega_n(X, A, x_0)$, $f * g \in \Omega_n(X, A, x_0)$.

Din Lema 2 §1 avem următorul rezultat.

LEMA 2. *Omotopia n-drumurilor relative, închise în (X, A, x_0), este compatibilă cu compunerea definită prin formula* (1) § 1 [**].

În sfîrșit, nu se modifică esențial demonstrația Teoremei 2 § 1 pentru a obține

TEOREMA 1. *Pentru $n \geqslant 2$, în mulțimea $\pi_n(X, A, x_0)$ este bine definită operația $[f][g] = [f * g]$ și aceasta satisface axiomele unui grup. Grupul obținut este numit* **n-grupul de omotopie relativă al perechii** (X, A), **cu punctul bază** x_0.

OBSERVAȚIA 1. $\pi_n(X, \{x_0\}, x_0) \cong \pi_n(X, x_0)$.

TEOREMA 2. *Pentru $n \geqslant 3$ grupurile $\pi_n(X, A, x_0)$ sînt abeliene.*

Demonstrație. Putem considera alături de compunerea dată de formula (1) § 1, compunerea n-drumurilor relative după, de exemplu, a doua coordonată (sau oricare alta, diferită de cea de-a n-a) și aplicăm Lema 3 § 1 [***].

În analogie cu Teorema 1 § 1, obținem

TEOREMA 3. *Pentru $n \geqslant 2$, mulțimea $\pi_n(X, A, x_0)$ este în corespondență biunivocă cu mulțimea* $[(D^n, S^{n-1}, p_0), (X, A, x_0)]$.

---

*) Se consideră uneori și mulțimea $\pi_1(X, A, x_0) = [(I, \partial I, 1), (X, A, x_0)]$.

**) Nu se poate face compunerea n-drumurilor relative închise în direcția coordonatei t_n. Arătați de ce. (Se înțelege că la o altă descompunere a lui ∂I^n orice altă coordonată poate juca rolul lui t_n.)

***) Pentru $n = 1$ nu se poate defini compunerea (1) § 1.

Considerind $\mathrm{Top}(I, X)$ cu topologia compact deschisă, fie spaţiul topologic $L = \{\alpha \in \mathrm{Top}(I, X) \mid \alpha(0) = x_0, \alpha(1) \in A\}$. Luăm drept punct bază al acestui spaţiu drumul constant e_{x_0}.

TEOREMA 4. *Pentru $n \geqslant 2$, grupurile $\pi_n(X, A, x_0)$ şi $\pi_{n-1}(L, e_{x_0})$ sînt izomorfe.*

Demonstraţie. Definim $\Phi : \Omega_n(X, A, x_0) \to \Omega_{n-1}(L, e_{x_0})$, prin $\Phi(f) = f'$, cu $f'(t_1, \ldots, t_{n-1})(t) = f(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1 - t)$, pentru $f \in \Omega_n(X, A, x_0)$. Avem $f'(t_1, \ldots, t_{n-1})(0) = f(t_1, \ldots, t_{n-1}, 1) = x_0, f'(t_1, \ldots, t_{n-1})(1) = f(t_1, \ldots, t_{n-1}, 0) \in A$ şi $f'(\bar{t})(t) = x_0$, pentru $\bar{t} \in \partial I^{n-1}$. Astfel, $f' \in \Omega_{n-1}(L, e_{x_0})$, continuitatea rezultînd din continuitatea lui f. Aplicaţia Φ este bijecţie: dacă $f' \in \Omega_{n-1}(L', e_{x_0})$, $\Phi^{-1}(f') = f$, cu $f(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n) = f'(t_1, \ldots, t_{n-1})(1 - t_n)$. Continuitatea aplicaţiei f rezultă din Lema 4 §1 şi din continuitatea lui f'*). Deducem imediat că $f \in \Omega_n(X, A, x_0)$. Dacă $f \simeq g$ în $\Omega_n(X, A, x_0)$, prin $F : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \to (X, A, x_0)$, atunci $f' \simeq g'$, prin $F' : (I^{n-1} \times I, \partial I^{n-1} \times I) \to (L, e_{x_0})$, cu $F'(t_1, \ldots, t_{n-1}, t')(t) = F((t_1, \ldots, t_{n-1}, 1 - t; t')$. Rezultă acum uşor că Φ induce izomorfismul $\varphi : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(L, e_{x_0})$, $\varphi[f] = [\Phi(f)]$.

OBSERVAŢIA 2. *Spaţiul topologic L este homeomorf cu spaţiul drumurilor incluziunii $i : A \hookrightarrow X$* **) *definit prin*

$$L_i = \{(a, \alpha) \in A \times \mathrm{Top}(I, X) \mid \alpha(1) = x_0, \ \alpha(0) = a\}.$$

TEOREMA 5. *Fie o pereche topologică (X, A) şi x_0, x_1 două puncte în aceeaşi componentă liniar conexă a lui A. Atunci, pentru un drum α în A, de la x_0 la x_1, există un izomorfism de grupuri $h_\alpha : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(X, A, a_1)$, $n \geqslant 2$, cu următoarele proprietăţi:*

a) *Dacă $\alpha \simeq \beta$ rel ∂I, atunci $h_\alpha = h_\beta$;*

b) $h_{e_{x_0}} = 1_{\pi_n(X, A, x_0)}$;

c) *Dacă β este un drum, de la x_1 la x_2, atunci $h_{\alpha * \beta} = h_\beta h_\alpha$.*

Demonstraţie. Aplicînd exerc. 4 § 14 Cap. I, perechii $(\partial I^n, J^{n-1})$ (vezi demonstraţia Teoremei 5 § 14 Cap. I),

---

*) Demonstraţi aceasta.

**) Cu punctul bază x_0. Să se compare cu Notaţia 1 § 7.

deducem că aceasta are HEP în raport cu orice spaţiu. Fie $f \in \Omega_n(X, A, x_0)$ şi considerăm diagrama din stînga,

$$\begin{array}{ccc} J^{n-1} & \hookrightarrow & \partial I^n \\ \downarrow & \overset{\bar{\bar{F}}}{\searrow} A \overset{\bar{f}}{\swarrow} & \downarrow \\ J^{n-1} \times I & \hookrightarrow & \partial I^n \times I \end{array}$$

unde $\bar{f} = f \mid \partial I^n$ şi $\bar{\bar{F}}(\bar{\bar{t}}, t') = \alpha(t')$, $\forall \bar{\bar{t}} \in J^{n-1}$. Există $F : \partial I^n \times I \to A$, încît $F(\bar{t}, 0) = \bar{f}(\bar{t}) = f(\bar{t})$, $\forall \bar{t} \in \partial I^n$, $F(\bar{\bar{t}}, t') = \bar{\bar{F}}(\bar{\bar{t}}, t') = \alpha(t')$, $\forall \bar{\bar{t}} \in J^{n-1}$. Aplicăm acum HEP pentru $(I^n, \partial I^n)$, în raport cu diagrama ce urmează.

$$\begin{array}{ccc} \partial I^n & \hookrightarrow & I^n \\ \downarrow & \overset{F}{\nearrow} X \overset{f}{\swarrow} & \downarrow \\ \partial I^n \times I & \hookrightarrow & I^n \times I \end{array}$$

Există atunci $G : I^n \times I \to X$ cu proprietăţile $G(t, 0) = f(t)$, $\forall t \in I^n$, $G(t, t') = F(\bar{t}, t') \in A$, $\forall \bar{t} \in \partial I^n$, $G(\bar{\bar{t}}, t') = \alpha(t')$, $\forall \bar{\bar{t}} \in J^{n-1}$. Definim $f' : I^n \to A$ prin $f'(t) = G(t, 1)$. Avem $f'(\bar{t}) = G(\bar{t}, 1) = F(\bar{t}, 1) \in A$, $f'(\bar{\bar{t}}) = G(\bar{\bar{t}}, 1) = \alpha(1) = x_1$. Prin urmare, $f' \in \Omega_n(X, A, x_1)$. Se defineşte $h_\alpha[f] = f'$, verificîndu-se buna definire şi proprietăţile, cu totul paralel demonstraţiei Teoremei 1 § 2.

COROLAR 1. *Dacă A este spaţiu liniar conex, toate grupurile $\pi_n(X, A, x)$, pentru $n \geqslant 2$ fixat, sînt izomorfe $\forall x \in A$. Grupurile nu se identifică totdeauna* (vezi Obs. 2 § 2).

COROLAR 2. *Pentru (X, A, x_0), o pereche topologică punctată, grupul fundamental $\pi_1(A, x_0)$ acţionează la dreapta pe grupul $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geqslant 2$, prin $h : \pi_1(A, x_0) \to \mathrm{Aut}(\pi_n(X, A, x_0))$, cu $h[\alpha] = h_{[\alpha]}$.*

DEFINIŢIA 2. O pereche topologică (X, A), cu A liniar conex, se numeşte (*relativ*) *n-simplă* ($n \geqslant 1$) dacă pentru un punct $x_0 \in A$ grupul $\pi_1(A, x_0)$ acţionează trivial pe $\pi_n(X, A, x_0)$.

COROLAR 3. a) *Pentru o pereche n-simplă (X, A), $\forall x \in A$, $\pi_1(A, x)$ acţionează trivial pe $\pi_n(X, A, x)$;*

b) *Pentru o pereche n-simplă (X, A), izomorfismele $h_\alpha, h_\beta : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(X, A, x_1)$ coincid, oricare ar fi drumurile α şi β în A, de la x_0 la x_1.*

(Pentru demonstraţie vezi Cor. 3 § 2).

TEOREMA 6. *Dacă X este un H-spaţiu şi A un H-subspaţiu liniar conex al lui X, atunci perechea (X, A) este n-simplă, $\forall n \geqslant 1$.*

Demonstraţia este cu totul analoagă cu aceea a Teoremei 2 § 2.

TEOREMA 7. *Fie $[\varphi] \in [(X, A, x_0), (Y, B, y_0)]$. Atunci, $\forall n \geqslant 2$ este bine definit un homomorfism de grupuri $[\varphi]_* = \varphi_* : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0)$**) *prin $\varphi_*[f] = [\varphi \circ f]$, $\forall [f] \in \pi_n(X, A, x_0)$ şi care are următoarele proprietăţi:*

i) *Dacă $[\psi] \in [(Y, B, y_0), (Z, C, z_0)]$, atunci $\psi_* \varphi_* = (\psi\varphi)_*$;*

ii) $(1_{(X, A, x_0)})_* = 1_{\pi_n(X, A, x_0)}$;

iii) *Dacă α este un drum în A, de la x_0 la x_1, şi dacă $\varphi(x_1) = y_1$, atunci $\varphi_* h_{[\alpha]} = h_{[\varphi\alpha]} \varphi_* : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_1)$.*

Nu apar deosebiri faţă de demonstraţia Teoremei 1 § 3.

TEOREMA 8. *Fie $\varphi : (X, A) \to (Y, B)$ o echivalenţă omotopică de perechi. Atunci, pentru orice punct $x_0 \in A$, cu $y_0 = \varphi(x_0)$ şi $n \geqslant 2$, homomorfismul $\varphi_* : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0)$ este izomorfism***).

Demonstraţie. Fie

$$L = \{\alpha \in \mathrm{Top}(I, X) \mid \alpha(0) = x_0,\ \alpha(1) \in A\},$$

$$L' = \{\alpha' \in \mathrm{Top}(I, Y) \mid \alpha'(0) = y_0,\ \alpha'(1) \in B\}.$$

Avem atunci

$\pi_n(X, A, x_0) \cong \pi_{n-1}(L, e_{x_0})$ şi $\pi_n(Y, B, y_0) \cong \pi_{n-1}(L', e_{y_0})$. Putem defini aplicaţia $\Phi : (L, e_{x_0}) \to (L', e_{y_0})$, $\Phi(\alpha) = \varphi \circ \alpha$. Aplicaţia Φ este continuă fiindcă $\Phi^{-1}(B(K, D) \cap L') = B(K, \varphi^{-1}(D)) \cap L$. Deoarece φ este o echivalenţă omotopică de perechi, rezultă imediat că Φ^{-1} este o echivalenţă omotopică. Aplicînd Teorema 2 § 3, deducem că $\Phi_* : \pi_{n-1}(L, e_{x_0}) \to \pi_{n-1}(L', e_{y_0})$ este izomorfism. Ţinînd seama de Teorema 4, acesta se poate identifica cu homomorfismul $\varphi_* : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_n(Y, B, y_0)$***).

---

*) Pentru $n = 1$, φ_* este doar o aplicaţie de mulţimi.

**) Pentru $n = 1$, φ_* este doar bijecţie.

***) Explicaţi acest lucru.

EXERCIŢII

1. Detaliaţi demonstraţia Teoremei 5.

2. Demonstraţi Teorema 6.

3. Faceţi demonstraţia Teoremei 7.

4. Daţi o demonstraţie directă (analoagă cu cea a Teoremei 2 § 3) Teoremei 8.

5. Enunţaţi şi demonstraţi rezultatele relative corespunzătoare Cor. 1 § 3.

6. Fie $\pi'_n(X, A, x_0)$ subgrupul lui $\pi_n(X, A, x_0)$, $n \geqslant 2$, generat de toate elementele de forma $[f] - h_{[\alpha]}[f]$, pentru $[f] \in \pi_n(X, A, x_0)$, $[\alpha] \in \pi_1(A, x_0)$ (pentru $n = 2$, acesta este interpretat ca $[f]\,(h_{[\alpha]}[f])^{-1}$). Să se arate că:

a) $\pi'_n(X, A, x_0)$ este un subgrup normal al grupului $\pi_n(X, A, x_0)$;

b) Dacă A este liniar conex şi $\pi^*_n(X, A) = \pi_n(X, A, x_0)/\pi'_n(X, A, x_0)$, atunci o clasă de omotopie de aplicaţii $f : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A)$, fără punct bază, defineşte un unic element al grupului $\pi^*_n(X, A)$;

c) Orice aplicaţie de perechi $\varphi : (X, A) \to (Y, B)$, induce un homomorfism $\varphi^*_* : \pi^*_n(X, A) \to \pi^*_n(Y, B)$, $n \geqslant 2$.

Indicaţie. Se poate consulta dacă este nevoie [43, p. 153].

7. Fie $[f] \in [(D^n, S^{n-1}, p_0), (X, A, x_0)]$. Atunci $[f] = 0$ în $\pi_n(X, A, x_0)$ (Teorema 3) dacă şi numai dacă f este omotopă rel S^{n-1} cu o aplicaţie $D^n \to A$.

Indicaţie. Dacă $[f] = 0$, fie $H : (D^n, S^{n-1}, p_0) \times I \to (X, A, x_0)$, $H : f \simeq e_{x_0}$. Se defineşte $H' : D^n \times I \to X$ prin

$$H'(z, t) = \begin{cases} H\left(\dfrac{z}{1 - \frac{t}{2}},\ t\right), & 0 \leqslant \|z\| \leqslant 1 - \dfrac{t}{2}, \\[2ex] H\left(\dfrac{z}{\|z\|},\ 2 - 2\|z\|\right), & 1 - \dfrac{t}{2} \leqslant \|z\| \leqslant 1, \end{cases}$$

$H'(z, 0) = f(z)$, $H'(z, 1) \in A$, $\forall z \in D^n$, $H'(z', t) = f(z')$, $\forall z' \in S^{n-1}$.

Reciproc, dacă $[f] = [f']$, $f' : D^n \to A$, atunci $F : D^n \times I \to X$, $F(z, t) = f'((1 - t)z + tp_0)$, satisface $F : f' \simeq e_{x_0}$.

8. O *pereche* (X, A) se numeşte *n-conexă* $(n \geqslant 0)$ dacă pentru $0 \leqslant k \leqslant n$, orice aplicaţie $f : (D^k, S^{k-1}) \to (X, A)$ este omotopă rel S^{k-1} cu o aplicaţie $D^k \to A$. Să se arate că aceasta este echivalent cu: fiecare componentă liniar conexă a lui X intersectează pe A şi $\forall x_0 \in A$, $\forall 1 \leqslant k \leqslant n$, $\pi_k(X, A, x_0) = 0$.

9. Fie X obţinut din A prin ataşare de n-celule la spaţiul topologic A şi fie (Y, B), încît $\pi_n(Y, B, b) = 0$, $\forall b \in B$ dacă $n \geqslant 1$, respectiv, fiecare punct din Y poate fi unit cu un drum cu subspaţiul B, cînd $n = 0$. Atunci,

ficcare aplicaţie $(X, A) \to (Y, B)$ este omotopă rel A cu o aplicaţie $X \to B$.

Indicaţie. Se aplică exerc. 7 şi tehnica din demonstraţia Cor. 6 § 14 Cap. I.

§ 6. Şirul exact de omotopie al unei perechi topologice punctate

DEFINIŢIA 1. Un şir de grupuri şi homomorfisme de grupuri

$$(1) \qquad G_{i-1} \quad \ldots \xrightarrow{\theta_{i-1}} G_i \xrightarrow{\theta_i} G_{i+1} \longrightarrow \ldots$$

se numeşte *semiexact* dacă $\operatorname{Im} \theta_{i-1} \subseteq \operatorname{Ker} \theta_i / \forall i$. Şirul (1) este *exact* dacă $\operatorname{Im} \theta_{i-1} = \operatorname{Ker} \theta_i$, $\forall i$.

EXEMPLE. 1. Şirul $0 \longrightarrow G \xrightarrow{\theta} H$ este totdeauna semiexact. Este exact dacă şi numai dacă θ este monomorfism.

2. Şirul $G \xrightarrow{\theta} H \longrightarrow 0$ este totdeauna semiexact. Este exact dacă şi numai dacă θ este epimorfism.

3. Şirul $0 \longrightarrow G \xrightarrow{\theta} H \longrightarrow 0$ este exact dacă şi numai dacă θ este izomorfism.

4. Şirul $0 \longrightarrow G \xrightarrow{\theta_1} H \xrightarrow{\theta_2} K \longrightarrow 0$ este exact dacă şi numai dacă θ_1 este monomorfism, θ_2 epimorfism şi $\operatorname{Im} \theta_1 = \operatorname{Ker} \theta_2$.

Fie (X, A, x_0) o pereche topologică punctată.

NOTAŢIA 1. Să identificăm $(n-1)$-cubul I^{n-1} cu subspaţiul $\{t = (t_1, \ldots, t_{n-1}, 0)\} \subset \mathbb{R}^n$. Atunci, $\partial I^n = J^{n-1} \cup \cup I^{n-1}$.

LEMA 1. *Dacă* $f \in \Omega_n(X, A, x_0)$, *atunci* $f|I^{n-1} \in \Omega_{n-1}(A, x_0)$ *şi corespondenţa* $[f] \leadsto [f|I^{n-1}]$ *este bine definită şi determină un homomorfism* $\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0), \forall n \geqslant 2$ *).

Demonstraţie. Deoarece $I^{n-1} \subset \partial I^n \Rightarrow f(I^{n-1}) \subset A$ şi întrucît $\partial I^{n-1} \subset J^{n-1} \Rightarrow f(\partial I^{n-1}) = \{x_0\}$, astfel $f|I^{n-1} \in \Omega_{n-1}(A, x_0)$. Dacă $f \simeq g$ în $\Omega_n(X, A, x_0)$, prin omotopia $F : (I^n \times I, \partial I^n \times I, J^{n-1} \times I) \to (X, A, x_0)$, atunci $F|I^{n-1} \times I : (I^{n-1} \times I, \partial I^{n-1} \times I) \to (A, x_0)$ constituie o omotopie între $f|I^{n-1}$ şi $g|I^{n-1}$. Este astfel bine definită aplicaţia

*) O aplicaţie de mulţimi pentru $n = 1$.

$\partial : \pi_n(X, A, x_0) \to \pi_{n-1}(A, x_0)$ prin $\partial[f] = [f|I^{n-1}]$. Dacă $n \geqslant 2$ şi $f, g \in \Omega_n(X, A, x_0)$, atunci $(f * g)|I^{n-1} = (f|I^{n-1}) * *(g|I^{n-1})$, de unde rezultă că ∂ este un homomorfism.

Perechile topologice punctate (X, A, x_0) îi putem asocia aplicaţiile de incluziune $i : (A, x_0) \hookrightarrow (X, x_0)$ şi $j : (X, \{x_0\}, x_0) \hookrightarrow (A, X, x_0)$. Acestea induc homomorfismele $i_* : \pi_n(A, x_0) \to \pi_n(X, x_0)$, $n \geqslant 1$, şi respectiv $j_* : \pi_n(X, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$, $n \geqslant 2$.

TEOREMA 1. Şirul de omotopie *al unei perechi topologice punctate* (X, A, x_0), *definit prin*

$$(2) \quad \ldots \longrightarrow \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \ldots$$
$$\ldots \pi_{n-1}(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \ldots \to \pi_2(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_1(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_1(X, x_0),$$

este un şir exact de grupuri.

Demonstraţie. Vom demonstra mai întîi exactitatea şirului

$$\pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0), \quad n \geqslant 2.$$

Dacă $[f'] \in \pi_n(A, x_0) \Rightarrow f' : (I^n, \partial I^n) \to (A, x_0)$ şi deci $jif' : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (X, A, x_0)$ este omotopă în $\Omega_n(X, A, x_0)$ cu e_{x_0}, cu omotopia $F : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \times \times I \to (X, A, x_0)$ definită prin

$$F(t_1, \ldots, t_n, t') = \begin{cases} f'(t_1, \ldots, t_{n-1}, t_n + t'), & 0 \leqslant t_n + t' \leqslant 1, \\ x_0, & 1 \leqslant t_n + t' \leqslant 2. \end{cases}$$

În adevăr, F este continuă conform lemei de lipire (Teorema 2 § 3). Apoi,

$$F(t_1, \ldots, t_n, 0) = f'(t_1, \ldots, t_n) = jif'(t_1, \ldots, t_n),$$

$$F(t_1, \ldots, t_n, 1) = x_0, \quad F(\partial I^n \times I) \subset A, \quad F(J^{n-1} \times I) = \{x_0\},$$

cum se constată imediat. Rezultă că $j_* i_* [f'] = \{e_{x_0}\}$, deci $\operatorname{Im} i_* \subseteq \operatorname{Ker} j_*$.

Reciproc, fie $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, încît $j_*[f] = [e_{x_0}]$. Există deci $G : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \times I \to (X, A, x_0)$, încît $G : jf \simeq \simeq e_{x_0}$. Definim $G' : (I^n, \partial I^n) \times I \to (X, x_0)$ prin

$$G'(t_1, \ldots, t_n, t') = \begin{cases} G(t_1, \ldots, t_n, 2t't_n), & 0 \leqslant t' \leqslant 1/2, \\ G(t_1, \ldots, t_{n-1}, 2t_n(1 - t'), t_n), & 1/2 \leqslant t' \leqslant 1 \end{cases}$$

G' este în adevăr continuă, $G'(\partial I^n \times I)=\{x_0\}$ și $G'(t_1,\dots,t_n,0)= f(t_1,\dots,t_n)$. Considerăm $f'\in\Omega_n(A,x_0)$, definit prin $f'(t_1,\dots,t_n)=G'(t_1,\dots,t_n,1)$. Avem atunci $i_*[f']=[if']= [f]$ în $\pi_n(X,x_0)$, deoarece $G': if'\simeq f$ în $\Omega_n(X,x_0)$. Prin urmare Ker $j_*\subseteq$ Im i_*.

b) Să arătăm acum exactitatea șirului

$$\pi_n(X,x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_n(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_{n-1}(A,x_0),\quad n\geqslant 2.$$

Fie $[f]\in\pi_n(X,x_0)\Rightarrow f:(I^n,\partial I^n)\to(X,x_0)$, deci $jf|I^{n-1}= e_{x_0}$ în $\Omega_{n-1}(A,x_0)$. Obținem astfel că $\partial j_*[f]=[jf|I^{n-1}]= [e_{x_0}]$, deci Im $j_*\subseteq$ Ker ∂. Reciproc, dacă $[f]\in\pi_n(X,A,x_0)$, încît $\partial[f]=[f|I^{n-1}]=[e_{x_0}]$, fie $H:(I^{n-1},\partial I^{n-1})\times I\to (A,x_0)$, cu $H(t,0)=(f|I^{n-1})(t)$, $H(t,1)=x_0, \forall t\in I^{n-1}$. Fie $H':(I^n,\partial I^n,J^{n-1})\times I\to(X,A,x_0)$, definită prin

$$H'((t_1,\dots,t_n),t')=\begin{cases}H(t_1,\dots,t_{n-1},t'(1-2t_n)), & 0\leqslant t_n\leqslant 1/2,\\ f(t_1,\dots,t_{n-1},2t_n-1), & 1/2\leqslant t_n\leqslant 1.\end{cases}$$

Avem $H'_0\simeq H'_1$ în $\Omega_n(X,A,x_0)$. Considerăm aplicația $h:(I^n,\partial I^n,J^{n-1})\times I\to(X,A,x_0)$,

$$h((t_1,\dots,t_n),t')=\begin{cases}f(t_1,\dots,t_{n-1},(1-t')t_n), & 0\leqslant t_n\leqslant 1/2,\\ f(t_1,\dots,t_{n-1},t't_n+t_n-t'), & 1/2\leqslant t_n\leqslant 1,\end{cases}$$

și avem

$$h((t_1,\dots,t_n),0)=\begin{cases}f(t_1,\dots,t_n), & 0\leqslant t_n\leqslant 1/2,\\ f(t_1,\dots,t_n), & 1/2\leqslant t_n\leqslant 1,\end{cases}=$$

$$=f(t_1,\dots,t_n),\quad h((t_1,\dots,t_n),1)=H'_0(t_1,\dots,t_n),$$

încît $h:f\simeq H'_0$ în $\Omega_n(X,A,x_0)$. Obținem așadar că $f\simeq H'_1$ în $\Omega_n(X,A,x_0)$, unde

$$H'_1(t_1,\dots,t_n)=\begin{cases}H(t_1,\dots,t_{n-1},1-2t_n), & 0\leqslant t_n\leqslant 1/2,\\ f(t_1,\dots,t_{n-1},2t_n-1), & 1/2\leqslant t_n\leqslant 1.\end{cases}$$

Se deduce imediat că $H'_1(\partial I^n)=\{x_0\}$, încît $H'_1\in\Omega_n(X,x_0)$ și rezultă că avem $[f]=j_*[H'_1]$, deci Ker $\partial\subseteq$ Im j_*.

c) În încheiere vom arăta exactitatea șirului

$$\pi_n(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_{n-1}(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_{n-1}(X,x_0).$$

Dacă $[f]\in\pi_n(X,A,x_0)$, $i_*\partial[f]=i_*[f|I^{n-1}]=[i\circ f|I^{n-1}]= [e_{x_0}]$, datorită omotopiei $F: i\circ(f|I^{n-1})\simeq e_{x_0}$, unde $F:I^{n-1}\times I\to X$, $F(t_1,\dots,t_{n-1},t')=f(t_1,\dots,t_{n-1},t')$. Prin urmare, Im $\partial\subseteq$ Ker i_*. În sfîrșit, fie $[f']\in\pi_{n-1}(A,x_0)$, încît $i_*[f']=[e_{x_0}]$, deci există $K:(I^{n-1},\partial I^{n-1})\times I\to(X,x_0)$, $K:f'\simeq e_{x_0}$. Atunci, identificînd $I^{n-1}\times I$ cu I^n, avem $K\in\Omega_n(X,A,x_0)$ și $K|I^{n-1}=f'$, adică $\partial[K]=[f']$, care dovedește incluziunea Ker $i_*\subseteq$ Im ∂.

OBSERVAȚIA 1. Șirul exact (2) se poate completa prin $\pi_1(X,x_0)\xrightarrow{j_*}\pi_1(X,A,x_0)\xrightarrow{\partial}\pi_0(A,x_0)\xrightarrow{i_*}\pi_0(X,x_0)$, unde $\pi_1(X,A,x_0)=[(I,\partial I,1),(X,A,x_0)]$, $\pi_0(A,x_0)= [(\partial I,1),(A,x_0)]$, $\pi_0(X,x_0)=[(\partial I,1),(X,x_0)]$, $\partial[f]= [f|\partial I]$, $i_*[g]=[ig]$, pentru $[f]\in\pi_1(X,A,x_0)$, $[g]\in\pi_0(A,x_0)$ și Ker $\partial=\{[f]\in\pi_1(X,A,x_0)\mid f|\partial I\simeq e_{x_0}$ rel $\{1\}\}$, Ker $i_*=\{[g]\in\pi_0(A,x_0)\mid g\circ i\simeq e_{x_0}$ rel$\{1\}\}$ *).

Următoarea teoremă rezultă imediat.

TEOREMA 2. *Dată aplicația continuă de perechi topologice punctate, $\varphi:(X,A,x_0)\to(Y,B,y_0)$, are loc următoarea diagramă comutativă*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots\to\pi_n(A,x_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(X,x_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(X,A,x_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(A,x_0)\to\cdots\\
\downarrow{\scriptstyle\varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_*} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_*}\\
\cdots\to\pi_n(B,y_0) & \xrightarrow{i_*} & \pi_n(Y,y_0) & \xrightarrow{j_*} & \pi_n(Y,B,y_0) & \xrightarrow{\partial} & \pi_{n-1}(B,y_0)\to\cdots
\end{array}$$

(Am notat la fel toate homomorfismele induse de φ.)

EXERCIȚII

1. Să se arate că dacă $x_0\in B\subseteq A\subseteq X$, atunci are loc un șir exact $\dots\to\pi_n(A,B,x_0)\to\pi_n(X,B,x_0)\to\pi_n(X,A,x_0)\to\pi_{n-1}(A,B,x_0)\to\dots$

2. Fie $0\to G\xrightarrow{\theta}H\xrightarrow{\varphi}K\to 0$ un șir exact de grupuri abeliene și $\psi:K\to H$ un homomorfism de grupuri, încît $\varphi\psi=1_K$. Să se arate că atunci

*) în (X,x_0).

există un izomorfism $H \simeq G \oplus K$. Un asemenea şir se numeşte *şir scindat*, sau spunem că *şirul scindează*.

Indicaţie. Se defineşte $\alpha : G \oplus K \to H$ prin $\alpha(g, k) = \theta(g) + \psi(k)$. Această aplicaţie este un homomorfism. Este injectiv, deoarece $\alpha(g, k) = 0 \Rightarrow 0 = \varphi(\theta(g) + \psi(k)) = \varphi\psi(k) = k$. Această implică $\theta(g) = 0 \Rightarrow g = 0$. Aplicaţia α este de asemenea surjectivă, deoarece dacă $h \in H$ avem $\varphi(h - \psi\varphi(h)) = \varphi(h) - \varphi\psi\varphi(h) = 0$, deci $h - \psi\varphi(h) \in \operatorname{Ker} \varphi \Rightarrow \exists g \in G$, încît $\theta(g) = h - \psi\varphi(h) \Rightarrow h = \theta(g) + \psi\varphi(h) = \alpha(g, \varphi(h))$.

3. Se consideră şirul exact de grupuri

$$0 \longrightarrow G \xrightarrow{\theta} H \xrightarrow{\theta'} K \to 0,$$

cu H (şi G) abelian. Să se arate că dacă există un homomorfism $0' : H \to G$, încît $0'0 = 1_G$, atunci K este abelian şi şirul scindează.

Indicaţie. Se construieşte $\psi : K \to H$, încît $\varphi\psi = 1_K$. Va rezulta că φ este monomorfism, deci K este identificat cu un subgrup al lui H şi totodată vom deduce că şirul este scindat. Se defineşte $\psi(k) = h - \theta(\theta'(h))$, pentru $k = \theta(h)$ (deoarece φ este epimorfism).

4. Fie un şir exact de spaţii liniare, de dimensiuni finite, peste un acelaşi cîmp K,

$$0 \longrightarrow X_n \xrightarrow{f_n} X_{n-1} \xrightarrow{f_{n-1}} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow X_1 \xrightarrow{f_1} X_0 \longrightarrow 0$$

Să se arate că $\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim X_i = 0$.

Indicaţie. Se utilizează relaţia $\dim X_i = \dim(\operatorname{Im} f_i) + \dim(\operatorname{Ker} f_i)$.

4. Fie (X, A, x_0) o pereche topologică punctată. Să se arate că:

a) Dacă A este retractă a lui X, atunci

$$\pi_n(X, x_0) \simeq \pi_n(A, x_0) \oplus \pi_n(X, A, x_0), \ n \geqslant 2;$$

b) Dacă 1_X este omotopă cu o aplicaţie $X \to A$, atunci $\pi_n(A, x_0) \cong \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_{n+1}(X, A, x_0)$, $n \geqslant 2$;

c) Dacă $i : A \hookrightarrow X$ este omotopă cu o aplicaţie constantă, printr-o omotopie de aplicaţii punctate, atunci

$$\pi_n(X, A, x_0) \simeq \pi_n(X, x_0) \oplus \pi_{n-1}(A, x_0), \ n \geqslant 3.$$

Indicaţie. a) Se deduce şirul exact

$$0 \to \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \to 0, \ n \geqslant 2,$$

şi $r_* i_* = 1$. După exerciţiul 3 rezultă că şirul este scindat;

b) Dacă $ir \simeq 1_X$, $r : X \to A$, se obţine şirul exact

$$0 \to \pi_{n+1}(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_n(A, x_0) \xrightarrow{i_*} \pi_n(X, x_0) \to 0,$$

care este scindat, datorită relaţiei $i_* r_* = 1$ (exerc. 2);

c) Avem $i_* = 0$ şi deci este exact şirul

$$0 \to \pi_n(X, x_0) \xrightarrow{j_*} \pi_n(X, A, x_0) \xrightarrow{\partial} \pi_{n-1}(A, x_0) \to 0,$$

de grupuri abeliene ($n \geqslant 3$). Arătăm că există $\gamma : \pi_{n-1}(A, x_0) \to \pi_n(X, A, x_0)$, încît $\partial \circ \gamma = 1$. Fie $h : A \times I \to X$, cu $h(a, 0) = a$, $h(a, 1) = h(x_0, t) = x_0$, $\forall a \in A$, $\forall t \in I$. Luăm $[f] \in \pi_{n-1}(A, x_0)$ şi definim $g : I^n \to X$, prin $g(t_1, \ldots, t_n) = h(f(t_1, \ldots, t_{n-1}), t_n)$. Se arată uşor că avem $g \in \pi_n(X, A, x_0)$. Definim $\gamma[f] = [g]$.

6. Fie $0 \longrightarrow G \xrightarrow{\theta} H \xrightarrow{\varphi} K \longrightarrow 0$ un şir exact de grupuri abeliene, K fiind abelian liber. Atunci şirul este scindat.

Indicaţie. Dacă avem $K = \bigoplus_{i=1} K_i$, unde $K_i \cong \mathbb{Z}$ şi $e_i \in K_i$ corespunde lui $1 \in \mathbb{Z}$, fie $h_i \in \varphi^{-1}(e_i)$. Se poate defini $\psi : K \to H$, încît $\psi(e_i) = h_i$.

7. *Lema celor cinci homomorfisme*. Fie diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc}
G_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & G_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & G_3 & \xrightarrow{\varphi_3} & G_4 & \xrightarrow{\varphi_4} & G_5 \\
\downarrow{\scriptstyle\theta_1} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_2} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_3} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_4} & & \downarrow{\scriptstyle\theta_5} \\
H_1 & \xrightarrow{\psi_1} & H_2 & \xrightarrow{\psi_2} & H_3 & \xrightarrow{\psi_3} & H_4 & \xrightarrow{\psi_4} & H_5
\end{array}$$

în care liniile sînt şiruri exacte, iar θ_2, θ_4 sînt izomorfisme, θ_1 este epimorfism şi θ_5 este monomorfism. Atunci θ_3 este izomorfism.

8. Fie (X, A, x_0) o pereche topologică punctată. Să se arate că:

a) Dacă $[f]$, $[g] \in \pi_2(X, A, x_0)$, atunci $h_{\partial[f]}[g] = [f]^{-1}[g][f]$;

b) Grupul $\pi_2^*(X, A)$ (exerc. 6 § 5) este abelian;

c) Dacă $j : (X, x_0) \to (X, A, x_0)$ este incluziunea, atunci imaginea homomorfismului $j_* : \pi_2(X, x_0) \to \pi_2(X, A, x_0)$ este conţinută în centrul grupului $\pi_2(X, A, x_0)$.

Indicaţii. a) Se poate consulta [43, p.151)].

b) Subgrupul $\pi_2'(X, A, x_0)$ (exerc. 6 § 5) conţine toate elementele de forma $([g](h_{\partial[f]}[g])^{-1} = [g]([f]^{-1}[g][f])^{-1} = [g][f]^{-1}[g]^{-1}[f]$, adică conţine subgrupul comutatorilor, ceea ce implică comutativitatea grupului $\pi_2^*(X, A) = \pi_2(X, A, x_0)/\pi_2'(X, A, x_0)$;

c) Pentru $[f'] \in \pi_2(X, x_0)$ şi $[g] \in \pi_2(X, A, x_0)$, avem, ţinînd seama de a), $j_*[f'][g]\, j_*[f']^{-1}[g]^{-1} = (h_{\partial j_*[f']^{-1}}[g])[g]^{-1} = (h_{[ex_0]}[g])[g]^{-1} = [e_{x_0}]$ şi deci $j_*[f'][g] = [g]\, j_*[f']$.

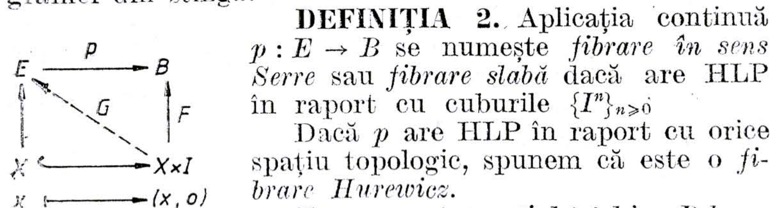
§ 7. Fibrări şi spaţii de acoperire

DEFINIŢIA 1. Fiind dată o aplicaţie continuă $p : E \to B$, spunem că aceasta are *proprietatea de ridicare (liftare) a omotopiei*, prescurtat HLP *), *în raport cu spaţiul* X, dacă $\forall f \in \operatorname{Top}(X, E)$, $\forall F \in \operatorname{Top}(X \times I, B)$, cu $F(x,$

*) În l. engleză, *Homotopy Lifting Property*; se mai spune şi *Homotopy Covering Property*.

$0) = pf(x)$, există $G \in \mathrm{Top}\,(X \times I,\ E)$, încît $G(x,\ 0) = f(x)$ şi $pG(x,\ t) = F(x,\ t)$, $\forall (x,\ t) \in X \times I$.

Schematic, definiţia se poate reţine cu ajutorul diagramei din stînga.



DEFINIŢIA 2. Aplicaţia continuă $p : E \to B$ se numeşte *fibrare în sens Serre* sau *fibrare slabă* dacă are HLP în raport cu cuburile $\{I^n\}_{n \geq 0}$.

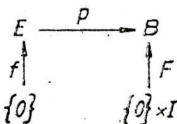
Dacă p are HLP în raport cu orice spaţiu topologic, spunem că este o *fibrare Hurewicz*.

E se numeşte *spaţiul total* iar B *baza*.

COROLAR 1. *Dacă $p : E \to B$ este o fibrare Serre, α un drum în B şi $e_0 \in p^{-1}(\alpha(0))$, atunci există α', un drum în E, încît $\alpha'(0) = e_0$ şi $p \circ \alpha' = \alpha$. Drumul α' este numit o* ridicare (liftare) a lui α în e_0.

Demonstraţie. Se aplică HLP diagramei de mai jos, cu $F(0,\ t) = \alpha(t)$ şi $f(0) = e_0$.

NOTAŢIA 1. Pentru o aplicaţie continuă arbitrară, $p : E \to B$, considerăm *spaţiul drumurilor lui* p, $L_p = \{(e,\ \alpha) \in E \times \mathrm{Top}(I,\ B) \mid p(e) = \alpha(0)\}$, $\mathrm{Top}(I,\ B)$ fiind cu topologia compact deschisă.



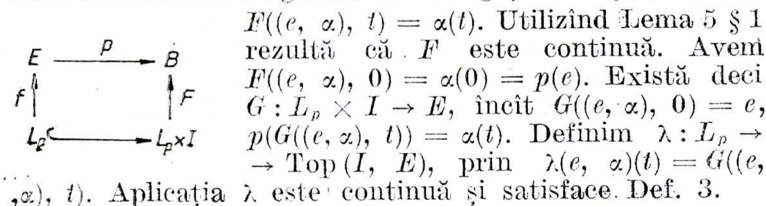
DEFINIŢIA 3. Se numeşte *conexiune pentru* p (sau *funcţie de ridicare a drumurilor*) o aplicaţie continuă $\lambda : L_p \to \mathrm{Top}(I,\ E)$, satisfăcînd condiţiile :

i) $\lambda(e,\ \alpha)(0) = e$;

ii) $p \circ \lambda(e,\ \alpha) = \alpha$, $\forall (e,\ \alpha) \in L_p$.

TEOREMA 1. *Condiţia necesară şi suficientă ca o aplicaţie continuă, $p : E \to B$, să fie o fibrare Hurewicz este ca p să aibă o conexiune.*

Demonstraţie. Să presupunem că p este fibrare Hurewicz. Considerăm diagrama din stînga, unde $f(e,\ \alpha) = e$, $F((e,\ \alpha),\ t) = \alpha(t)$. Utilizînd Lema 5 § 1 rezultă că F este continuă. Avem $F((e,\ \alpha),\ 0) = \alpha(0) = p(e)$. Există deci $G : L_p \times I \to E$, încît $G((e,\ \alpha),\ 0) = e$, $p(G((e,\ \alpha),\ t)) = \alpha(t)$. Definim $\lambda : L_p \to \mathrm{Top}\,(I,\ E)$, prin $\lambda(e,\ \alpha)(t) = G((e,\ \alpha),\ t)$. Aplicaţia λ este continuă şi satisface Def. 3.



Reciproc, presupunem că λ este o conexiune pentru p şi să considerăm o diagramă ca în Def. 1, cu X un spaţiu topologic arbitrar. Definim $g : X \to \mathrm{Top}(I,\ B)$, prin $g(x)(t) = F(x,\ t)$. Avem $g(x)(0) = pf(x)$, deci $(f(x),\ g(x)) \in L_p$. Definim $G : X \times I \to E$, prin $G(x,\ t) = \lambda(f(x),\ g(x))(t)$. Datorită continuităţii aplicaţiilor f, g şi λ, este continuă şi G. Aceasta satisface condiţiilor Def. 1.

PROPOZIŢIA 1. *Pentru orice funcţie continuă $p : E \to B$, aplicaţia $P : L_p \to B$, $P(e,\ \alpha) = \alpha(1)$, este o fibrare Hurewicz.*

Demonstraţie. Să arătăm mai întii că P este o aplicaţie continuă. Fie D deschisă în B. Atunci, $P^{-1}(D) = \{(e,\ \alpha) \mid \alpha(1) \in D\} = (E \times B(\{1\},\ D)) \cap L_p$, care este deschisă în L_p. Să construim acum o conexiune pentru P. Avem

$$L_P = \{((e,\ \alpha),\ \theta) \in L_p \times \mathrm{Top}(I,\ B) \mid \theta(0) = \alpha(1),\ (\alpha(0) = p(e))\}.$$

Definim $\lambda : L_P \to \mathrm{Top}(L_p,\ I)$ prin $\lambda((e,\alpha),\ \theta)(t) = (e, (\alpha * \theta)_{\frac{t+1}{2}})$ (vezi Notaţia din § 1). Avem $(\alpha * \theta)_{\frac{t+1}{2}}(0) = (\alpha * \theta)(0) = \alpha(0) = p(e)$, deci $(e,\ (\alpha * \theta)_{\frac{t+1}{2}}) \in L_p$. Apoi,

$$\lambda((e,\ \alpha),\ \theta)(0) = (e,\ (\alpha * \theta)_{\frac{1}{2}}) = (e,\ \alpha),$$

$$P(\lambda((e,\ \alpha),\ \theta)(t)) = (\alpha * \theta)_{\frac{t+1}{2}}(1) = (\alpha * \theta)\left(\frac{t+1}{2}\right) = \theta(t).$$

Rămîne să arătăm că λ este continuă. Fie $B(K,\ D)$ deschisă în $\mathrm{Top}\ (I,\ L_p)$. Prin urmare, K este compact în I şi D deschisă în L_p. Putem presupune că $D = (D'' \times B(K',\ D')) \cap L_p$, cu D'' deschisă în E, D' deschisă în B. Atunci

$$\lambda^{-1}(B(K,\ D)) = \{((e,\ \alpha),\ \theta) \in L_P \mid \lambda((e,\ \alpha),\ \theta)(K) \subset D\} =$$

$$= \{((e,\ \alpha),\ \theta) \in L_P \mid (e,\ (\alpha * \theta)_{\frac{K+1}{2}}) \in D'' \times B(K',\ D')\} =$$

$$= \left\{((e,\ \alpha),\ \theta) \in L_P \mid e \in D'',\ (\alpha * \theta)\left(\frac{K'(K+1)}{2}\right) \subset D'\right\} =$$

$$= [D'' \times B(K_1,\ D') \times B(K_2,\ D')] \cap L_P,$$

unde

$$K_1 = \{t'(t+1) \mid t \in K,\ t' \in K'\} \cap [0,1],$$

$$K_2 = \{t'(t+1) - 1 \mid t \in K,\ t' \in K'\} \cap [0,\ 1].$$

Aceasta arată că λ este continuă. Cu cele de mai sus, se obține că λ este o conexiune pentru P și, în baza Teoremei 1, P este o fibrare Hurewicz.

NOTAȚIA 2. Pentru un spațiu topologic punctat (X, x_0), notăm prin $X^I_{x_0}$ subspațiul lui $\mathrm{Top}\,(I, X)$ (cu topologia compact deschisă) format din drumurile ce încep din x_0.

COROLAR 2. *Pentru orice spațiu topologic punctat* $(X,\ x_0)$, *aplicația* $P : X^I_{x_0} \to X$, $P(\alpha) = \alpha(1)$ *este o fibrare Hurewicz.*

Demonstrație. Aplicăm Propoziția 1 incluziunii $p : \{x_0\} \hookrightarrow X$.

DEFINIȚIA 4. O *fibrare Serre* se numește *cu drum unic ridicat*, prescurtat UHLP, dacă ridicarea unui drum într-un punct, (conform Cor. 1), este unică.

TEOREMA 2. *Condiția necesară și suficientă ca o fibrare Hurewicz să fie cu* UHLP *este ca fibra în orice punct să conțină numai drumuri constante.*

Demonstrație. Fie $p : E \to B$, cu UHLP. Pentru un punct $b \in B$, fie fibra $p^{-1}(b)$ și $\alpha : I \to p^{-1}(b)$ un drum, iar $e_{\alpha(0)}$ drumul constant în $\alpha(0)$. Avem $p\alpha = pe_{\alpha(0)} = e_b$, $\alpha(0) = e_{\alpha(0)}(0)$ și din ipoteză rezultă $\alpha = e_{\alpha(0)}$.

Reciproc, să presupunem că orice fibră are numai drumuri constante și fie $\alpha,\ \beta : I \to E$, încît $\alpha(0) = \beta(0)$ și $p \circ \alpha = p \circ \beta$. Pentru $t \in I$, fixat, definim drumul $\gamma(t) : I \to E$, prin

$$\gamma(t)(t') = \begin{cases} \alpha((1-2t')t), & 0 \leqslant t' \leqslant 1/2, \\ \beta((2t'-1)t), & 1/2 \leqslant t' \leqslant 1. \end{cases}$$

Atunci $\gamma(t)(0) = \alpha(t)$, $\gamma(t)\,(1) = \beta(t)$, deci $p \circ \gamma(t)$ este un drum închis în $p(\alpha(t)) = p(\beta(t))$. Mai mult, să observăm că, notînd cu α_t drumul $\alpha_t(t') = \alpha(tt')$ în B, avem $p \circ \gamma(t) = p\alpha_t * \widehat{p\alpha_t}$, ceea ce implică faptul că există $F : p \circ \gamma(t) \simeq e_{p\alpha(t)}$ rel ∂I (vezi Teorema 2 § 1).

Fie acum $\lambda : L_p \to \mathrm{Top}\,(I,\ E)$, o conexiune pentru p și drumurile $\omega_i : I \to E$, $i = 1,\ 2,\ 3$, definite prin

$$\omega_1(t'') = \lambda(\gamma(t)(0), F_0)(t''),\quad \omega_2(t') = \lambda(\gamma(t)(t'), F_{t'})(1),$$

$$\omega_3(t'') = \lambda(\gamma(t)(1), F_1)(t'')\ ^{*)}.$$

Pentru acestea avem

$$p\omega_1(t'') = F_0(t'') = p\alpha(t),\quad p\omega_2(t') = F_{t'}(1) = p\alpha(t),$$

$$p\omega_3(t') = F_1(t'') = p\alpha(t),$$

deci $\omega_i \in \mathrm{Top}\,(I,\ p^{-1}(p\alpha(t)))$. Prin ipoteză, acestea sînt drumuri constante. Avem așadar

$$\omega_1(0) = \omega_1(1) \Rightarrow \gamma(t)(0) = \lambda(\gamma(t)(0),\ F_0)(1),$$

$$\omega_2(0) = \omega_2(1) \Rightarrow \lambda(\gamma(t)(0),\ F_0)(1) = \lambda(\gamma(t),\ F_1)(1),$$

$$\omega_3(0) = \omega_3(1) \Rightarrow \gamma(t)(1) = \lambda(\gamma(t)(1),\ F_1)(1).$$

Din relațiile de mai sus deducem $\gamma(t)(0) = \gamma(t)(1)$, adică $\alpha(t) = \beta(t)$. Cum t a fost luat arbitrar rezultă $\alpha = \beta$.

COROLAR 3. *Dacă o fibrare Hurewicz are toate fibrele discrete, atunci are* UHLP.

LEMA 1. *Fie* $p : E \to B$ *o fibrare Serre,* $g : I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I \to E$, $H : I^n \times I \to B$ $(n \geqslant 0)$, *încît* H *este o extensie pentru* $p \circ g$. *Există atunci* $G : I^n \times I \to E$, *care prelungește pe* g *și* $p \circ G = H$.

Demonstrație. Este ușor de văzut că perechea $(I^n \times I,\ I^n \times 0 \cup \partial I^n \times I)$ este homeomorfă cu perechea $(I^n \times I,\ I^n \times 0)$ $^{**)}$. Lema rezultă acum din HLP.

Pentru o fibrare Serre, $p : E \to B$, fie $e \in E$, $b \in B$, ca puncte bază $(p(e) = b)$ și $F = p^{-1}(b)$, fibra în b. Aplicațiile continue $(F,\ e) \xrightarrow{i} (E,\ e) \xrightarrow{p} (B,\ b)$ induc homomorfismele $\pi_1(F,\ e) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E,\ e) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B,\ b)$.

---

*) Motivați aceasta.

**) $F_{t'}(t'') = F(t',\ t'')$.

LEMA 2. *Pentru orice fibrare Serre, $p : E \to B$, șirul de grupuri fundamentale,*

$$\pi_1(F, e) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b),$$

este exact.

Demonstrație. Fie $[\alpha] \in \pi_1(F, e)$. Atunci,

$$p_* i_*[\alpha] = [p\alpha] = [e_b] \Rightarrow \operatorname{Im} i_* \subseteq \operatorname{Ker} p_*.$$

Reciproc, fie $[\beta] \in \pi_1(E, e)$, cu $p_*[\beta] = [p\beta] = [e_b]$. Există deci $H : (I \times I, \partial I \times I) \to (B, b)$, încît $H(t, 0) = p\beta(t)$, $H(t, 1) = b$ (și $H(\bar{t}, t') = b$, pentru $\bar{t} = 0, 1$). Luînd $g : I \times \{0\} \cup \partial I \times I \to E$, $g(t, 0) = \beta(t)$, $g(\bar{t}, t') = e$, rezultă că H prelungește aplicația $p \circ g$. Conform Lemei 1, există $G : I \times I \to E$, încît $G(t, 0) = \beta(t)$, $G(0, t') = G(1, t') = e$ și $pG = H$. Definim $\alpha : I \to E$, prin $\alpha(t) = G(t, 1)$. Avem $\alpha(0) = \alpha(1) = e$, $p\alpha(t) = pG(t, 1) = H(t,1) = b$, deci $[\alpha] \in \pi_1(F, e)$. În plus, $G : i\alpha \simeq \beta$ rel ∂I, $i_*[\alpha] = [\beta]$, adică avem $\operatorname{Ker} p_* \subseteq \operatorname{Im} i_*$.

COROLAR 4. *Dacă $p : E \to B$ este o fibrare Hurewicz cu proprietatea de drum unic ridicat, atunci, pentru $\alpha, \beta \in \mathrm{Top}(I, E)$, cu $\alpha(0) = \beta(0)$ și $p\alpha \simeq p\beta$ rel ∂I, rezultă $\alpha \simeq \beta$ rel ∂I.*

Demonstrație. Din Teorema 2 și Lema 2, rezultă că $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ este monomorfism. Deoarece $p\alpha(1) = p\beta(1)$, rezultă din Lema 1 *) că $\alpha(1) = \beta(1)$. Atunci, $\alpha * \hat{\beta}$ este un drum închis și avem $p_*[\alpha * \hat{\beta}] = [e_b] \Rightarrow [\alpha * \hat{\beta}] = [e_{\alpha(0)}] \Rightarrow \alpha \simeq \beta$ rel ∂I.

LEMA 3. *Fie $p : E \to B$ o fibrare Hurewicz, cu $b \in B$ și $e \in F = p^{-1}(b)$. Atunci, aplicația $p : (E, F, e) \to (B, \{b\}, b)$, induce izomorfismul $p_* : \pi_n(E, F, e) \cong \pi_n(B, b)$, $\forall n \geq 2$* **).

Demonstrație. După Teorema 6 § 1, există un izomorfism $\hat{\Phi} : \pi_n(B, b) \cong \pi_{n-1}(\Omega(B, b), e_b)$. Apoi, prin Teorema 4 § 5, există un izomorfism $\varphi : \pi_n(E, F, e) \cong \pi_{n-1}(L, \varepsilon_e)$

*) Se ia $n = 1$, $g(t, 0) = \alpha(t)$, $g(0, t') = \alpha(0)$, $g(1, t') = \beta(1)$ și $H : p\alpha \simeq p\beta$ rel ∂I.

**) Lema are loc și pentru fibrări Serre (vezi exerc. 13).

(aici ε_e este drumul constant în e), unde $L = \{\alpha \in \mathrm{Top}(I, E) \mid \alpha(0) = e, \alpha(1) \in F\}$. Putem considera aplicația $u : L \to \Omega(B, b)$, $u(\alpha) = p\alpha$, deoarece $p\alpha(0) = p(e) = b$ și $p\alpha(1) \in p(F) = b$. Aplicația u este continuă, deoarece $u^{-1}(B(K, D) \cap \Omega(B, b)) = B(K, p^{-1}(D)) \cap L$. Dacă $\lambda : L_p \to \mathrm{Top}(I, E)$ este o conexiune pentru p, fie $v : \Omega(B, b) \to L$, $v(\beta) = \lambda(e, \beta)$. Avem $v(\beta)(0) = e$ și $pv(\beta)(1) = p\lambda(e, \beta)(1) = \beta(1) = b$, deci $v(\beta)(1) \in F$, încît, în adevăr, $v(\beta) \in L$. Aplicația v este continuă datorită continuității conexiunii λ. În plus, $uv(\beta) = pv(\beta) = p\lambda(e, \beta) = \beta$, deci $uv = 1_{\Omega(B, b)}$. Pe de altă parte, $vu(\alpha) = v(p\alpha) = \lambda(e, p\alpha)$.

Definim $H : L \times I \to L$ prin $H(\alpha, t)(t') = \lambda(\alpha((1 - t)t'), A)(tt')$, unde $A : I \to B$ este drumul definit prin $A(t'') = p\alpha[t'(1 - t - t'') + t''(1 + tt')]$. Avem $A(0) = p(\alpha(1 - t)t')$. Apoi, rezultă ușor că aplicația $((\alpha, t), t') \mapsto A$ este continuă, ceea ce implică continuitatea aplicației H. În sfîrșit, $H(\alpha, 0)(t') = \lambda(\alpha(t'), A)(0) = \alpha(t')$, $H(\alpha, 1)(t') = \lambda(e, A)(t')$. Pentru $t = 1$, avem $A(t'') = p\alpha(t'')$, deci $A = p\alpha$, încît $H(\alpha, 1)(t') = \lambda(e, p\alpha)(t')$, adică $H(\alpha, 1) = vu(\alpha)$. Prin urmare, $H : 1_L \simeq vu$. Așadar, $u : L \to \Omega(B, b)$ este o echivalență omotopică. Avem $u(\varepsilon_e) = e_b$ și deci este indus izomorfismul $u_* : \pi_{n-1}(L, \varepsilon_e) \to \pi_{n-1}(\Omega(B, b), e_b)$. Ținînd seama de comutativitatea diagramei

$$\begin{array}{ccc} \pi_{n-1}(L, \varepsilon_e) & \xrightarrow{u_*} & \pi_{n-1}(\Omega(B, b), e_b) \\ \varphi \big\uparrow & & \big\uparrow \hat{\Phi} \\ \pi_n(E, F, e) & \xrightarrow{p_*} & \pi_n(B, b) \end{array}$$

rezultă că p_* este izomorfism, $\forall n \geq 2$.

TEOREMA 3. *Pentru o fibrare Hurewicz $p : E \to B$ cu $b \in B$, $F = p^{-1}(b)$, $e \in F$, are loc următorul șir exact de omotopie*

$$\ldots \to \pi_{n+1}(B, b) \xrightarrow{\partial_\#} \pi_n(F, e) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_n(B, b) \to \ldots$$

$$\ldots \to \pi_2(B, b) \xrightarrow{\partial_\#} \pi_1(F, e) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_1(B, b) \text{ *)}.$$

*) Teorema are loc și pentru fibrări Serre (vezi exerc. 13).

Demonstrație. După Teorema 1 § 6 este exact șirul de omotopie al perechii topologice punctate (E, F, e):

$$\ldots \to \pi_{n+1}(E, F, e) \xrightarrow{\partial} \pi_n(F, e) \xrightarrow{i_*} \pi_n(E, e) \xrightarrow{j_*} \pi_n(E, F, e) \to \ldots$$

$$\ldots \to \pi_2(E, F, e) \xrightarrow{\partial} \pi_1(F, e) \xrightarrow{i_*} \pi_1(E, e).$$

Ținînd seama de Lema 3, înlocuim $\pi_{n+1}(E, F, e)$ prin $\pi_{n+1}(B, b)$, pentru $n \geqslant 1$, și luăm

$$\partial_* = \partial \circ p_*^{-1} : \pi_{n+1}(B, b) \to \pi_{n+1}(E, F, e) \to \pi_n(F, e).$$

Mai avem egalitatea $p_* = p_* j_* : \pi_n(E, e) \to \pi_n(E, F, e) \to \pi_n(B, b)$. Întrucît $p_* : \pi_n(E, F, e) \to \pi_n(B, b)$ este izomorfism, rezultă că șirul ce se obține prin aceste identificări este exact. Ținînd seama și de Lema 2, deducem exactitatea șirului din enunțul teoremei.

OBSERVAȚIA 1. Șirul exact din Teorema 3 se poate completa, conform Obs. 1 § 6, prin $\pi_1(B, b) \xrightarrow{\partial} \pi_0(F, e) \to \to \pi_0(E, e) \xrightarrow{p_*} \pi_0(B, b)$.

COROLAR 5. *Dacă $p : E \to B$ este o fibrare Hurewicz, cu* ULHP, *atunci:*

a) $p_* : \pi_n(E, e) \cong \pi_n(B, b)$ $n \geqslant 2$;
b) $p_* : \pi_1(E, e) \to \pi_1(B, b)$ *este monomorfism.*
Demonstrație. Se utilizează Teoremele 2 și 3.

LEMA 4. *Fie $p : E \to B$ o fibrare Hurewicz, cu* UHLP, *și E spațiu liniar conex. Atunci, $\forall e_1, e_2 \in E$, există un drum θ în B, de la $p(e_1)$ la $p(e_2)$, și astfel încît $p_*\pi_1(E, e_2) = h_{[\theta]} p_*\pi_1(E, e_1)$. Reciproc, pentru orice drum θ în B, de la $p(e_1)$ la $b \in B$, există $e_2 \in p^{-1}(b)$, pentru care $h_{[\theta]} p_*\pi_1(E, e_2) = p_*\pi_1(E, e_2)$.*

Demonstrație. Dacă θ' este un drum în E, de la e_1 la e_2, avem $\pi_1(E, e_2) = h_{[\theta']}\pi_1(E, e_1)$ (Teorema 1 § 2). Prin urmare, $p_*\pi_1(E, e_2) = p_* h_{[\theta']}\pi_1(E, e_1) = h_{[p\theta']} p_*\pi_1(E, e_1)$ (Teorema 1 § 3), deci putem lua $\theta = p\theta'$.

Reciproc, dacă θ este un drum de la $p(e_1)$ la b, există $\theta' : I \to E$, $\theta'(0) = e_1$ și $p\theta' = \theta$. Dacă $e_2 = \theta'(1)$ avem

$$h_{[\theta]} p_*\pi_1(E, e_1) = p_* h_{[\theta']}\pi_1(E, e_1) = p_*\pi_1(E, e_2).$$

COROLAR 6. *Fie $p : E \to B$ o fibrare Hurewicz, cu* UHLP.

a) *Dacă E este liniar conex, mulțimea $p_*\pi_1(E)_b = \{p_*\pi_1(E, e) \mid e \in p^{-1}(b)\}$ este formată din subgrupuri conjugate ale grupului $\pi_1(B, b)$, $\forall b \in B$* *);

b) *Dacă θ este un drum de la b_1 la b_2 în B, $h_{[\theta]}$ transformă mulțimea $p_*\pi_1(E)_{b_1}$ în $p_*\pi_1(E)_{b_2}$.*

LEMA 5. *Dacă $p : E \to B$ este o fibrare Hurewicz, cu B un spațiu liniar conex și cu* UHLP, *atunci fibrele lui p sînt homeomorfe.*

Demonstrație. Fixăm $b \in B$ și fie $\theta : I \to B$, $\theta(0) = b$. Definim $F : p^{-1}(b) \times I \to B$, $F(e, t) = \theta(t)$. Utilizînd HLP pentru diagrama alăturată, există $G : p^{-1}(b) \times I \to E$, încît $G(e, 0) = e$, $\forall e \in p^{-1}(b)$ și $p \circ G = F$. Definim acum

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ \uparrow i & & \uparrow F \\ p^{-1}(b) & & p^{-1}(b)\times I \end{array}$$

$$\varphi(\theta) : p^{-1}(\theta(0)) \to p^{-1}(\theta(1)), \quad \varphi(\theta)(e) = G(e, 1), \quad \forall e \in p^{-1}(\theta(0)).$$

În adevăr, $p\varphi(\theta)(e) = F(e, 1) = \theta(1)$. Putem arăta că dacă $\theta \simeq \theta'$ rel ∂I, atunci $\varphi(\theta) = \varphi(\theta')$. În adevăr, notînd omotopia, ce corespunde lui F, pentru θ' prin F', fie pentru $e \in p^{-1}(b)$, $\widetilde{\theta}, \widetilde{\theta}' : I \to E$, $\widetilde{\theta}(t) = F(e, t)$, $\widetilde{\theta}'(t) = F'(e, t)$. Avem $\widetilde{\theta}(0) = \widetilde{\theta}'(0) = e$ și $p\widetilde{\theta} = \theta \simeq \theta' = p\widetilde{\theta}'$ rel ∂I. Din Corolarul 4, rezultă $\widetilde{\theta} \simeq \widetilde{\theta}'$ rel ∂I. Așadar, $\widetilde{\theta}(1) = \widetilde{\theta}'(1)$, adică $\varphi(\theta)(e) = F(e, 1) = \widetilde{\theta}(1) = \widetilde{\theta}'(1) = F'(e, 1) = \varphi(\theta')(e)$, $\forall e \in p^{-1}(b)$. Putem considera deci $\varphi([\theta]) : p^{-1}(\theta(0)) \to p^{-1}(\theta(1))$, care este homeomorfism, cu inversul $\varphi([\hat{\theta}])$.

DEFINIȚIA 5. a) Se numește *indicele unei fibrări Hurewicz*, care are UHLP și baza liniar conexă, cardinalul comun fibrelor lui p;

*) Două subgrupuri G_1, G_2 ale lui G se numesc *conjugate* dacă $G_2 = g^{-1}G_1g$, pentru un element $g \in G$.

b) Dacă G_1 este un subgrup al lui G, *indicele subgrupului* G_1 *în* G este cardinalul mulțimii G/G_1 a claselor de echivalență la dreapta (sau la stînga) mod G_1.

TEOREMA 4. *Fie* $p : E \to B$ *o fibrare Hurewicz cu* UHLP *avînd* E *și* B *liniar conexe. Atunci, indicele lui* p *este același cu indicele subgrupului* $p_*\pi_1(E, e)$ *în* $\pi_1(B, p(e))$, $\forall e \in E$.

Demonstrație. Fie $e_0 \in E$ un punct fixat. După Corolarul 6 și Lema 5, grupul $\pi_1(B, p(e_0))$ acționează ca grup de transformări la dreapta pe fibra $p^{-1}(p(e_0))$, prin $e[\theta] = \varphi[\theta](e)$, $\forall e \in p^{-1}(p(e_0))$, $[\theta] \in \pi_1(B, p(e_0))$. Această acțiune este tranzitivă: dacă $e_1, e_2 \in p^{-1}(p(e_0))$ și $\widetilde{\theta}$ este un drum de la e_1 la e_2, atunci $e_1[p\widetilde{\theta}] = e_2$. *Grupul de izotropie al lui* e_0*) coincide cu $p_*\pi_1(E, e_0)$. Se deduce atunc următoarea corespondență biunivocă între $\pi_1(B, p(e_0))/ /p_*\pi_1(E, e_0)$ și fibra $p^{-1}(p(e_0))$: elementului $e \in p^{-1}(p(e_0))$ îi asociem $[\theta] \in \pi_1(B, p(e_0))$ încît $e[\theta] = e_0$ și definim corespondența $e \mapsto [\theta]p_*\pi_1(E, e_0)$ (clasa lui $[\theta]$). Din cele de mai sus, aceasta este bine definită și este bijecție.

DEFINIȚIA 6. O *fibrare local trivială*, $\zeta = (E, B, F, p)$, constă dintr-o aplicație continuă $p : E \to B$, numită *proiecție*, un spațiu topologic F, numit *fibra* (*tip*), o acoperire deschisă $\mathscr{U} = \{U\}$ a lui B **) și niște homeomorfisme $\varphi_U : U \times F \to p^{-1}(U)$ încît, pentru orice $U \in \mathscr{U}$, compunerea $U \times F \xrightarrow{\varphi_U} p^{-1}(U) \xrightarrow{p} U$ este proiecția de primul factor $(p\varphi_U(x, y) = x)$.

EXEMPLUL 1. $\zeta = (B \times F, B, F, p)$, cu $p(b, y) = b$ este un *fibrat trivial*.

OBSERVAȚIA 2. Pentru orice fibrat local trivial $\zeta = (E, B, F, p)$ și orice punct $b \in B$, fibra locală $p^{-1}(b)$ este homeomorfă, prin $\varphi_{U,b} : F \to p^{-1}(b)$, dat de $\varphi_{U,b}(y) = \varphi_U(b, y)$, cu F.

---

*) care invariază pe e_0.

**) numită *atlas de trivializare*.

Fie S^n_+ și S^n_- emisferele (închise) ale n-sferei S^n. Fie G un grup de homeomorfisme ale unui spațiu topologic F și o aplicație $h : S^{n-1} \to G$. Notăm prin E_h spațiul obținut din suma topologică $(S^n_- \times F) \amalg (S^n_+ \times F)$ identificînd $(x, y) \in S^n_- \times F$ cu $(x, h(x)y) \in S^n_+ \times F$, pentru $x \in S^{n-1} = S^n_+ \cap S^n_-$. Fie $q : (S^n_- \times F) \amalg (S^n_+ \times F) \to E_h$ proiecția canonică. Definim $p_h : E_h \to S^n$, încît $p_h q(x, y) = x$, pentru $(x, y) \in (S^n_- \times F) \amalg (S^n_+ \times F)$. Aplicația p_h este continuă.

TEOREMA 5. $\zeta_h = (E_h, S^n, F, p_h)$ *este un fibrat local trivial* *).

Demonstrație. Fie $U = S^n \setminus S^{n-1} = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \mid x_{n+1} \neq 0\}$ și $V = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in S^n \mid -\varepsilon < x_{n+1} < \varepsilon\}$, pentru $\varepsilon > 0$. Perechea $\{U, V\}$ este o acoperire deschisă a lui S^n. Definim $\varphi_U : U \times F \to p_h^{-1}(U)$, $\varphi_U(x, y) = q(x, y)$. Avem, într-adevăr, $p_h\varphi_U(x, y) = p_h q(x, y) = x \in U$. Aplicația φ_U este continuă, datorită continuității lui q. Este chiar un homeomorfism, cu inversul $\varphi_U^{-1}(q(x, y)) = (x, y)$ (care este aplicație corect definită și continuă).

Aplicația $\varphi_V : V \times F \to p_h^{-1}(V)$ se definește astfel: dacă $(x, y) \in V \times F$, cu $x \in S^n_+$, atunci $\varphi_V(x, y) = q(x, y)$, iar dacă $x \in S^n_-$ și $\bar{x}$ este punctul unde semimeridianul prin x întîlnește ecuatorul S^{n-1}, atunci $\varphi_V(x, y) = q(x, h(\bar{x})y)$. Rezultă ușor că φ_V este corect definită și că este chiar un homeomorfism, cu inversul $\varphi_V^{-1}(q(x, y)) = (x, h(\bar{x})^{-1}y)$, în cea de a doua situație. În sfîrșit, $p_h\varphi_U(x, y) = x$ și $p_h\varphi_V(x, y) = x$.

Demonstrația următoarei teoreme (chiar pentru spații paracompacte) se poate urmări, de exemplu, în [51, p. 96] sau [42, p. 245].

---

*) cu *grup structural* G (vezi, de exemplu, [51, p. 90]).

TEOREMA 6. *Dacă $\zeta = (E, B, F, p)$ este o fibrare local trivială, cu B un spațiu metric, atunci $p : E \to B$ este o fibrare Hurewicz* *).

DEFINIȚIA 7. Un fibrat local trivial $\zeta = (\widetilde{X}, X, F, p)$ se numește *spațiu de acoperire*, sau $\widetilde{X}$ este un *spațiu de acoperire al lui* X, cu *proiecția de acoperire* p, dacă $\widetilde{X}$ și X sînt liniar conexe și fibra F este un spațiu discret.

COROLAR 7. *Dacă $\zeta = (\widetilde{X}, X, F, p)$ este un spațiu de acoperire, există o acoperire deschisă $\mathscr{U} = \{U\}$ a lui X, încît $\forall U \in \mathscr{U}$, $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{\alpha} \widetilde{U}_\alpha$, cu $\widetilde{U}_\alpha$ disjuncte și $p | \widetilde{U}_\alpha : \widetilde{U}_\alpha \to U$ homeomorfisme.*

Demonstrație. Fie $\mathscr{U} = \{U\}$ o acoperire deschisă a lui X încît $\varphi_U : U \times F \to p^{-1}(U)$ sînt homeomorfisme, $\forall U \in \mathscr{U}$. Pentru $y \in F$, fie mulțimea deschisă $\widetilde{U}_y = \varphi_U(U \times \{y\})$. Avem $p^{-1}(U) = \bigcup\limits_{y \in F} \widetilde{U}_y$ și $\varphi_{U,y} : U \to \widetilde{U}_y$ este un homeomorfism, cu inversul $p | \widetilde{U}_y$.

COROLAR 8. *Orice proiecție de acoperire este un homeomorfism local.*

Demonstrație. Fie $p : \widetilde{X} \to X$ o proiecție de acoperire, $\widetilde{x} \in \widetilde{X}$ și $x = p(\widetilde{x})$. Fie $U_x \in \mathscr{V}(x)$ deschisă în X și $\widetilde{U}_x$ deschisă în $\widetilde{X}$, încît $p | \widetilde{U}_x : \widetilde{U}_x \to U_x$ este homeomorfism. Atunci $\widetilde{U}_x \in \mathscr{V}(\widetilde{x})$.

OBSERVAȚIA 3. Nu orice homeomorfism local este o proiecție de acoperire. De exemplu, dacă $p = \exp|(0, 3) : (0, 3) \to S^1$, atunci p este un homeomorfism local dar nu este proiecție de acoperire, deoarece $\forall U \in \mathscr{V}(1)$ în S^1, $p^{-1}(U)$ nu satisface Cor. 7.

---

*) Proprietatea de fibrare Serre este dovedită în exerc. 15.

TEOREMA 7. *Orice proiecție de acoperire este o fibrare Hurewicz cu UHLP.*

Demonstrație. Fie $p : \widetilde{X} \to X$ o proiecție de acoperire. Să arătăm că există o conexiune pentru p. Avem

$$L_p = \{(\widetilde{x}, \alpha) \in \widetilde{X} \times \mathrm{Top}(I, X) \mid p(\widetilde{x}) = \alpha(0)\}.$$

Fie $\mathscr{U} = \{U\}$ o acoperire deschisă a lui X, satisfăcînd condițiilor Cor. 7. Fie $(\widetilde{x}, \alpha) \in L_p$, fixat. Atunci, $\{\alpha^{-1}(U)\}$ este o acoperire deschisă a spațiului metric compact I. După teorema lui Lebesgue (Teorema 11 § 9 Cap. I), există o divizare $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_m = 1$ a lui I, încît $\alpha([t_{i-1}, t_i]) \subset U_i \in \mathscr{U}$. Deci $\alpha([t_0, t_1]) \subset U_1$ și deoarece $p(\widetilde{x}) = \alpha(0) \in U_1 \Rightarrow \widetilde{x} \in p^{-1}(U_1)$. Fie $\widetilde{U}_1 \subset p^{-1}(U_1)$, încît $p | \widetilde{U}_1 : \widetilde{U}_1 \to U_1$ este homeomorfism și $\widetilde{x} \in \widetilde{U}_1$.

Notăm $\alpha_i : I \to U_i$ drumul $\alpha_i(t) = \alpha[tt_i + (1 - t)t_{i-1}]$. Putem considera atunci $\widetilde{\alpha}_1 = (p | U_1)^{-1} \circ \alpha_1 : I \to \widetilde{U}_1$. Avem apoi $\alpha_2(I) \subset U_2$ și fie $\widetilde{U}_2 \subset p^{-1}(U_2)$, încît $\alpha_1(1) \in \widetilde{U}_2$. Se definește $\widetilde{\alpha}_2 = (p | \widetilde{U}_2)^{-1} \circ \alpha_2$. Avem $\widetilde{\alpha}_1(1) = (p | \widetilde{U}_1)^{-1}(\alpha(t_1)) = \widetilde{\alpha}_2(0)$. Continuînd, se obține $\widetilde{\alpha}_i : I \to \widetilde{U}_i$, $\widetilde{\alpha}_i = (p | \widetilde{U}_i)^{-1} \circ \alpha_i$, $i \leqslant m$, și putem defini $\lambda(\widetilde{x}, \alpha) = \widetilde{\alpha}_1 * \widetilde{\alpha}_2 * \ldots * \widetilde{\alpha}_m$. Obținem o aplicație $\lambda : L_p \to \mathrm{Top}(I, \widetilde{X})$, $(\widetilde{x}, \alpha) \mapsto \lambda(\widetilde{x}, \alpha)$. Avem $\lambda(\widetilde{x}, \alpha)(0) = \widetilde{\alpha}_1(0) = (p | \widetilde{U}_1)^{-1}(\alpha(0)) = \widetilde{x}$, $p\lambda(\widetilde{x}, \alpha) = \alpha$, cum se verifică ușor. Rămîne să arătăm că λ este o aplicație continuă. Pentru $(\widetilde{x}, \alpha) \in L_p$, fixat, fie $B(K, \widetilde{U})$ vecinătate a lui $\lambda(\widetilde{x}, \alpha) \in \mathrm{Top}(I, \widetilde{X})$, cu $\widetilde{U}$ deschisă în $\widetilde{X}$ și aplicîndu-se prin p homeomorf pe o deschisă U din X *). Fie $K_i = K \cap [t_{i-1}, t_i]$. Avem $\widetilde{\alpha}(K_i) \subset \widetilde{U}$ și deducem că $\lambda^{-1}(B(K, \widetilde{U})) = \widetilde{U} \times \bigcap\limits_{i=1}^{m} B(K_i, U) = \widetilde{U} \times B(K, \widetilde{U})$.

Proprietatea de drum unic ridicat rezultă din Teorema 2 și din Def. 7.

---

*) Arătați că este suficient să considerăm asemenea vecinătăți.

DEFINIȚIA 8. Vom spune că un grup G acționează la stînga, *propriu discontinuu* pe un spațiu X, dacă orice $x \in X$ are o vecinătate deschisă V, încît $gV \cap g'V = \emptyset$, $\forall g$, $g \in G$, $g \neq g'$ *).

TEOREMA 8. *Dacă grupul G acționează la stînga propriu discontinuu pe spațiul liniar conex X, atunci proiecția canonică $\pi : X \to X/G$ este o proiecție de acoperire.*

Demonstrație. Din § 10 Cap. I rezultă că π este o surjecție continuă și deschisă. Pentru $x \in X$, fie $\tilde{U}_x \in \mathscr{V}(x)$, deschisă, astfel ca $g\tilde{U}_x \cap g'\tilde{U}_x = \emptyset$, $\forall g$, $g' \in G$, $g \neq g'$. Atunci, $U_x = \pi(\tilde{U}_x)$ este deschisă și $\mathscr{U} = \{U_x\}_{x \in X}$ constituie o acoperire deschisă a lui X/G. (Putem avea $x \neq x'$ dar $U_x = U_{x'}$). Apoi, $\pi^{-1}(U_x) = \pi^{-1}(\pi(\tilde{U}_x)) = \bigcup\limits_{g \in G} g\tilde{U}_x$, cu condiția de disjuncție de mai sus, iar $\pi|g\tilde{U}_x : g\tilde{U}_x \to U_x$ este un homeomorfism. Luînd $F = G$, cu topologia discretă, se verifică Def. 7.

Pentru a da exemple de spații de acoperire, utilizînd Teorema 8, va fi util următorul rezultat.

LEMA 6. *Dacă G este un grup finit acționînd* **liber** **) *pe un spațiu Hausdorff X, atunci acțiunea lui G este propriu discontinuă.*

Demonstrație. Fie $G = \{1 = g_0, g_1, \ldots, g_n\}$. Deoarece X este spațiu Hausdorff, oricare ar fi $x \in X$, există vecinătăți deschise $U_i \in \mathscr{V}(g_i, x)$, $i = 0, 1, \ldots, n$, cu $U_0 \cap U_j = \emptyset$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Fie $U = \bigcap\limits_{j=0}^{n} g_j^{-1}(U_j) \in \mathscr{V}(x)$.

Acum, $g_i U = \bigcap\limits_{j=0}^{n} g_i(g_j^{-1}(U_j)) \subseteq U_i$, $\forall i$ și $\forall i \neq j$, $g_i U \cap g_j U = g_j((g_j^{-1} g_i U) \cap U) = g_j(g_k U \cap U) = \emptyset$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, deoarece $g_k U \subseteq U_k$ și $U \subseteq U_0$. Deci G acționează propriu discontinuu pe X.

OBSERVAȚIA 4. Orice grup propriu discontinuu este liber.

Fie X un spațiu liniar conex și G un grup ce acționează propriu discontinuu pe X. Fie $p : X \to X/G$ proiecția de acoperire indusă, $x_0 \in X$ și $y_0 = p(x_0)$. Avem $p^{-1}(y_0) =$

*) Dacă G este un grup discret propriu (vezi Def. 3 § 10 Cap. I), acționînd liber, atunci acțiunea este propriu discontinuă [18].

**) adică $gx \neq x$, $\forall x \in X$, $\forall g \in G$, $g \neq 1$.

$= \{gx_0 | g \in G\}$. Dacă $[\alpha] \in \pi_1(X/G, y_0)$, există și este unic $\tilde{\alpha} : I \to X$, $\tilde{\alpha}(0) = x_0$, $p\tilde{\alpha} = \alpha$. Atunci, $\tilde{\alpha}(1) \in p^{-1}(y_0)$ și deci există $g_\alpha \in G$, încît $\tilde{\alpha}(1) = g_\alpha \cdot x_0$.

LEMA 7. *Corespondența $[\alpha] \mapsto g_\alpha$ definește un homomorfism de grupuri, $\varphi : \pi_1(X/G, y_0) \to G$, al cărui nucleu este $p_* \pi_1(X, x_0)$.*

Demonstrație. Dacă $\beta \simeq \alpha$ rel ∂I și $\tilde{\beta}$ este ridicarea în x_0 a lui β, atunci $p\tilde{\alpha} \simeq p\tilde{\beta}$ rel ∂I și $\tilde{\alpha}(0) = \tilde{\beta}(0)$ implică $\tilde{\alpha} \simeq \tilde{\beta}$ rel ∂I (Cor. 4). Deci $\tilde{\beta}(1) = \tilde{\alpha}(1)$, încît φ este bine definită. Fie acum $[\alpha]$, $[\beta] \in \pi_1(X/G, y_0)$. Avem $\widetilde{\alpha * \beta} = \tilde{\alpha} * \tilde{\tilde{\beta}}$, unde $\tilde{\tilde{\beta}}$ este ridicarea lui β în punctul $x_1 = \tilde{\alpha}(1)$. Deoarece $g_\alpha \tilde{\beta}$ este o ridicare a lui β în $g_\alpha \cdot x_0$ și $\tilde{\alpha}(1) = g_\alpha \cdot x_0$, rezultă $\widetilde{\alpha * \beta} = \tilde{\alpha} * g_\alpha \cdot \tilde{\beta}$. Prin urmare, $\widetilde{\alpha * \beta}(1) = (g_\alpha \cdot \tilde{\beta})(1) = g_\alpha(\tilde{\beta}(1)) = (g_\alpha \cdot g_\beta) \cdot x_0$, adică $\varphi([\alpha][\beta]) = g_\alpha g_\beta = \varphi[\alpha]\varphi[\beta]$. Apoi, $\operatorname{Ker} \varphi = \{[\alpha] \in \pi_1(X/G, y_0) | g_\alpha = 1\}$. Avem $g_\alpha = 1 \Leftrightarrow \tilde{\alpha}(1) = x_0$ (și $\tilde{\alpha}(0) = x_0$, $p\tilde{\alpha} = \alpha$). Rezultă că $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(X, x)$, care împreună cu $p\tilde{\alpha} = \alpha$ implică $[\alpha] \in p_* \pi_1(X, x_0)$. Deci $\operatorname{Ker} \varphi \subseteq p_* \pi_1(X, x_0)$. Incluziunea reciprocă urmează imediat.

COROLAR 9. *În condițiile* Lemei 7, $p_* \pi_1(X, x_0)$ *este subgrup normal al grupului* $\pi_1(X/G, y_0)$.

TEOREMA 9. *Dacă G acționează la stînga, propriu discontinuu pe spațiul liniar conex X, atunci $\forall x_0 \in X$, cu $y_0 = p(x_0)$, pentru proiecția canonică $p : X \to X/G$, avem*

$$\pi_1(X/G, y_0)/p_* \pi_1(X, x_0) \cong G.$$

Demonstrație. Este suficient, în baza Lemei 7, să arătăm că homomorfismul $\varphi : \pi_1(X/G, y_0) \to G$ este surjectiv. Dacă $g \in G$, fie $\alpha_g : I \to X$, încît $\alpha_g(0) = x_0$, $\alpha_g(1) = g \cdot x_0$. Atunci, $[p\alpha_g] \in \pi_1(X/G, y_0)$ și avem $\varphi[p\alpha_g] \cdot x_0 = \widetilde{p\alpha_g}(1) = \alpha_g(1) = g \cdot x_0$, deci $\varphi[p\alpha_g] = g$.

COROLAR 10. *În condițiile* Teoremei 9, *dacă X este simplu conex, atunci* $\pi_1(X/G) \cong G$.

EXERCIŢII

1. Fie X un spaţiu liniar conex, $x_0 \in X$ şi $P: X^I_{x_0} \to X$ fibrarea Hurewicz a drumurilor (Cor. 2). Fie ρ o relaţie de echivalenţă în $X^I_{x_0}$ satisfăcînd condiţiile:

i) Dacă $\alpha, \alpha' \in X^I_{x_0}$, atunci $\alpha\rho\alpha' \Rightarrow \alpha(1) = \alpha'(1)$;

ii) Dacă $\alpha, \alpha' \in X^I_{x_0}$, cu proprietatea $\alpha\rho\alpha'$ şi $\theta: I \to X$ este un drum, încît $\theta(0) = \alpha(1) = \alpha'(1)$, atunci $(\alpha * \theta)_{\frac{t+1}{2}} \rho (\alpha' * \theta)_{\frac{t+1}{2}}$, $\forall t \in I$, unde μ_t este definit prin $\mu_t(t') = \mu(tt')$.

Fie $\langle\alpha\rangle$ clasa de echivalenţă a unui drum $\alpha \in X^I_{x_0}$ şi E spaţiul topologic cît $X^I_{x_0}/\rho$.

a) Să se arate că aplicaţia $p: E \to X$, $p(\langle\alpha\rangle) = \alpha(1)$ este bine definită şi este o fibrare Hurewicz;

b) Dacă H este un subgrup al grupului $\pi_1(X, x_0)$ şi definim $\alpha\rho\alpha' \Leftrightarrow \alpha(1) = \alpha'(1)$ şi $[\alpha * \alpha'^{-1}] \in H$, atunci ρ satisface condiţiile i) şi ii);

c) Dacă X este conex şi local liniar conex, atunci fibrarea Hurewicz obţinută la b) este o proiecţie de acoperire.

Indicaţie. a) Fie $L^d = \{(\langle\alpha\rangle, \theta) \in E \times \text{Top}(I, X) \mid \alpha(1) = \theta(0)\}$. Se defineşte $\lambda: L_p \to \text{Top}(I, E)$, prin $\lambda(\langle\alpha\rangle, \theta)(t) = (\alpha * \theta)_{\frac{t+1}{2}}$. Aceasta este bine definită şi este o conexiune pentru p.

Pentru c) se poate consulta, de exemplu, [39, p. 203].

2. Fie $p: E \to B$ o fibrare Hurewicz şi $f: X \to B$ continuă, încît $f(X) \subset p(E)$. Dacă X este contractibil, există $g: X \to E$, încît $pg = f$; g este numită o *ridicare* a lui f.

Indicaţie. Fie X contractibil la x_0. Atunci $\exists F: f \simeq c_{f(x_0)}$. Din HLP rezultă $G: X \times I \to E$, cu $G(x, 0) = e_0 \in p^{-1}(f(x_0))$ şi $pG = F$. Atunci, $g(x) = G(x, 1)$ satisface condiţia cerută.

3. Fie $p: (E, e_0) \to (B, b_0)$ o fibrare Hurewicz cu UHLP. Dacă $\{x_0\}$ este o retractă tare de deformare a lui X, atunci fiecare aplicaţie $f: (X, x_0) \to (B, b_0)$ poate fi ridicată la o aplicaţie $g: (X, x_0) \to (E, e_0)$ în raport cu p, deci avînd $p \circ g = f$.

Indicaţie. Din ipoteză, există $F: (X \times I, \{x_0\} \times I) \to (B, b_0)$, $F: f \simeq c_{b_0}$ rel $\{x_0\}$. Fie G ridicarea lui F, $G(x, 0) = e_0$, $p \circ G = F$ şi $g: X \to E$, $g(x) = G(x, 1)$. Prin UHLP, fibra $p^{-1}(b_0)$ are numai drumuri constante (Teorema 2) şi se deduce $G(x_0, t) = G(x_0, 0) = e_0$, deci $g(x_0) = e_0$.

4. Să se arate că drumul constant e_{x_0} este o retractă tare de deformare a spaţiului $X^I_{x_0}$.

Indicaţie. $F: X^I_{x_0} \times I \to X^I_{x_0}$, $F(\alpha, t)(t') = \alpha((1-t)t')$.

5. Să se arate că aplicaţia $P: X^I_{x_0} \to X$, $P(\alpha) = \alpha(1)$, este deschisă dacă X este conex şi local liniar conex.

Indicaţie. Fie $W = \bigcup_{0 \leq i \leq n} B(K_i, D_i)$ şi fie V liniar conexă şi deschisă, încît $V \subseteq D_1 \cap D_2 \cap \ldots \cap D_n$. Atunci $V \subseteq p(W)$. Deci $p(W)$ este deschisă. (Pentru detalii se poate consulta [39, p. 298].)

6. Pentru orice spaţiu conex şi local liniar conex X şi $f: (X^I_{x_0}, c_{x_0}) \to (Y, y_0)$ o aplicaţie continuă, pentru care $f(\alpha) = f(\alpha')$, dacă $\alpha(1) = \alpha'(1)$, există o aplicaţie continuă $g: (X, x_0) \to (Y, y_0)$, încît $g \circ p = f$.

Indicaţie. Se defineşte $g(x) = f(\omega)$, pentru ω un drum de la x_0 la x şi pentru continuitatea acesteia se aplică exerc. 5.

7. Fie $p: (E, e_0) \to (B, b_0)$ o fibrare Hurewicz cu UHLP şi X un spaţiu conex şi local liniar conex. Condiţia necesară şi suficientă ca o aplicaţie $f: (X, x_0) \to (B, b_0)$ să poată fi ridicată la o aplicaţie $g: (X, x_0) \to (E, e_0)$, în raport cu p, este ca să aibă loc incluziunea $f_*\pi_1(X, x_0) \subseteq p_*\pi_1(E, e_0)$.

Indicaţie. După exerciţiile 3 şi 4, pentru aplicaţia $(X^I_{x_0}, c_{x_0}) \xrightarrow{P} (X, x_0) \xrightarrow{f} (B, b_0)$, există $f': (X^I_{x_0}, c_{x_0}) \to (E, e_0)$ cu $pf' = f \circ P$. Se poate arăta că $f'(\alpha) = f'(\alpha')$ dacă $\alpha, \alpha' \in X^I_{x_0}$ cu $\alpha(1) = \alpha'(1)$. Se aplică acum exerc. 6.

8. Utilizînd exerciţiul 7, să se arate că:

a) Dacă $p: (E, e_0) \to (B, b_0)$ are UHLP şi B este conex şi local liniar conex, atunci există o secţiune $s: (B, b_0) \to (E, e_0)$ dacă şi numai dacă $p_*\pi_1(E, e_0) = \pi_1(B, b_0)$;

b) Dacă $p: E \to B$ este o proiecţie de acoperire, E liniar conex, B conex şi local liniar conex, atunci p este homeomorfism dacă şi numai dacă $\forall e \in E$, $p_*\pi_1(E, e) = \pi_1(B, p(e))$.

9. Să se arate că banda lui Möbius este un fibrat local trivial peste S^1 cu fibra $I = [0, 1]$.

Indicaţie. Se aplică Teorema 5, pentru $F = I$, $G = \{1_I, g\}$, cu $g(t) = 1 - t$ şi $h: S^0 \to G$, $h(-1) = 1_I$, $h(1) = g$.

10. Să se arate că trompeta lui Klein este un fibrat local trivial peste S^1 cu fibra S^1.

Indicaţie. Se aplică Teorema 5.

11. O *transformare de acoperire*, h, a unei proiecţii de acoperire $\tilde{p}: \tilde{X} \to X$, este un homeomorfism $h: \tilde{X} \to \tilde{X}$ pentru care $p \circ h = h$. Să se arate că mulţimea transformărilor de acoperire formează un grup, $\text{Aut}_p(\tilde{X})$.

12. Să se arate că o aplicaţie continuă $p: E \to B$ este fibrare Serre dacă şi numai dacă dată diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ g\uparrow & & \uparrow f \\ J^{n-1} & \hookrightarrow & I^n \end{array}$$

există $\theta: I^n \to B$, încît $p\theta = f$ şi $\theta|J^{n-1} = g$.

Indicaţie. Se aplică HLP diagramei

$$\begin{array}{ccccc} I^{n-1}\times\{0\} & \xrightarrow{\varphi} & J^{n-1} & \xrightarrow{g} & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow p \\ I^n & \xrightarrow{\varphi} & I^n & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

unde φ este un homeomorfism (vezi Lema 1).

13. Să se arate că Lema 3 are loc pentru fibrări Serre.

Soluţie. Arătăm că $p_*: \pi_n(E, F, e) \to \pi_n(B, b)$, $n \geq 2$, este epimorfism. Fie $f: (I^n, \partial I^n) \to (B, b)$ şi $g: J^{n-1} \to E$, $g(J^{n-1}) = b$. Este comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ g\uparrow & & \uparrow f \\ J^{n-1} & \hookrightarrow & I^n \end{array}$$

După exercițiul 12, există $\theta : I^n \to E$, încît $\theta(\partial I^n) \subseteq p^{-1}(b) = F$ ș $\theta(J^{n-1}) = e$. Astfel, $[\theta] \in \pi_n(E, F, e)$ și $p_*([\theta]) = [p\theta] = [f]$. Fie acum $p_*[f] = p_*[g]$, pentru $f, g : (I^n, \partial I^n, J^{n-1}) \to (E, F, e)$. Deoarece $J^n = I^n \times \{1\} \cup \partial I^{n-1} \times I \times I \cup I^{n-1} \times \{0\} \times I \cup I^{n-1} \times \{1\} \times I$, putem defini $L : J^n \to E$, prin $L(x, 1) = e$, dacă $x \in I^n$; $L(u, 0, t) = f(u, t)$ și $L(u, 1, t) = g(u, t)$ dacă $u \in I^{n-1}$ și $L(u, s, t) = e$ dacă $u \in I^{n-1}$. Fie $H : f \simeq g$ rel ∂I^n. Definim $H' : I^n \times I \to B$ prin $H'(u, s, t) = H(u, s, t)$, pentru $u \in I^{n-1}$ Avem diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{p} & B \\ \uparrow L & & \uparrow H' \\ J^n & \hookrightarrow & I^n \times I = I^{n+1} \end{array}$$

După exercițiul 12, există o extensie a lui L, $\theta : I^n \times I \to E$, cu $\theta(x, 0) \in F$, $\forall x \in I^n$, $\theta(x, 1) = e$, $\forall x \in I^n$; $\theta(u, 0, t) = f(u, t)$ și $\theta(u, 1, t) = g(u, t)$ dacă $u \in I^{n-1}$; $\theta(u, s, t) = e$ dacă $u \in I^{n-1}$. Fie acum aplicația $\theta' : I^n \times I \to E$, $\theta'(u, s, t) = \theta(u, s, t)$ dacă $u \in I^{n-1}$. Atunci, $\theta' : (I^n \times I, I^{n-1} \times \{0\} \times I, J^{n-1} \times I) \to (E, F, e)$ și $\theta' : f \simeq g$.

14. Fie $\zeta = (E, B, F, p)$ o fibrare local trivială. Presupunem că, dată orice acoperire deschisă $\{U_i\}_i$ a lui $X \times I$, se poate scrie $X \times I = X_n \supset \supset X_{n-1} \supset \ldots \supset X_0 = X \times \{0\}$, cu X_k închise și satisfăcînd condițiile:

a) $\overline{X_k \setminus X_{k-1}} \subset U_i$, pentru un i;

b) $X_{k-1} \cap \overline{X_k \setminus X_{k-1}}$ este retractă a lui $\overline{X_k \setminus X_{k-1}}$.

Să se arate că $p : E \to B$ are HLP în raport cu X.

Soluție. Fie f și F ca în Def. 1 § 7. Acoperim $X \times I$ cu $\{F^{-1}(U_i)\}$, pentru $\mathscr{U} = \{U_i\}$ ca în Def. 6 § 7. Vom construi prin inducție $\theta_k : X_k \to E$, cu $p\theta_k = F|X_k$ și $\theta_k|X \times \{0\} = f$. Pentru $k = 0$ faptul este evident. Presupunem construită aplicația θ_{k-1}. Pentru a defini θ_k, definim mai întîi o aplicație $\gamma : \overline{X_k \setminus X_{k-1}} \to E$. Alegem $U_i \in \mathscr{U}$, încît $F(\overline{X_k \setminus X_{k-1}}) \subset U_i$ și definim $\gamma(x) = \varphi_{U_i}(F(x, t)), \pi_2\theta_{k-1}(r(x, t))$, unde $r : \overline{X_k \setminus X_{k-1}} \to X_{k-1} \cap \cap \overline{X_k \setminus X_{k-1}}$ este retracția de la b), φ_{U_i} este homeomorfismul dinDef. 6, iar $\pi_2 : p^{-1}(U_i) \xrightarrow{\varphi_{U_i}^{-1}} U_i \times F \to F$ este proiecția. Aplicația γ este bine definită și continuă întrucît $p\theta_{k-1}(r(x, t)) \in \overline{X_k \setminus X_{k-1}} \subset U_i$. Avem $p\gamma = F/\overline{X_k \setminus X_{k-1}}$ și $\gamma/\overline{X_k \setminus X_{k-1}} \cap X_{k-1} = \theta_{k-1}$. Lipind aplicațiile γ și θ_{k-1} obținem aplicația θ_k.

15. Fie $\zeta = (E, B, F, p)$ un fibrat local trivial. Atunci $p : E \to B$ are HLP în raport cu orice spațiu metric compact *). În par icular, p este o fibrare Serre.

Soluție. Fie X un spațiu metric compact. Vom aplica exerc. 14. Fie pentru aceasta o acoperire deschisă $\{U_\alpha\}$ a lui $X \times I$ și $V_\gamma \times (a_\gamma, b_\gamma)$ o subacoperire finită, iar W_γ satisfăcînd $\overline{V}_\gamma \subset W_\gamma$ și $\overline{W}_\gamma \times [a_\gamma, b_\gamma] \subset U_\alpha$, pentru un indice α. Ordonăm mulțimea finită a indicilor $\gamma = 1, \ldots, n$, încît $i \leqslant j$ să implice $a_i \leqslant a_j$. Acum, dacă $\beta \leqslant \gamma$, $W_\beta \times a_\beta$ nu intersectează $V_\gamma \times (a_\gamma, b_\gamma)$. Întrucît $\{V_\gamma \times (a_\gamma, b_\gamma)\}$ formează o acoperire deschisă, $W_\beta \times a_\beta \subset \bigcup_{\gamma<\beta} V_\gamma \times (a_\gamma, b_\gamma)$. Construim acum $t_\gamma : X \to I$, pentru $\gamma = 0, 1, \ldots, n$, $X_\gamma = \{(x, t) | t \leqslant t_\gamma(x)\}$, $X_\gamma \supset \overline{V}_\beta \times [a_\beta, b_\beta]$, pentru $\beta \leqslant \gamma$. Fie $t_0 = 0$. Presupunem că avem $t_0, t_1, \ldots, t_\alpha$, ca mai sus. Atunci $W_{\alpha+1} \times a_{\alpha+1} \subset \bigcup_{\gamma \leqslant \alpha} V_\gamma \times (a_\gamma, b_\gamma) \subset X_\alpha$, deci $t_\alpha | W_{\alpha+1} \geqslant a_{\alpha+1}$. Aplicînd Lema lui Urison putem considera aplicația $u_{\alpha+1} : X \to [0, b_{\alpha+1}]$, încît $u_{\alpha+1}(\overline{V}_{\alpha+1}) = b_{\alpha+1}$ și $u_{\alpha+1}(X \setminus W_{\alpha+1}) = 0$. Definim $t_{\alpha+1}(x) = \max(t_\alpha(x), u_{\alpha+1}(x))$. Avem atunci

$$X_{\alpha+1} \supset \{(x, t) | t \leqslant u_{\alpha+1}(x)\} \supset V_{\alpha+1} \times [0, b_{\alpha+1}] \supset \overline{V}_{\alpha+1} \times [a_{\alpha+1}, b_{\alpha+1}].$$

Deoarece $X_{\alpha+1} \supset X_\alpha$, rezultă că $X_{\alpha+1} \supset \overline{V}_\beta \times [a_\beta, b_\beta]$, pentru $\beta \leqslant \alpha + 1$. Aceasta încheie inducția. Avem acum $X_n \supset V_\beta \times (a_\beta, b_\beta)$, pentru orice β, astfel că $X_n = X \times I$. În plus, $X_\alpha \setminus X_{\alpha-1} = \{(x, t) | t_{\alpha-1}(x) < t \leqslant t_\alpha(x)\} = \{(x, t) | t_{\alpha-1}(x) < t \leqslant u_\alpha(x)\} \subset \overline{W_\alpha \times [a_\alpha, b_\alpha]}$, deoarece $u_\alpha = 0$ în afara lui W_α și $t_{\alpha-1} | W_\alpha \geqslant a_\alpha$. Prin urmare, $\overline{X_\alpha \setminus X_{\alpha-1}} \subset \overline{W}_\alpha \times [a_\alpha, b_\alpha] \subset U_\gamma$, pentru un γ. Este astfel verificată condiția a) din exerc. 14. Pentru a verifica b), definim $r : \overline{X_\alpha \setminus X_{\alpha-1}} \to \overline{X_\alpha \setminus X_{\alpha-1}} \cap X_{\alpha-1}$ prin $r(x, t) = (x, t_{\alpha-1}(x))$. În adevăr, $r(x, t) \in X_{\alpha-1}$ și dacă presupunem că $r(x, t) \notin \overline{X_\alpha \setminus X_{\alpha-1}}$, atunci $t_{\alpha-1}(x) < t$ și fie $t_n = t_{\alpha-1}(x) + 2^{-n}(t - t_{\alpha-1}(x))$. Atunci, $(x, t_n) \in X_\alpha \setminus X_{\alpha-1}$ și $\lim(x, t_n) = r(x, t)$. În consecință, $r(x, t) \in \overline{X_\alpha \setminus X_{\alpha-1}}$. În plus, dacă $(x, t) \in X_{\alpha-1}$, $t_{\alpha-1}(x) \geqslant t$ și astfel $t_{\alpha-1}(x) = t$, pentru $(x, t) \in \overline{X_\alpha \setminus X_{\alpha-1}} \cap X_{\alpha-1}$.

§8. Aplicații ale spațiilor de acoperire la calculul unor grupuri de omotopie

LEMA 1. *Aplicația* $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ *este o proiecție de acoperire.*

Demonstrație. Fie $z_0 \in S^1$ și $U_{z_0} = S^1 \setminus \{-z_0\}$. Atunci, U_{z_0} este o vecinătate deschisă a lui z_0. Fie $t_0 \in (\exp)^{-1}(-z_0) \cap [0, 1]$ și $V_{z_0} = (\exp)^{-1}(U_{z_0}) \cap [t_0, t_0 + 1]$. Atunci, $(\exp)^{-1}(U_{z_0}) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (V_{z_0} + n)$ unde $V_{z_0} + n = \{t + n | t \in V_{z_0}\}$. Mulțimea $V_{z_0} + n$ este o deschisă în $\mathbb{R}$, homeomorfă cu V_{z_0} și care prin exp se aplică homeomorf pe U_{z_0}. Dacă $m \neq n$, atunci $(V_{z_0} + n) \cap (V_{z_0} + m) = \emptyset$. Prin urmare, avem homeomorfismul

$$\varphi_{U_{z_0}} : U_{z_0} \times \mathbb{Z} \to (\exp)^{-1}(U_{z_0}), \text{ cu } \varphi_{U_{z_0}} | U_{z_0} \times \{n\} = (\exp | (V_{z_0} + n))^{-1}.$$

Deci, $\exp : \mathbb{R} \to S^1$ este un fibrat local trivial. Fibra este spațiul discret $\mathbb{Z}$ iar spațiile $\mathbb{R}$ și S^1 sînt liniar conexe. Rezultă că exp este o proiecție de acoperire.

*) Aceeași demonstrație poate fi utilizată pentru spații Hausdorff compacte, vezi [19].

PROPOZIŢIA 1. $\pi_n(S^1) = 0$, $n \geq 2$.
Demonstraţie. Aplicăm Corolarul 5 §7 proiecţiei de acoperire $\exp : \mathbb{R} \to S^1$, ţinînd seama că $\mathbb{R}$ este spaţiu contractibil.

COROLAR 1. $\pi_m(T^n) = 0$, $m \geq 2$, $\forall n \geq 1$.
Demonstraţie. Aplicăm Teorema 2 § 4 şi Prop. 1.

PROPOZIŢIA 2. *Pentru* $n \geq 2$, *avem*:
i) $\pi_1(P\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}_2$;
ii) $\pi_m(P\mathbb{R}^n) \cong \pi_m(S^n)$, $m \geq 2$.
Demonstraţie. Fie proiecţia canonică $\pi' : S^n \to S^n/\mathbb{Z}_2 = P\mathbb{R}^n$ (Prop. 11, § 11 Cap. I). $\mathbb{Z}_2$ este un grup finit şi acţionează liber pe S^n. Aplicînd Lema 6 § 7 şi Teorema 8 § 7, rezultă că π' este o proiecţie de acoperire. După Corolarul 5 § 7, avem $\pi'_* : \pi_m(S^n) \cong \pi_m(P\mathbb{R}^n)$, $m \geq 2$, adică are loc ii). Pentru i) se aplică Cor. 10 § 7.

PROPOZIŢIA 3. i) $\pi_1(L_p^{2n+1}) \cong \mathbb{Z}_p$;
ii) $\pi_m(L_p^{2n+1}) \cong \pi_m(S^{2n+1})$, $m \geq 2$.
Demonstraţie. Fie proiecţia canonică $\pi : S^{2n+1} \to S^{2n+1}/\mathbb{Z}_p = L_p^{2n+1}$ (Def. 1 § 11 Cap. I). Aplicînd raţionamentul din Prop. 2, rezultă că π este o proiecţie de acoperire. Se aplică Cor. 5 § 7 şi Cor. 10 § 7.

LEMA 2. *Aplicaţia lui Hopf*, $q : S^{2n+1} \to P\mathbb{C}^n$ (§ 11 Cap. I), *este o fibrare local trivială, cu fibra* S^1.
Demonstraţie. Fie $\hat{U}_i = \{q(z_1, \ldots, z_{n+1}) \mid z_i \neq 0\}$. Atunci, $\{\hat{U}_i\}_{i=1,2,\ldots,n+1}$ constituie o acoperire deschisă a lui $P\mathbb{C}^n$ şi putem defini homeomorfismul $\varphi_i : \hat{U}_i \times S^1 \to q^{-1}(\hat{U}_i)$, prin $\varphi_i(q(z_1, \ldots, z_{n+1}), \lambda) = \frac{\lambda \bar{z}_i}{|z_i|}(z_1, \ldots, z_{n+1})$, pentru $q(z_1, \ldots, z_{n+1}) \in \hat{U}_i$ şi $\lambda \in S^1$. Avem $\varphi_i^{-1}((z_1, \ldots, z_{n+1})) = \left(q(z_1, \ldots, z_{n+1}), \frac{z_i}{|z_i|}\right)$ şi $q\varphi_i(q(z), \lambda) = q(z)$, pentru $q(z) \in \hat{U}_i$.

PROPOZIŢIA 4. *Pentru* $n \geq 1$:
i) $\pi_m(P\mathbb{C}^n) \cong \pi_m(S^{2n+1})$, $m \geq 3$;
ii) $\pi_2(P\mathbb{C}^n) \cong \pi_2(S^{2n+1}) \oplus \mathbb{Z}$ *);
iii) $\pi_1(P\mathbb{C}^n) = 0$.

*) Se va vedea, ulterior, că $\pi_2(S^{2n+1}) = 0$.

Demonstraţie. Considerăm pentru fibrarea $q : S^{2n+1} \to P\mathbb{C}^n$ şirul exact (Teorema 6 § 7, Teorema 3 § 7 şi Obs. 1 § 7):

$$\ldots \longrightarrow \pi_m(S^1) \xrightarrow{i_*} \pi_m(S^{2n+1}) \xrightarrow{q_*} \pi_m(P\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial_\#} \pi_{m-1}(S^1) \longrightarrow \ldots$$

Pentru $m \geq 3$, $\pi_{m-1}(S^1) = 0$, $\pi_m(S^1) = 0$ (Prop. 1) şi deci este exact şirul $0 \to \pi_m(S^{2n+1}) \xrightarrow{q_*} \pi_m(P\mathbb{C}^n) \longrightarrow 0$, adică $q_* : \pi_m(S^{2n+1}) \cong \pi_m(P\mathbb{C}^n)$.
Pentru $m = 2$ obţinem şirul exact

$$0 \longrightarrow \pi_2(S^{2n+1}) \xrightarrow{q_*} \pi_2(P\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \text{ (Cor. 1 § 4).}$$

Deoarece $\mathbb{Z}$ este abelian liber, finit generat, rezultă că acest şir este scindat (exerc. 1 şi 5 § 7). Deducem izomorfismul $\pi_2(P\mathbb{C}^n) \cong \pi_2(S^{2n+1}) \oplus \mathbb{Z}$.
În sfîrşit, pentru $m = 1$, avem şirul exact

$$0 \longrightarrow \pi_1(P\mathbb{C}^n) \xrightarrow{\partial_\#} \pi_0(S^1).$$

Cum S^1 este liniar conex, $\pi_0(S^1)$ are un singur element şi $\partial_\#$ trebuind să fie injectivă, rezultă $\pi_1(P\mathbb{C}^n) = 0$.

COROLAR 2. i) $\pi_m(S^3) \cong \pi_m(S^2)$, $m \geq 3$;
ii) $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \pi_2(S^3)$.
Demonstraţie. Considerăm fibratul lui Hopf (Lema 2) în cazul $n = 1$ şi ţinem seama că $P\mathbb{C}^1$ este homeomorf cu S^2 (Cor. 5 § 11 Cap. I). Aplicăm Propoziţia 4 i), ii).

LEMA 3. *Fie* a, b *transformările planului* $\mathbb{R}^2$, *definite prin* $a(x, y) = (x + 1, y)$, $b(x, y) = (-x, y + 1)$ *şi fie* G *grupul generat de* a *şi* b. *Atunci,* G *este un grup discret ce acţionează la stînga pe* $\mathbb{R}^2$ *propriu şi liber, deci propriu discontinuu, iar spaţiul orbitelor* $\mathbb{R}^2/G$ *este homeomorf cu trompeta lui Klein.*
Demonstraţie. Pentru $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, avem $aba(x, y) = ab(x + 1, y) = a(-x - 1, y + 1) = (-x, y + 1) = b(x, y)$. Prin urmare $aba = b$. Putem arăta că $G = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{Z}$ şi $(a^m b^n) \cdot (a^p b^q) = a^{m+(-1)^n p} b^{n+q}\}$. În adevăr, $a^m b^n = a^{m-1}(ab)b^{n-1} = a^{m-1}(ba^{-1})b^{n-1} = a^{m-2}(ab)a^{-1}b^{n-1} = \ldots = ba^{-m}b^{n-1}$. Apoi, $a^{-m}b^{n-1} = ba^m b^{n-2}$ şi, prin urmare,

$a^m b^n b^2 a^{(-1)^2 m} b^{n-2}, \ldots, a^m b^n = b^n a^{(-1)^n m}$. Atunci, $(a^m b^n)(a^p b^q) = a^m (b^n a^p) n^q = a^m a^{(-1)^n p} b^n b^q = a^{m+(-1)^n p} b^{n+q}$. Deci orice produs $a^{p_1} b^{q_1} \ldots a^{p_r} b^{q_r}$, cu $p_i, q_i \in \mathbb{Z}$, poate fi scris sub forma $a^m b^n$, cu $m, n \in \mathbb{Z}$ și cu produsul scris mai sus. Deci G este un grup discret de homeomorfisme ale lui $\mathbb{R}^2 : (a^m b^n)(x, y) = ((-1)^n x + m, y + n)$. Dacă $(m, n) \neq (0, 0)$, atunci $(a^m b^n)(x, y) \neq (x, y)$, deci grupul acționează liber.

Pentru un compact, $K \subset \mathbb{R}^2$, care este mărginit, rezultă evident că mulțimea $\{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid (a^m b^n) K \cap K \neq \emptyset\}$ este finită, deci G acționează propriu pe $\mathbb{R}^2$. Rezultă că acțiunea este propriu discontinuă. Acest lucru poate fi arătat și direct. Lăsăm aceasta în seama cititorului.

PROPOZIȚIA 5. *Fie K trompeta lui Klein. Atunci, $\pi_m(K) = 0$, $m \geqslant 2$, și $\pi_1(K)$ este izomorf cu grupul*

$$G = \{a^m b^n \mid m, n \in \mathbb{Z}, (a^m b^n)(a^p b^q) = a^{m+(-1)^n p} b^{n+q}\}.$$

Demonstrație. Conform Lemei 3, Lemei 6 § 7 și Teoremei 8 § 7, proiecția canonică $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2/G = K$ este o proiecție de acoperire. Deci, $\pi_m(K) \cong \pi_m(\mathbb{R}^2) = 0$, pentru $m \geqslant 2$. În sfîrșit, din Cor. 10 § 7, rezultă că avem $\pi_1(K) \cong G$.

EXERCIȚII

1. Fie $p : S^1 \to S^1$, $p(z) = z^n$. Să se arate că p este o proiecție de acoperire de indice n. Să se deducă de aici că $p_* : \pi_1(S^1) = \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ este definită prin $p_*(m) = mn$.

2. Să se arate că torul este un spațiu de acoperire cu două foi a trompetei lui Klein. Să se deducă consecințele privind grupurile de omotopie.

Indicație. Se definește $p : T^2 \to K$, așa cum este sugerat în fig. 37.

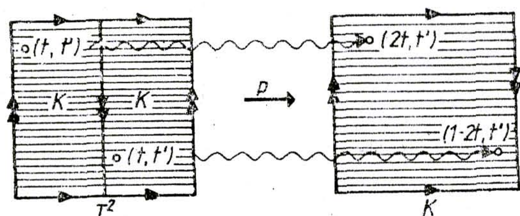


Fig. 37

3. Să se construiască o proiecție de acoperire $p : \tilde{X} \to \bigvee_{i=1}^{p} S_i^1$, unde S_i^1 este un cerc, iar $\tilde{X} = \{(x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p \mid$cel puțin $p - 1$ coordonate sînt întregi$\}$. Să se arate că $\pi_m\left(\bigvee_{i=1}^{p} S_i^1\right) \cong \pi_m(\tilde{X})$, $m \geqslant 2$ (vezi și Cor. 6 § 4).

Indicație. $p(x_1, \ldots, x_p) = (e^{2\pi i x_1}, e^{2\pi i x_2}, \ldots, e^{2\pi i x_p})$.

4 Fie $p : S^2 \to P\mathbb{R}^2$ proiecția canonică și Σ o curbă Jordan în $P\mathbb{R}^2$. Să se arate că $p^{-1}(\Sigma)$ este o curbă simplă închisă sau suma topologică a două curbe simple închise în S^2.

Indicație: Dacă $\alpha : S^1 \to \Sigma \subset P\mathbb{R}^2$ este un homeomorfism, cu $\alpha(1) = y_0$, punctul bază în $P\mathbb{R}^2$, atunci α este un drum închis, ce se poate ridica la un drum $\tilde{\alpha}$ închis în $x_0 \in p^{-1}(y_0)$ și la un drum $\tilde{\tilde{\alpha}}$ închis în $-x_0 \in p^{-1}(y_0)$. Imaginile drumurilor $\tilde{\alpha}$ și $\tilde{\tilde{\alpha}}$ sînt simetrice față de centrul sferei. Dacă nu coincid ambele cu un cerc mare, atunci ele sînt disjuncte (vezi fig. 38).

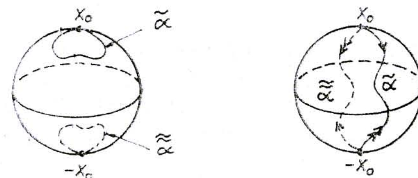


Fig. 38

5. Să se arate că nu există un spațiu topologic X, încît $X \times S^1$ să fie echivalent omotopic cu S^2 sau cu $P\mathbb{R}^2$.

6. Să se arate că dacă $p : \tilde{X} \to X$ este o proiecție de acoperire și $\pi_1(X)$ este un grup finit, atunci p este un homeomorfism.

7. O proiecție de acoperire $p : \tilde{X} \to X$ se numește *regulată* dacă pentru un $\tilde{x}_0 \in \tilde{X}$, $p_* \pi_1(\tilde{X}, \tilde{x}_0)$ este subgrup normal al lui $\pi_1(X, p(\tilde{x}_0))$. Să se arate că în acest caz toate ridicările unui drum închis sînt închise sau nici una nu este închisă (Pentru exemplu, vezi Lema 7 § 7).

8. Să se arate că aplicația Hopf $q : S^{4n+3} \to P^n\mathbb{H}$, în cazul cuaternionilor este o fibrare local trivială cu fibra S^3 și să se deducă consecințele din șirul exact de omotopie.

Indicație. Se procedează ca în demonstrarea Lemei 2.

§9. Teorema Borsuk-Ulam și «problema tartinelor»

LEMA 1. *Fie $f : P\mathbb{R}^n \to P\mathbb{R}^1 = S^1$ o aplicație continuă și $n > 1$. Există atunci $f' : P\mathbb{R}^n \to S^1$, încît $pf' = f$, unde $p : S^1 \to P\mathbb{R}^1$ este proiecția canonică.*

Demonstrație. Avem $\pi_1(P\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}$ și $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Homomorfismul $f_* : \pi_1(P\mathbb{R}^n) \to \pi_1(S^1)$ nu poate fi decît

cel trivial deoarece $\mathbb{Z}$ nu conține subgrupuri izomorfe cu $\mathbb{Z}_2$. Deci, $f_*\pi_1(P\mathbb{R}^n) = \{0\} \subset p_*\pi_1(S^1)$. Aplicînd exercițiul 7 § 7 (cu o alegere oarecare a punctelor bază) rezultă afirmația lemei.

COROLAR 1. *Dacă $n > 1$, nu există nici o aplicație continuă $g : S^n \to S^1$, încît $g(-x) = -g(x)$, $\forall x \in S^n$.*

Demonstrație. Presupunînd că există g cu proprietatea din enunț, putem defini $f : P\mathbb{R}^n \to S^1$, încît să fie comutativă diagrama

$$\begin{array}{ccc} S^n & \xrightarrow{\ g\ } & S^1 \\ {\scriptstyle p'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p} \\ P\mathbb{R}^n & \xrightarrow{\ f\ } & P\mathbb{R}^1 = S^1 \end{array}$$

unde $f(\hat{x}) = pg(x)$. Aplicația f este continuă și, după Lema 1, există $f' : P\mathbb{R}^n \to S^1$, încît $pf' = f$. Avem deci $pf'p' = fp' = pg$. Deci, $f'p'$ și g sînt ridicări ale aceleiași aplicații. Pentru $x \in S^n$, avem sau $g(x) = f'p'(x)$, sau $g(-x) = f'p'(x) = f'p'(-x)$. În fiecare caz, g și $f'p'$ coincid într-un punct. În baza Lemei 2 §4, rezultă $f'p' = g$. Obținem $g(-x) = f'p'(-x) = f'p'(x) = g(x)$, care, împreună cu $g(x) = -g(-x)$, conduce la $2g(x) = 0$, deci $g(x) = 0$, contrar faptului că $g(x) \in S^1$.

PROPOZIȚIA 1 (teorema Borsuk-Ulam). *Pentru fiecare aplicație continuă $f : S^n \to \mathbb{R}^2$, $n \geq 2$, există $x \in S^n$, încît $f(x) = f(-x)$* *).

Demonstrație. Presupunem că $f(x) \neq f(-x)$, $\forall x \in S^n$. Putem defini atunci aplicația continuă $g : S^n \to S^1$, $g(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{\|f(x) - f(-x)\|}$, pentru care avem $g(-x) = -g(x)$, contrar Cor. 1.

COROLAR 2. *Pentru $n \geq 2$, sfera S^n nu se poate scufunda în $\mathbb{R}^2$.*

Demonstrație. Conform Propoziției 1, nici o aplicație continuă $f : S^n \to \mathbb{R}^2$ nu este injectivă.

---

*) Există generalizări ale acestei teoreme. Uneori Corolarul 1 (sau generalizarea acestuia) este numit *teorema Borsuk-Ulam* (vezi, de exemplu, [29, p. 157]).

PROPOZIȚIA 2. *Fie A, B, C trei submulțimi mărginite și măsurabile din $\mathbb{R}^3$ (« pîinea », «untul», «șunca»). Există atunci un plan («cuțitul») care împarte fiecare din cele trei mulțimi în figuri echivalente (de același volum). Nu se presupune nimic altceva referitor la cele trei mulțimi.*

Demonstrație. Stabilirea rezultatului este similară cu demonstrația Prop. 1 § 8 Cap. I. Putem presupune că A, B, C sînt conținute de un disc de diametru 1, cu centrul în $O \in \mathbb{R}^3$ și a cărui frontieră o notăm cu S. Pentru $x \in S$, fie D_x diametrul trecînd prin x. Pentru $t \in I$, fie P_t planul perpendicular pe D_x și situat la distanța t de x. Planul P_t divide A în două părți $A_1(t)$ și $A_2(t)$, cu $A_1(t)$ mai apropiată de x. Definim $f_i : I \to \mathbb{R}$, $f_i(t) = \text{volum}(A_i(t))$, $i = 1, 2$. Aceste aplicații sînt continue, f_1 este monoton crescătoare și f_2 monoton descrescătoare. Funcția $f : I \to \mathbb{R}$, $f(t) = f_1(t) - f_2(t)$ este continuă și monoton crescătoare. Avem $f(0) = -f(1)$, încît, după Lema 1 § 8 Cap. I, există $t \in I$, așa fel ca $f(t) = 0$. Cum f este monoton crescătoare, aceasta se anulează sau într-un singur punct sau pe un interval $[a, b]$. Notăm singurul punct, sau $\dfrac{a+b}{2}$ în cazul al doilea, prin $h_A(x)$. Astfel, $P_{h_A(x)}$ divide A în două părți echivalente. Aplicația $h_A : S \to I$ este o aplicație continuă și satisface condiția $h_C(x) = 1 - h_A(-x)$. În mod analog se definesc aplicațiile continue h_B, $h_C : S \to I$, cu $h_B(x) = 1 - h_B(-x)$ și $h_C(x_C) = 1 - h_C(-x)$ și cu proprietatea că $P_{h_B(x)}$, $P_{h_C(x)}$ împart pe B și respectiv pe C în părți echivalente. Fie $h : S \to \mathbb{R}^2$, $h(x) = (h_A(x) - h_B(x),\ h_A(x) - h_C(x))$. Aplicația h este continuă și $h(-x) = -h(x)$, încît, după Prop. 1, există $y \in S$ astfel ca $h(y) = 0$. Aceasta înseamnă $h_A(y) = h_B(y) = h_C(y)$, astfel că planele $P_{h_A(y)}$, $P_{h_B(y)}$, $P_{h_C(y)}$ coincid.

EXERCIȚII

1. Să se formuleze o problemă analoagă cu Prop. 2 § 8, Cap. I, pentru cazul spațiului $\mathbb{R}^3$.

2. Fie $\mathbb{Z}_p$ acționînd la stînga pe $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ și pe $S^1 \subset \mathbb{C}$, astfel: $\hat{k} \cdot (z_1, z_2) = (e^{2\pi i k/p} z_1, e^{2\pi i k q/p} z_2)$, respectiv $\hat{k} \cdot z = e^{2\pi i k/p} z$, $\forall \hat{k} \in \mathbb{Z}_p$, unde q este un întreg prim cu p. Să se arate că nu există nici o aplicație continuă $f : S^3 \to S^1$ care să fie $\mathbb{Z}_p$-*echivariantă*, adică $f(\hat{k}(z_1, z_2)) = \hat{k} \cdot f(z_1, z_2)$, $\forall \hat{k} \in \mathbb{Z}_p$.

Indicație. Vezi Corolarul 1.

CAPITOLUL III

CW-COMPLEXE ȘI POLIEDRE

Acest capitol cuprinde studiul CW-complexelor și complexelor simpliciale. Se prezintă proprietățile topologice și omotopice fundamentale ale CW-complexelor și se calculează unele grupuri de omotopie ale sferelor și spațiilor proiective. Sînt introduse spațiile Eileberg-Mac Lane și sistemele Postnikov. Urmează un studiu combinatorial al complexelor simpliciale, cu aplicații la calculul grupului fundamental al unui poliedru, la demonstrația unei teoreme combinatoriale Van Kampen-Seifert și la clasificarea 2-varietăților compacte (cu sau fără bord). Capitolul se încheie cu o scurtă discuție asupra complexelor semisimpliciale și cu teorema lui Mardešić privind tipul omotopic al spațiilor ANR.

§ 1. CW-complexe și spații celulare

DEFINIȚIA 1. Un *CW-complex* este un spațiu Hausdorff X, împreună cu cîte o mulțime de indici J_n, pentru fiecare $n \geqslant 0$, și cu niște aplicații continue $\varphi_j^n : D^n \to X$, $\forall n \geqslant 0$, $\forall j \in J_n$, și fiind satisfăcute condițiile următoare:

i) $X = \bigcup\limits_{\substack{n \geqslant 0 \\ j \in J_n}} \varphi_j^n (\operatorname{Int} D^n)$ (considerăm $\operatorname{Int} D^0 = D^0$);

ii) $\varphi_j^n(\operatorname{Int} D^n) \cap \varphi_h^m(\operatorname{Int} D^m) = \emptyset$, exceptînd cazul $m = n$ și $h = j$. Aplicația $\varphi_j^n | \operatorname{Int} D^n$ este injectivă pentru orice $n \geqslant 0$ și orice $j \in J_n$;

iii) Dacă $X^n = \bigcup\limits_{\substack{0 \leqslant m \leqslant n \\ j \in J_m}} \varphi_j^m(\operatorname{Int} D^m)$, atunci $\varphi_j^n(S^{n-1}) \subset X^{n-1}$, pentru orice $n \geqslant 1$ și $j \in J_n$;

iv) Pentru orice $n \geqslant 0$ și $j \in J_n$, $\varphi_j^n(D^n)$ este conținută în reuniunea unui număr finit de mulțimi de forma $\varphi_h^m(\operatorname{Int} D^m)$, $0 \leqslant m \leqslant n$. Această condiție este numită *condiția* (C)*);

*) Din l. engleză, *closure finiteness*.

v) O submulțime F a lui X este închisă dacă și numai dacă $(\varphi_j^n)^{-1}(F)$ este închisă în D^n, pentru orice $n \geqslant 0$ și $j \in J_n$. Această condiție este numită condiția (W)*).

Aplicațiile φ_j^n sînt numite *aplicații caracteristice*, submulțimile $e_j^n = \varphi_j^n(D^n)$, *n-celule închise ale lui* X, $\operatorname{Int} e_j^n$**), *n-celule deschise* și X^n *n-scheletul lui* X. Cel mai mic n (dacă există), pentru care $X^n = X$, se numește *dimensiunea lui* X.

OBSERVAȚIA 1. Celulele e_j^n, $n \geqslant 0$, $j \in J_n$, sînt submulțimi închise ale lui X, fiind imagini continue într-un spațiu separat ale unor compacte.

OBSERVAȚIA 2. Dacă $F \subset X$ are proprietatea că $F \cap e_j^n$ este închisă în e_j^n, $n \geqslant 0$, $\forall j \in J_n$, atunci F este închisă în X. În adevăr, $(\varphi_j^n)^{-1}(F) = (\varphi_j^n)^{-1}(F \cap e_j^n)$ și aplicăm condiția (W). Reciproca este evidentă.

EXEMPLE. 1. *Sfera* S^n, $n \geqslant 0$, este un CW-complex de dimensiune n, avînd o celulă de dimensiune zero și o celulă de dimensiune n. Anume, $\varphi^0 : D^0 \to S^n$, $\varphi^0(D^0) = e^0 = (1, 0, \ldots, 0)$ și $\varphi^n : D^n \to S^n$, $\varphi^n(x) = (2\|x\|^2 - 1, 2x_1\sqrt{1 - \|x\|^2}, \ldots, 2x_n\sqrt{1 - \|x\|^2})$, pentru $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Avem $e^n = \varphi^n(D^n) = S^n$, $(S^n)^k = e^0$, $0 \leqslant k < n$, $(S^n)^k = e^n$, $k \geqslant n$.

2. *Discul* D^{n+1}, $n \geqslant 0$, este un CW-complex de dimensiune $n+1$, cu trei celule de dimensiune respectiv: 0, n, $n+1$. Aplicațiile caracteristice φ^0, φ^n sînt cele de mai sus, iar $\varphi^{n+1} = 1_{D^{n+1}}$. Avem $(D^{n+1})^k = e^0$, $0 \leqslant k \leqslant n$, $(D^{n+1})^n = S^n$, $(D^{n+1})^k = D^{n+1}$, $k \geqslant n+1$.

3. *Banda lui Möbius*, M, este un CW-complex de dimensiuni 2. Considerăm spațiul M obținut ca în Prop. 3 §11 Cap. I. și definim φ_1^0, $\varphi_2^0 : D^0 \to M$, $\varphi_1^0(D^0) = e_1^0 = \hat{A} = \hat{B}$, $\varphi_2^0(D^0) = \hat{B} = \hat{A}'$; $\varphi_1^1, \varphi_2^1, \varphi_3^1 : D^1 \to M$, $\varphi_1^1(D^1) = [\widehat{AB}] = [\widehat{B'A'}]$, $\varphi_2^1(D^1) = [\widehat{AA'}]$, $\varphi_3^1(D^1) = [\widehat{BB'}]$, fiecare fiind scufundări; $\varphi^2 : D^2 \to M$, compunerea $D^2 \xrightarrow{h} I^2 \xrightarrow{p} M$, h homeomorfism și p proiecție canonică.

4. *Trompeta lui Klein*, K, este un CW-complex cu o celulă de dimensiune zero, două celule de dimensiune

*) Din l. engleză, *weak topology*.

**) $\operatorname{Int} e_j^0 = e_j^0 = \varphi_j^0(D^0)$.

1 şi o celulă de dimensiune 2. Se utilizează Prop. 4 § 11, Cap. I.

5. *Un produs topologic de sfere* $S^m \times S^n$*), în particular torul $T^2 = S^1 \times S^1$, este un CW-complex**). Fie $p_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^m$, $q_0 = (1, 0, \ldots, 0) \in S^n$. Definim $\psi^0 : D^0 \to S^m \times S^n$, $\psi^0(D^0) = (p_0, q_0)$, $\psi^m : D^m \to S^m \times S^n$, $\psi^m(x) = (\varphi^m(x), q_0)$, $\psi^n : D^n \to S^m \times S^n$, $\psi^n(y) = (p_0, \varphi^n(y))$, $\psi^{m+n} : D^{m+n} \to S^m \times S^n$, $\psi^{m+n}(x) = (\varphi^m \times \varphi^n)f^{-1}(x)$, unde φ^m, φ^n sînt ca în exemplul 1, iar $f : (D^m \times D^n, D^m \times S^{n-1} \cup S^{m-1} \times D^n) \to (D^{m+n}, S^{m+n-1})$ este homeomorfismul din exerc. 4 § 6 Cap. I. Celulele închise sînt (p_0, q_0), $S^m \times \{q_0\}$, $\{p_0\} \times S^n$, $S^m \times S^n$.

6. *Spaţiul proiectiv real* $P\mathbb{R}^n$, $n \geq 0$, este un CW-complex de dimensiune n, avînd cîte o celulă în fiecare dimensiune, de la 0 la n. Definim $\varphi^m : D^m \to P\mathbb{R}^n$, $0 \leq m \leq n$, ca fiind compunerea $D^m \xrightarrow{q} P\mathbb{R}^m \xhookrightarrow{i} P\mathbb{R}^n$, unde q este aplicaţia de identificare din Prop. 11 c) § 11 Cap. I, iar i este incluziunea (Prop. 12 § 11 Cap. I). Avem $\varphi^m(\text{Int } D^m) = P\mathbb{R}^m \setminus P\mathbb{R}^{m-1}$ (Cor. 3 § 11 Cap. I) şi $\varphi^m(D^m) = P\mathbb{R}^m$.

7. *Spaţiu proiectiv complex* $P\mathbb{C}^n$, $n \geq 0$, este un CW-complex de dimensiune $2n$, avînd cîte o celulă în fiecare din dimensiunile $0, 2, 4, \ldots, 2n$. Anume, se defineşte $\varphi^{2p} : D^{2p} \to P\mathbb{C}^n$, $0 \leq p \leq m$, ca fiind compunerea $D^{2p} \xrightarrow{q} P\mathbb{C}^p \xhookrightarrow{i} P\mathbb{C}^n$, unde q este aplicaţia de identificare din Prop. 17 § 11. Cap. I, iar i este incluziunea indusă de incluziunea $S^{2p+1} \hookrightarrow S^{2n+1}$. Avem $\varphi^{2p}(\text{Int } D^{2p}) = P\mathbb{C}^p \setminus P\mathbb{C}^{p-1}$ şi $\varphi^{2p}(D^{2p}) = P\mathbb{C}^p$.

8. *Spaţiul proiectiv cuaternionic* $P\mathbb{H}^n$, $n \geq 0$, este un CW-complex de dimensiune $4n$, avînd cîte o celulă în fiecare din dimensiunile $0, 4, 8, \ldots, 4n$. Se aplică Prop. 20. § 11 Cap. I.

LEMA 1. *Fie X un CW-complex şi Y un spaţiu topologic oarecare. O funcţie $f : X \to Y$ este continuă dacă şi numai dacă $f \circ \varphi_j^n$ este continuă, pentru orice $n \geq 0$ şi $\forall j \in J_n$.*

Demonstraţie. Este evident că $f \circ \varphi_j^n$ sînt continue dacă f este continuă. Reciproc, fie F închisă în Y. Atunci,

---

*) Se poate demonstra, vezi, de exemplu [37, p. 282], că dacă X şi Y sînt CW-complexe, unul fiind local compact sau ambele cu o mulţime numărabilă de celule, atunci $X \times Y$ este CW-complex.

**) Prin inducţie se deduce că T^n, $n \geq 2$, este CW-complex.

$(\varphi_j^n)^{-1}(f^{-1}(F))$ este închisă în D^n, deci, după proprietatea (W), $f^{-1}(F)$ este închisă în X.

DEFINIŢIA 2. Dat un CW-complex X, un subspaţiu A al lui X se numeşte *subcomplex* dacă, pentru orice $n \geq 0$, există o submulţime J_n' a mulţimii J_n, astfel incît:

a) $$A = \bigcup_{\substack{j' \in J_n' \\ n \geq 0}} \varphi_{j'}^n(\text{Int } D^n);$$

b) $$\varphi_{j'}^n(D^n) \subset A, \quad \forall n \geq 0, \quad \forall j' \in J_n'.$$

Dacă A este un subcomplex al lui X, atunci (X, A) se numeşte *CW-pereche*.

Dacă A are numai un număr finit de celule, atunci A se numeşte *subcomplex finit*.

EXEMPLUL 9. Orice reuniune şi orice intersecţie de subcomplexe sînt de asemenea subcomplexe.

LEMA 2. *Fie X un CW-complex. Pentru orice $n \geq 0$ şi $j \in J_n$, $e_j^n = \varphi_j^n(D^n)$ este conţinută într-un subcomplex finit al lui X.*

Demonstraţie. După Definiţia 1 IV), e_j^n este conţinută în reuniunea A a unui număr finit de mulţimi de forma $\varphi_k^m(\text{Int } D^m)$. Nu este însă necesar ca A să verifice Def. 2 b). Dar, dacă $\varphi_k^m(\text{Int } D^m)$ este în A iar $\varphi_k^m(D^m)$ nu este conţinută în A, atunci, după Def. 1 iii), iv) se pot adăuga un număr finit de mulţimi $\varphi_h^p(\text{Int } D^p)$, $p < m$, a căror reuniune să includă $\varphi_k^m(S^{m-1})$. Prin aceste „adăugări" de mulţimi se obţine un subcomplex finit (ce conţine A şi deci e_j^n).

TEOREMA 1. *Dacă A este un subcomplex al unui CW-complex X, atunci A este un CW-complex şi este o submulţime închisă a lui X.*

Demonstraţie. A este spaţiu Hausdorff şi sînt satisfăcute condiţiile i) — iv) din Def. 1, cu J_n' în loc de J_n. În plus, $\varphi_{j'}^n : D^n \to A$, $j' \in J_n'$, sînt continue, încît dacă F' este închisă în A, $(\varphi_{j'}^n)^{-1}(F')$ este închisă în D^n. Fie acum $F' \subset A$, încît $(\varphi_{j'}^n)^{-1}(F')$ este închisă în D^n, $\forall n \geq 0$, $j' \in J_n'$. Atunci $(\varphi_{j'}^n)^{-1}(F')$ este compactă, deoarece D^n este

compact. Astfel, mulţimile $F' \cap \varphi_j^n(D^n)$ sînt compacte deoarece φ_j^n sînt continue. Întrucît reuniunea unui număr finit de compacte este un compact, rezultă că $F' \cap B$ este compact, pentru orice subcomplex finit B conţinut în A şi, de fapt, pentru orice subcomplex finit B (deoarece $B \cap A$ este un subcomplex şi $F' \subset A$). Astfel, $F' \cap B$ este închisă în B, deoarece X (şi deci B) este Hausdorff. Rezultă, din Lema 2, că $F' \cap \varphi_j^n(D^n)$ este închisă în $\varphi_j^n(D^n)$, $\forall\, n$ şi $j \in J_n$, adică $(\varphi_j^n)^{-1}(F')$ este închisă în D^n. După (W), rezultă că F' este închisă în X, deci F' este închisă în A, întrucît $F' = F' \cap A$. Este verificată deci condiţia v) pentru A. Luînd $F' = A$, din cele de mai sus avem că A este închisă în X.

TEOREMA 2. *Fie X un CW-complex. Atunci, componentele liniar conexe ale lui X sînt subcomplexe ale acestuia. Dacă X este un CW-complex conex, atunci X este liniar conex.*

Demonstraţie. Deoarece $\varphi_j^n(\text{Int } D^n)$ şi $\varphi_j^n(D^n)$ sînt liniar conexe, o componentă liniar conexă L a lui X este subcomplex, deoarece $L = \cup\, \varphi_j^n(\text{Int } D^n)$, pentru toţi indicii n şi j, pentru care $L \cap \varphi_j^n(\text{Int } D^n) \neq \emptyset$. Să presupunem că X este conex dar nu este liniar conex. Atunci, componentele liniar conexe formează o familie de subcomplexe disjuncte a căror reuniune este X. Am putea exprima atunci pe X ca reuniunea a două subcomplexe disjuncte, fiecare fiind, după Teorema 1, o submulţime închisă. Aceasta contrazice conexitatea lui X.

COROLAR 1. *Dacă A este un subspaţiu compact al unui CW-complex X, atunci A este conţinut într-un subcomplex finit.*

Demonstraţie. Alegem cîte un punct x_j în fiecare intersecţie nevidă $A \cap \varphi_j^n(\text{Int } D^n)$ şi fie P mulţimea acestor puncte. Dacă $Q \subset P$, atunci, după condiţia iv) $= (C)$, $Q \cap \varphi_j^n(D^n)$ este finită şi deci închisă, deoarece X este separat. Astfel, $(\varphi_j^n)^{-1}(Q)$ este închisă în D^n, deci Q este închisă în X. Aşadar, P este un subspaţiu discret al lui X şi deci al lui A. Deoarece A este compact, rezultă că P este finită*). Deci A intersectează numai un număr finit de celule deschise $\varphi_j^n(\text{Int } D^n)$ şi, ca în Lema 2, reuniunea acestora este conţinută într-un subcomplex finit.

*) P este compactă, fiind închisă într-un compact.

EXEMPLUL 10. Fie subspaţiul lui $\mathbb{R}$, $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x = 0 \text{ sau } x = 1/n,\ n \geqslant 1\}$. Arătăm că acest spaţiu nu este echivalent omotopic cu un CW-complex. Mai întîi să observăm că componentele liniar conexe ale lui X sînt punctele acestuia (deoarece acestea sînt submulţimi deschise şi închise). Prin urmare X are o infinitate de componente liniar conexe. Fie $f: X \to Y$ o echivalenţă omotopică. Considerînd bijecţia $f_*: \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ (Cor. 5 § 13 Cap. I) definită prin $f_*(L_x) = L_{f(x)}$ şi, ţinînd seama că $L_{f(x)} \cap f(X) \neq \emptyset$, $\forall\, x \in X$, rezultă că $f(X)$ este intersectat de o infinitate de componente liniar conexe ale spaţiului Y. Pe de altă parte, $f(X)$ este un subspaţiu compact al lui Y. Deci, dacă Y este un CW-complex, rezultă (Cor. 1) că $f(X)$ este conţinut într-un subcomplex finit al lui Y. Am ajuns la o contradicţie, deoarece un subcomplex finit nu poate conţine decît un număr finit de componente liniar conexe ale lui Y, deci $f(X)$ nu poate fi intersectat decît de un număr finit de asemenea componente.

DEFINIŢIA 3. Un *spaţiu celular* este un spaţiu topologic X, împreună cu un şir de subspaţii $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \ldots \subseteq X^n \subseteq \ldots \subseteq X$, încît $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ şi avînd proprietăţile:

1) X^0 este un spaţiu discret;

2) Pentru orice $n > 0$, X^n se obţine din X^{n-1} prin ataşare de n-celule;

3) $F \subset X$ este închisă dacă şi numai dacă $F \cap X^n$ este închisă în X^n, $n \geqslant 0$.

TEOREMA 3. *Condiţia necesară şi suficientă ca un spaţiu topologic X să fie un CW-complex este ca X să fie un spaţiu celular.*

Demonstraţie. Dacă X este un CW-complex, atunci scheletele acestuia satisfac condiţiile Def. 3 *).

Reciproc, dacă X este un spaţiu celular, atunci, după Teorema 10 § 10 Cap. I, X este un spaţiu Hausdorff. Considerăm apoi aplicaţiile de ataşare $\psi_j^n: S^{n-1} \to X^{n-1}$. Acestea pot fi extinse la nişte aplicaţii $\varphi_j^n: D^n \to X^n \subset X$. Este evident că X^0 este un CW-complex. Presupunem că X^n este un CW-complex. Atunci, se verifică imediat condiţiile i)—iii) pentru X^{n+1}. Este satisfăcută şi condiţia

*) Vezi spaţii de adjuncţie în § 10 Cap. I.

iv), deoarece, prin Cor. 1, $\varphi_j^{n+1}(S^n)$ este conținută într-un subcomplex finit al lui X^n. Deci $\varphi_j^{n+1}(D^{n+1})$ este conținută în reuniunea dintre acest subcomplex și $\varphi_j^{n+1}(\text{Int } D^{n+1})$.

În sfîrșit, are loc și condiția v) pentru X^{n+1}. În adevăr, $F \subset X^{n+1}$ este închisă $\Leftrightarrow F \cap X^n$ este închisă în X^n și $(\varphi_j^{n+1})^{-1}(F)$ este închisă în D^{n+1}, $\forall j \Leftrightarrow$ în baza ipotezei inductive, $(\varphi_j^m)^{-1}(F)$ este închisă în D^m, $\forall\, 0 \leqslant m \leqslant n + 1$, $\forall j$. Prin urmare, orice X^n este un CW-complex. Din condiția 3 Def. 3 rezultă că și X este un CW-complex.

DEFINIȚIA 4. O pereche topologică (X, A) se numește CW-*complex relativ* dacă X este spațiu Hausdorff, A este o submulțime închisă și există un șir de subspații închise $A = X^{-1} \subseteq X^0 \subseteq X^1 \subseteq \ldots \subseteq X^n \subseteq \ldots \subseteq X$, încît $X = \bigcup_{n=-1} X^n$ și sînt satisfăcute condițiile:

i) Pentru orice n, X^n se obține din X^{n+1} prin atașare de n-celule;

ii) F este închisă în X dacă și numai dacă $F \cap X^n$ este închisă în X^n.

Subspațiul X^n este numit *n-scheletul lui X relativ la A*. Dacă $X^n = X$, scriem $\dim(X \setminus A) \leqslant n$*). O pereche (Y, B) este un *subcomplex* al CW-complexului relativ (X, A) dacă (Y, B) este un CW-complex relativ, $Y \subset X$ și $Y^n = Y \cap X^n$, $\forall n$.

Următoarea teoremă se demonstrează imediat.

TEOREMA 4. a) *Dacă (X, A) este un* CW-*complex relativ și $A = \emptyset$, atunci X este un* CW-*complex*;

b) *O* CW-*pereche este un* CW-*complex relativ.*

DEFINIȚIA 5. Fie X un CW-complex, ρ o relație de echivalență pe X și $p : X \to X/\rho$ proiecția canonică. Vom spune că ρ este *celulară* dacă sînt satisfăcute condițiile următoare:

i) Pentru orice celulă e_j^n, $p^{-1}(p(\text{Int } e_j^n))$ este o reuniune de celule deschise;

ii) Dacă $\text{Int } e_k^{m'}$ este de dimensiune minimală în reuniunea de la i), atunci $p/\text{Int } e_k^m$ este bijecție pe $p(\text{Int } e_j^n)$ și $p(e_k^m) = p(e_j^n)$. O asemenea celulă e_k^m se numește *ρ-minimală* pentru e_j^n;

---

*) Cel mai mic n cu această proprietate se numește *dimensiunea relativă* a CW-complexului relativ (X, A).

iii) Dacă $e_k^{m'}$ și $e_l^{m''}$ sînt celule ρ-minimale pentru e_j^n, atunci $m' = m''$ și există un homeomorfism $h : D^{m'} \to D^{m''}$, încît $p \circ \varphi_k^{m'} = p \circ \varphi_l^{m'} \circ h$.

TEOREMA 5. *Dacă X este un* CW-*complex, iar ρ este o relație de echivalență celulară pe X, cu graficul închis, atunci X/ρ are o structură de* CW-*complex, (în raport cu care aplicația p este celulară* (vezi Def. 2 § 3)).

Demonstrație. Aplicînd Teorema 3 b) § 10 Cap. I, în baza proprietății i) din Def. 5 și a ipotezei că Γ_ρ este închisă în $X \times X$, rezultă că X/ρ este separat.

Fie $p : X \to X/\rho$ proiecția canonică. Pentru fiecare celulă ρ-minimală e_j^n, considerăm $D^n \xrightarrow{\varphi_j^n} e_j^n \xrightarrow{p} p(e_j^n) \subset X/\rho$. Aplicațiile $p \circ \varphi_j^n$ sînt aplicații caracteristice. Avem $X/\rho = \cup\, p \circ \varphi_j^n(\text{Int } D^n) = p(X)$, unde reuniunea se face după toate celulele ρ-minimale. Deoarece e_j^n este ρ-minimală, din proprietatea ii) Def. 5 rezultă că $p \circ \varphi_j^n/\text{Int } D^n$ este injectivă. Dacă $p(\text{Int } e_j^n) \cap p(\text{Int } e_k^m) \neq \emptyset$, pentru e_j^n și e_k^m minimale, atunci $p^{-1}(p(\text{Int } e_j^n)) \cap p^{-1}(p(\text{Int} - e_k^m)) \neq \emptyset$ și rezultă că acestea au o celulă deschisă în comun. Deducem că $p^{-1}(p(\text{Int } e_j^n)) = p^{-1}(p(\text{Int } e_k^m))$, deci $p(\text{Int } e_j^n) = p(\text{Int } e_k^m)$. Cum e_j^n și e_k^m sînt ρ-minimale, rezultă $e_j^n = e_k^m$.

Pentru o celulă ρ-minimală e_j^n, avem $\varphi_j^n(S^{n-1}) = \text{Fr } e_j^n \subset X^{n-1}$. Deci, celulele din $\text{Fr } e_j^n$ avînd dimensiunea $\leqslant n - 1$, rezultă că celulele minimale corespunzătoare au dimensiunea $\leqslant n - 1$.

În sfîrșit, condițiile (C) și (W) pot fi ușor verificate de către cititor.

Deoarece $p(e_j^n) = p(e_k^m)$, unde e_k^m este ρ-minimală pentru e_j^n și deoarece e_k^m și $p(e_k^m)$ au aceeași dimensiune $m \leqslant n$, rezultă că p aplică n-scheletul lui X în n-scheletul lui X/ρ.

EXERCIȚII

1. Să se arate că cilindrul $S^1 \times I$ este un CW-complex. Mai general, dacă X este un CW-complex, atunci $X \times I$ este un CW-complex.

Indicație. Se consideră $I = [0, 1]$ cu descompunerea în zero-celulele $\{0\}$ și $\{1\}$ și în 1-celula I. Se procedează apoi ca în exemplul 5.

2. Să se arate că dacă X este un CW-complex, atunci, pentru orice n, perechea topologică (X, X^n) este un CW-complex relativ.

Indicație. Se definesc scheletele relative:

$$\overline{X}^m = \begin{cases} X^n, & m \leqslant n, \\ X^m, & m > n. \end{cases}$$

3. Dacă (X, A) este un CW-complex relativ, atunci X/A este un CW-complex.

Indicație. Se arată că X/A este un spațiu celular, cu scheletele $(X/A)^n = X^n/A$.

4. Să se arate că spațiul lenticular L_p^{2n+1} este un CW-complex, de dimensiune $2n+1$.

Indicație. (Pentru detalii vezi [33, p. 15].)

Pentru orice $0 \leqslant k \leqslant p-1$ și $r \leqslant n+1$ avem cîte o celulă de dimensiune $2r-2$, $c_k^{2r-2} = \left\{(z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0) \in S^{2n+1} \mid z_r = 0 \text{ sau } \operatorname{Arg} z_r = \frac{2k\pi}{p}\right\}$

și cîte o celulă de dimensiune $2r-1$,

$$c_k^{2r-1} = \left\{(z_1, \ldots, z_r, 0, \ldots, 0) \in S^{2n+1} \mid z_r = 0 \quad \text{sau} \quad \frac{2k\pi}{p} \leqslant \operatorname{Arg} z_r \leqslant \leqslant \frac{2(k+1)}{p}\right\}.$$

Aplicațiile caracteristice sînt definite astfel: considerăm $D^{2s} = \left\{z = (z_1, \ldots, z_s) \in \mathbb{C}^s \,\middle|\, \sum_{i=1}^{s} |z_i|^2 \leqslant 1\right\}$ și atunci $\varphi_k^{2r-2} : D^{2r-2} \to c_k^{2r-2} \subset S^{2n+1}$, $\varphi_k^{2r-1} : D^{2r-2} \times D^1 \to c_k^{2r-1} \subset S^{2n+1}$ sînt definite prin $\varphi_k^{2r-2}(z) = (z_1, \ldots, z_{r-1}, (1-\|z\|^2)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i k}{p}}, 0, \ldots, 0)$, $\varphi_k'^{2r-1}(z, x) = (z_1, \ldots, z_{r-1}, (1-\|z\|)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{2\pi i(x+2k+1)}{p}}, 0, 0, \ldots, 0)$ și se ia $\varphi_k^{2r-1} = \varphi_k'^{2r-1} \circ h_{r-1}$, unde $h_{r-1} : D^{2r-1} \times D^1 \to D^{2r-2} \times D^1$, $h_{r-1}(z, x) = (z, -1)$, pentru $\|z\| = 1$, $h_{r-1}(D^{2r-2} \times S^0) = S^{2r-3} \times D^1 \cup D^{2r-2} \times S^0$ și $h_{r-1} | \operatorname{Int}(D^{2r-2} \times D^1)$ este homeomorfism.

5. Să se arate că un CW-complex K este un spațiu normal*).

Soluție. Arătăm mai întîi că dacă A este o submulțime închisă a unui spațiu X, $f : A \to Y$ este continuă și X, Y sînt normale, atunci $Y {}_f\sqcup X$ este de asemenea spațiu normal. Dacă X și Y sînt spații Hausdorff, rezultă ușor că $Y {}_f\sqcup X$ este la fel. Fie apoi F_1, F_2 închise în $Y {}_f\sqcup X$ și $q_2 : Y \to Y {}_f\sqcup X$ aplicația de incluziune. Atunci, $q_2^{-1}(F_1)$, $q_2^{-1}(F_2)$ sînt deschise în Y și fie $\varphi_2 : Y \to [0, 1]$, încît $\varphi_2 | q_2^{-1}(F_1) = 0$ și $\varphi_2 | q_2^{-1}(F_2) = 1$. Considerăm atunci $\chi : A \cup q_1^{-1}(F_1) \cup q_1^{-1}(F_2) \to [0, 1]$, pentru $q_1 : X \to X \sqcup Y \to Y {}_f\sqcup X$,

$$\chi(x) = \begin{cases} \varphi_2(f(x)), & x \in A, \\ 0, & x \in q_1^{-1}(F_1), \\ 1, & x \in q_1^{-1}(F_2). \end{cases}$$

χ se poate prelungi la o aplicație continuă $\varphi_1 : X \to [0, 1]$. Definim acum $\varphi : Y {}_f\sqcup X \to [0, 1]$,

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_2(y), & \text{dacă } z = \hat{y},\ y \in Y, \\ \varphi_1(x) & \text{dacă } z = \hat{x},\ x \in X. \end{cases}$$

*) Se poate arăta că este chiar paracompact [33, p. 55].

φ este continuă și $\varphi | F_1 = 0$, $\varphi | F_2 = 1$. Se aplică exerc. 5 § 4 Cap. I. Acum, după Teorema 3, K^r se obține din K^{r-1} prin adjuncții de r-celule. Deoarece K^0 este discret și D^r spațiu normal, rezultă K^r spațiu normal, $\forall r \geqslant 0$. Deoarece K^r este închisă în K^{r+1}, rezultă, prin inducție, că pentru orice închisă $F \subset K$, orice aplicație continuă $h : F \to \mathbb{R}$ se poate prelungi prin continuitate la $h_n : F \cup K^n \to \mathbb{R}$, încît $h_{n+1} | F \cup K^n = h_n$. Atunci, $H : K \to \mathbb{R}$, definită prin $H | F \cup K^n = h_n$, prelungește pe h și deci K este spațiu normal.

6. Fie (X, A) un CW-complex relativ. Fie Z un spațiu topologic liniar conex, avînd proprietatea că dacă $X \setminus A$ conține o n-celulă, atunci $\pi_{n-1}(Z) = 0$. Să se arate că orice aplicație $f : A \to Z$ are o extensie $F : X \to Z$.

Soluție. Fie e_j o celulă de dimensiune n din $X \setminus A$ și fie aplicația de atașare a acesteia $g_j : S^{n-1} \to A$. Deoarece $fg_j : S^{n-1} \to Z$ este nul omotopă (prin ipoteză), există o extensie a acesteia la D^n și deci o extensie a aplicației f la spațiul $A_{g_j} \cup D^n$. Repetînd raționamentul, putem extinde aplicația f la orice subcomplex finit al lui (X, A). Rezultatul general se obține aplicînd Lema lui Zorn. Anume, considerînd mulțimea E a tuturor perechilor (X_a, f_a) cu $A \subseteq X_a \subseteq X$ un subcomplex pentru care există $f_a : X_a \to Z$ o extensie a lui f. Mulțimea E este nevidă și parțial ordonată prin relația $(X_a, f_a) \leqslant (X_b, f_b) \Leftrightarrow X_a \subseteq X_b$ și $f_b | X_a = f_a$. Lanțurile crescătoare în E au o margine superioară deoarece dacă $\{(X_a, f_a)\}$ este un asemenea lanț, atunci $(\bigcup X_a, f)$, cu $f | X_a = f_a$, este în E. Prin urmare, E este inductiv ordonată. Rezultă din Lema lui Zorn că există un element maximal (X', f') pentru E. Dacă presupunem $X' \neq X$, fie o celulă $e \in X \setminus X'$ de dimensiune minimală. Atunci, $e \setminus \operatorname{Int} e \subset X'$ și putem extinde f' la o aplicație $X' \cup e \to Z$, în contradicție cu maximalitatea lui (X', f').

§ 2. Proprietăți omotopice ale CW-complexelor. Teorema lui Whitehead

TEOREMA 1. *Dacă (X, A) este un CW-complex relativ, atunci incluziunea $A \hookrightarrow X$ este o cofibrare.*

Demonstrație. Aplicăm Corolarul 6 § 14 Cap. I, utilizînd inducția și faptul că topologia lui $X \times I$ este compatibilă cu $\{X^n \times I\}_n$, adică $F \subset X \times I$ este închisă dacă și numai dacă $F \cap (X^n \times I)$ este închisă în $X^n \times I$.

TEOREMA 2. *Fie (X, A) un CW-complex relativ, încît* dim $(X \setminus A) \leqslant n$ *și fie (Y, B) o pereche n-conexă. Atunci, orice aplicație $(X, A) \to (Y, B)$ este omotopă* rel *A cu o aplicație $X \to B$.*

Demonstrație. Se aplică exerc. 8, 9 § 5 Cap. II și Teorema 1.

COROLAR 1. *Fie (X, A) un CW-complex relativ și o pereche topologică (Y, B), n-conexă, $\forall n$. Atunci, orice aplicație $(X, A) \to (Y, B)$ este omotopă* rel *A cu o aplicație $X \to B$.*

Demonstrație. Fie $f : (X, A) \to (Y, B)$. Din Teoremele 1 și 2, se poate construi, prin inducție după k, un șir de omotopii $H_k : (X, A) \times I \to (Y, B)$, $k \geq 0$, încît:

a) $H_0(x, 0) = f(x)$, $\forall x \in X$; b) $H_k(x, 1) = H_{k+1}(x, 0)$, $\forall x \in X$; c) H_k este o omotopie rel X^{k-1}; d) $H^k(X^k \times 1) \subset B$.

Putem defini atunci $H : (X, A) \times I \to (Y, B)$ prin formula

$$H(x, t) = H_{k-1}\left(x, \frac{t - (1 - 1/k)}{\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}}\right),$$

$$1 - \frac{1}{k} \leq t \leq 1 - \frac{1}{k+1}, \quad k \geq 1.$$

DEFINIȚIA 1. O aplicație continuă, $f : X \to Y$, se numește *n-echivalență* ($n \geq 1$) dacă induce o corespondență biunivocă $f_* : \pi_0(X) \to \pi_0(Y)$ și, pentru fiecare $x \in X$, homomorfismul $f_* : \pi_q(X, x) \to \pi_q(Y, f(x))$ este izomorfism pentru $0 < q < n$ și epimorfism pentru $q = n$. Aplicația f este o *echivalență omotopică slabă* sau *∞-echivalență* dacă este n-echivalență oricare ar fi $n \geq 1$.

Două spații topologice X și Y se numesc de ***același tip de omotopie slabă*** dacă există un spațiu topologic Z și două echivalențe omotopice slabe $f : Z \to X$, $g : Z \to Y$.

Lăsăm în seama cititorului demonstrația următorului corolar.

COROLAR 2. a) *Compunerea a două n-echivalențe este o n-echivalență;*

b) *O aplicație omotopă cu o n-echivalență este o n-echivalență;*

c) *Orice echivalență omotopică este o echivalență omotopică slabă.*

COROLAR 3. *Fie $f : X \to Y$ o aplicație continuă și M_f cilindrul acesteia. Atunci, f este o n-echivalență dacă și numai dacă perechea (M_f, X) este n-conexă.*

Demonstrație. Conform Teoremei 7 § 13 Cap. I, $f = r \circ i$, unde $r : M_f \to Y$ este o echivalență omotopică. Prin urmare, f este n-echivalență dacă și numai dacă este n-echivalență incluziunea $i : X \hookrightarrow M_f$. Cazul $n = 0$

este evident. Presupunem $n \geq 1$ și fie șirul exact de omotopie al perechii (M_f, X),

$$\ldots \longrightarrow \pi_k(X) \xrightarrow{i_*} \pi_k(M_f) \xrightarrow{j_*} \pi_k(M_f, X) \xrightarrow{\partial} \pi_{k-1}(X) \xrightarrow{i_*} \ldots$$

După exerc. 8 § 5 Cap. II, (M_f, X) este n-conexă dacă și numai dacă $\pi_k(M_f, X) = 0$, $1 \leq k \leq n$, deci dacă și numai dacă: $i_* : \pi_k(X) \to \pi_k(M_f)$ este izomorfism pentru $1 \leq k < n$ și epimorfism pentru $k = n$.

TEOREMA 3. *Fie $f : X \to Y$ o n-echivalență ($n \leq \infty$) și fie (K, L) un CW-complex relativ, cu $\dim(K \setminus L) \leq n$. Fie $g : L \to X$ și $h : K \to Y$, încît $h|L = f \circ g$. Există atunci $g' : K \to X$, astfel încît $g'|L = g$ și $f \circ g' \simeq h$* rel L.

Demonstrație. Fie M_f cilindrul aplicației f și incluziunile $i : X \hookrightarrow M_f$, $j : Y \hookrightarrow M_f$ (vezi Teorema 7 § 13 Cap. I). Retracția $r : M_f \to Y$ este un invers omotopic pentru j. Avem $j \circ h|L = jfg = (j \circ r) \circ (i \circ g) \simeq i \circ g$ și putem lua omotopia acestora $F : L \times I \to M_f$, încît $rF(l, t) = h(l)$, $\forall t \in I$, $\forall l \in L$. Aplicînd Teorema 1, există $F' : K \times I \to M_f$, încît $F'|L \times I = F$ și $F'|K \times \{0\} = j \circ h$. Definim $h' : K \to M_f$, $h'(p) = F'(p, 1)$. Avem atunci $h'|L = i \circ g'$ și $r \circ h' \simeq r \circ j \circ h = h$ rel L. Aplicația h' o putem considera ca aplicație de perechi, $h' : (K, L) \to (M_f, X)$. Deoarece (M_f, X) este n-conexă (Cor. 3) și $\dim(K \setminus L) \leq n$, din Teorema 2 rezultă că h' este omotopă rel L cu o aplicație $g' : K \to X$. Avem atunci $g'|L = g$ și $f \circ g' = r \circ i \circ g' \simeq r \circ h' \simeq r \circ j \circ h = h$ rel L.

COROLAR 4. *Fie $f : X \to Y$ o n-echivalență ($n \leq \infty$) și K un CW-complex. Considerăm aplicația $f_* : [K, X] \to [K, Y]$, $f_*[\varphi] = [f \circ \varphi]$. Dacă* $\dim K \leq n$, *atunci f_* este surjectivă, iar dacă* $\dim K \leq n - 1$, *f_* este de asemenea injectivă.*

Demonstrație. Pentru prima parte, aplicăm Teorema 3 aplicației f și CW-complexului relativ $(X, \emptyset)$. Dacă luăm $\psi : K \to Y$, există $\psi' : K \to X$, încît $f \circ \psi' \simeq \psi$, deci $f_*[\psi'] = [\psi]$.

Pentru demonstrarea părții a doua, aplicăm Teorema 3 CW-complexului relativ $(K \times I, K \times \partial I)$. Dacă $\varphi_0, \varphi_1 : K \to X$ satisfac $f \circ \varphi_0 \simeq f \circ \varphi_1$, fie $g : K \times \partial I \to X$, încît $g(z, 0) = \varphi_0(z)$, $g(z, 1) = \varphi_1(z)$. Atunci, există $h : K \times I \to Y$, încît $h|K \times \{0\} = f \circ \varphi_0$, $h|K \times \{1\} = f \circ \varphi_1$

şi deci $h|K\times\partial I=g$. Deoarece $\dim(K\times I)\leqslant n$ (exerc. 1 § 1) şi deci $\dim(K\times I\setminus K\times\partial I)\leqslant n$, rezultă, din Teorema 3, că există $g':K\times I\to X$, încît $g'|K\times\partial I=g$. Atunci $g':\varphi_0\simeq\simeq\varphi_1$, deci $[\varphi_0]=[\varphi_1]$.

COROLAR 5 (teorema lui Whitehead). *O aplicaţie continuă între CW-complexe este o echivalenţă omotopică dacă şi numai dacă aceasta este o echivalenţă omotopică slabă.*

Demonstraţie. După Corolarul 2 c), o echivalenţă omotopică este o echivalenţă omotopică slabă. Reciproc, fie $f:K\to L$, o echivalenţă omotopică slabă, între CW-complexe. După Corolarul 4, aplicaţia $f_*:[L,K]\to[L,L]$ este bijecţie. Există deci $g:L\to K$, astfel încît $f_*([g])==[1_L]$, adică $f\circ g\simeq 1_L$. Aceasta arată că g este de asemenea o echivalenţă omotopică slabă. Există deci $f':K\to\to L$, aşa fel ca $g\circ f'\simeq 1_K$. Dar, $f'\simeq(f\circ g)\circ g'=f\circ\circ(g\circ f')\simeq f$, prin urmare $g\circ f\simeq 1_K$. Astfel, g este o inversă omotopică pentru f.

OBSERVAŢIA 1. Condiţia din Cor. 5, ca spaţiile să fie CW-complexe, este esenţială. Pentru a vedea aceasta, să considerăm spaţiul Y din exerc. 8 § 13 Cap. I. Cum s-a arătat în exerciţiul respectiv, Y nu este un spaţiu contractibil. Se poate arăta însă (vezi exerc. 14 § 6) că $\pi_n(Y)=0$, $\forall n\geqslant 0$. Considerînd atunci aplicaţia constantă $Y\to\{\text{pct.}\}$, aceasta este o echivalenţă omotopică slabă, dar nu este o echivalenţă omotopică *).

OBSERVAŢIA 2. Corolarul 5 afirmă că dacă există o aplicaţie continuă $f:K\to L$, care este o echivalenţă omotopică slabă între CW-complexe, atunci f este o echivalenţă omotopică. Nu rezultă însă că dacă CW-complexele K şi L au grupurile de omotopie respectiv izomorfe, atunci K şi L sînt echivalente omotopic. În adevăr, dacă se consideră $K=S^p\times P\mathbb{R}^q$, $L=S^q\times P\mathbb{R}^p$, cu $1<<p<q$, atunci, utilizînd Teorema 2 § 4 Cap. II şi Prop. 2 § 8 Cap. II, deducem că $\pi_n(K)\cong\pi_n(L)$, $\forall n\geqslant 0$. Se poate arăta însă că spaţiile K şi L nu sînt echivalente omotopic (vezi exerc. 2 § 8 Cap. IV).

DEFINIŢIA 2. Dat un spaţiu topologic X, o *CW-aproximare* sau *rezoluţie* a lui X este o pereche (Y, f)

*) Arătaţi că Y nu este un CW-complex, utilizînd exerc. 2.

unde Y este un CW-complex iar $f:Y\to X$ este o echivalenţă omotopică slabă.

TEOREMA 4. *Pentru orice spaţiu topologic există o CW-aproximare.*

Demonstraţie. Presupunem mai întîi că X este liniar conex. Construim prin inducţie un şir de CW-complexe Y^m, de dimensiune m, încît

$$\ldots\supseteq Y^m\supseteq Y^{m-1}\supseteq\ldots\supseteq Y^1\supseteq Y^0=*,$$

şi nişte m-echivalenţe $f_m:Y^m\to X$, încît $f_m|Y^{m-1}=f_{m-1}$.

Dacă X este $(n-1)$-conex, luăm $*=Y^0=Y^{n-1}$ şi $f_{n-1}(*)=*$. Presupunem că am construit (Y^m, f_m). Fie atunci M_{f_m}, cilindrul aplicaţiei f_m. Utilizînd Teorema 7 § 13. Cap. I şi şirul exact de omotopie al perechii (M_{f_m}, Y^m) obţinem următoarea diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots\to\pi_{i+1}(M_{f_m},Y^m)\to & \pi_i(Y^m) & \xrightarrow{j_*} & \pi_i(M_{f_m}) & \to\pi_i(M_{f_m},Y^m)\to\cdots\\ & {\scriptstyle (f_m)_*}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle r_*} & & \\ & \pi_i(X) & & & \end{array}$$

(Am omis scrierea punctelor bază, dar acestea se presupun.) Rezultă $\pi_i(M_{f_m}, Y^m)=0$ pentru $i\leqslant m$. Fie $\{f_\alpha\}$ un sistem de generatori pentru $\pi_{m+1}((M_{f_m}, Y^m),*)$, $f_\alpha:(D^{m+1}, S_\alpha^m, *)\to(M_{f_m}, Y^m, *)$. Construim atunci $Y^{m+1}:Y^{m+1}==Y^m\cup\bigsqcup D_\alpha^{m+1}/x\sim f_\alpha(x)$, pentru $x\in S_\alpha^m\subset D_\alpha^{m+1}$. Considerînd topologia slabă, obţinem un CW-complex, avîndu-l pe Y^m ca subcomplex. Definim apoi $F:(Y^{m+1}, Y^m)\to\to(M_{f_m}, Y^m)$, extinzînd aplicaţia identică 1_{Y^m}, prin $F|D_\alpha^{m+1}==f_\alpha$. Putem lua acum $f_{m+1}=rF$ şi avem $f_{m+1}|Y^m=r|Y^m==f_m$. Considerînd cilindrul M_F al aplicaţiei F şi şirul exact de omotopie al tripletului (M_F, Y^{m+1}, Y^m) obţinem următoarea diagramă comutativă

$$\begin{array}{ccccccc}\cdots\to\pi_{i+1}(M_F,Y^m)\to & \pi_i(Y^{m+1},Y^m) & \xrightarrow{j'_*} & \pi_i(M_F,Y^m) & \to\pi_i(M_F,Y^{m+1})\to\cdots\\ & {\scriptstyle F_*}\downarrow & \swarrow{\scriptstyle\cong} & & \\ & \pi_i(M_{f_m},Y^m) & & & \end{array}$$

Să ţinem cont că $\pi_i(M_{f_m}, Y^m)=0$, pentru $i\leqslant m$, şi că F_* este epimorfism. Rezultă $\pi_i(M_F, Y^{m+1})=0$ pentru $i\leqslant m+1$ iar j'_* este izomorfism pentru $i\leqslant m$ şi

epimorfism pentru $i = m + 1$. Fie acum $r' : M_F \to M_{f_m}$ şi $r : M_{f_m} \to X$ ca în Teorema 7 § 13 Cap. I. Acestea sînt echivalenţe omotope şi $rr'j = rF = f_{m+1}$. Prin urmare, $(f_{m+1})_*$ are proprietăţile cerute şi astfel inducţia este completă. Definim acum $Y = \bigcup Y^m$ şi $f : Y \to X$, prin $f| Y^m = f_m$. Considerînd pe Y topologia slabă, Y este un CW-complex, pentru care $\pi_i(Y, Y^m) = 0$, dacă $i \leqslant m$. Prin urmare, în diagrama, din stînga, toate aplicaţiile sînt izomorfisme ($i : Y^m \hookrightarrow Y$ fiind incluziunea). Astfel, f este o echivalenţă omotopic slabă.

$$\pi_i(Y^m) \xrightarrow{i_*} \pi_i(Y) \xrightarrow{f_*} \pi_i(X), \qquad \pi_i(Y^m) \xrightarrow{(f_m)_*} \pi_i(X)$$

Dacă X nu este spaţiu liniar conex, considerăm cîte o CW-aproximare (Y_α, f_α) pentru fiecare componentă liniar conexă X_α a lui X şi luăm apoi $Y = \bigsqcup_\alpha Y_\alpha$ şi $f : Y \to X$, prin $f| Y_\alpha = f_\alpha$. Atunci, (Y, f) este o CW-aproximare pentru X.

OBSERVAŢIA 3. Pentru un spaţiu topologic X, pot exista mai multe CW-aproximări. De exemplu, dacă X constă dintr-un singur punct, atunci orice pereche (Y, f), cu Y un CW-complex contractibil şi $f(Y) = *$ este o CW-aproximare. Se poate arăta însă că dacă (Y, f) şi (Z, g) sînt două CW-aproximări ale lui X, atunci există o aplicaţie (celulară), $h : Y \to Z$, astfel încît $gh \simeq f$*), ceea ce implică faptul că h este o echivalenţă omotopică slabă şi, în baza Cor. 5, rezultă că h este chiar o echivalenţă omotopică. Astfel, CW-aproximările sînt unice pînă la echivalenţe omotope.

EXERCIŢII

1. Un spaţiu topologic X se numeşte *slab local simplu conex* dacă pentru orice $x \in X$ şi orice deschisă U din X, cu $x \in U$, există o deschisă V, încît $x \in V \subseteq U$ şi astfel că fiecare drum închis în (V, x) este nul omotop în X. Să se arate că orice CW-complex este local contractibil şi slab local simplu conex.

Indicaţie. Se poate consulta [43, p. 170].

2. Să se arate că un CW-complex este local liniar conex.

---

*) Se utilizează Teorema 3 sau se poate consulta [51, § 8 Cap. 7].

§ 3. Calculul grupurilor : $\pi_r(S^n)$, $r<n$; $\pi_m(P\mathbb{R}^\infty)$, $\pi_m(P\mathbb{C}^\infty)$. Teorema de aproximare celulară

TEOREMA 1. *Pentru* $n \geqslant 1$, $\pi_r(S^n) = 0$, $\forall r < n$.

Demonstraţie. Vom arăta că pentru $r < n$ au loc următoarele afirmaţii :

a(n) Orice aplicaţie $S^r \to S^n$ este nul omotopă ;

b(n) Orice aplicaţie $S^r \to S^n$ se poate extinde la D^{r+1} ;

c(n) Dacă A este spaţiu conex şi X se obţine din A prin ataşare de n-celule, atunci orice aplicaţie $(D^r, S^{r-1}) \to (X, A)$ este omotopă rel S^{r-1} cu o aplicaţie $D^r \to A$.

După Teorema 5 § 13 Cap. I, a(n) $\Leftrightarrow$ b(n). Stabilim valabilitatea celor trei afirmaţii prin inducţie, utilizînd pe lîngă echivalenţa de mai sus implicaţiile c(n) $\Rightarrow$ a(n) şi b(n) $\Rightarrow$ c(n + 1), pe care urmează să le dovedim. Verificarea în cazul $n = 1$ se face pentru c(1). În adevăr, c(1) este echivalent cu faptul că X este liniar conex, ceea ce este evident din definiţia spaţiilor de adjuncţie.

c(n) $\Rightarrow$ a(n). Fie $f : S^r \to S^n$, $r < n$, şi $p : D^r \to S^r = D^r/S^{r-1}$, aplicaţia de identificare (Prop. 7 § 11 Cap. I), cu $x = p(S^{r-1})$ şi $e^0 = \{f(x)\}$. Atunci, S^n are o structură de CW-complex, cu descompunerea celulară $S^n = e^0 \cup e^n$, şi aplicaţia $f \circ p : D^r \to S^n$ defineşte aplicaţia $g : (D^r, S^{r-1}) \to (e^0 \cup e^n, e^0)$. Ipoteza c(n) implică faptul că g este omotopă rel S^{r-1} cu o aplicaţie $D^r \to e^0$, printr-o omotopie ce aplică S^{n-1} în $f(x)$. Această omotopie defineşte o omotopie rel S^{n-1} a lui f cu $S^r \to \{e^0\}$;

b(n) $\Rightarrow$ c(n + 1). Putem presupune b(n) sub forma b′(n). Orice aplicaţie $\partial I^r \to S^n$ se poate extinde la $I^r \to S^n$, $r < n$ şi, prin HEP pentru $(I^r, \partial I^r)$ (Cor. 5 § 14 Cap. I), S^n se poate înlocui cu un spaţiu echivalent omotopic.

Să presupunem că $X = A \,{}_{k_1}\!\sqcup D^{n+1} \,{}_{k_2}\!\sqcup D^{n+1} \sqcup \ldots, {}_{k_n}\!\sqcup D^{n+1}$ şi fie $\bar{k}_i : D^{n+1} \to X$ extensia uzuală a aplicaţiei de ataşare $k_i : S^n \to A$. Fie U_i imaginea prin $\bar{k}_i$ a mulţimii $\left\{x \in D^{n+1} \,|\, \|x\| < \frac{2}{3}\right\}$ şi U'_i imaginea prin $\bar{k}_i$ a mulţimii $\left\{x \in D^{n+1} \,|\, \|x\| > \frac{1}{3}\right\}$. Dacă $U = A \cup U'_1 \cup \ldots \cup U'_m$, atunci

$\mathcal{U} = \{U, U_1, \ldots, U_m\}$ este o acoperire deschisă a lui X. Spațiul $U \cap U_i$ este homeomorf cu $\left\{x \in D^{n+1} \mid \frac{1}{3} < \|x\| < \frac{2}{3}\right\}$, adică homeomorf cu $S^n \times \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Prin urmare $U \cap U_i$ are același tip omotopic ca și S^n astfel că b′(n) se poate aplica pentru funcții cu codomeniul $U \cap U_i$, în locul lui S^n.

Să presupunem dată o aplicație $f : (I^r, \partial I^r) \to (X, A)$, $r < n + 1$. Avem de arătat că f este omotopă rel ∂I^r cu o aplicație $I^r \to A$. Cu ajutorul hiperplanelor în $\mathbb{R}^r$, de ecuații $x_j = \frac{s}{m}$, $s = 1, 2, \ldots, m-1$, $j = 1, \ldots, r$, putem subdivide cubul I^r în cuburi de diametru $\leqslant \sqrt{r/m}$. Utilizînd teorema lui Lebesgue, m poate fi ales suficent de mare, încît orice asemenea cub să fie aplicat prin f într-o mulțime a acoperirii $\mathcal{U}$.

Fie M reuniunea tuturor cuburilor J, în toate dimensiunile, din subdivizarea de mai sus a lui I^r, pentru care $f(J) \subset U$. Fie K^q reuniunea tuturor cuburilor J de dimensiune $\leqslant q (K^{-1} = \emptyset$, K^0 constă din puncte izolate și $K^r = I^r)$ și fie $K_q = K^q \cup M$.

Construim, prin inducție după q, aplicațiile $g_q : K_q \to X$, satisfăcînd condițiile:

(1_q) $g_q \mid M = f \mid M$ și $g_q \mid K_{q-1} = g_{q-1}$;

(2_q) Dacă $x \in K_q$ și $f(x) \in U_i$, atunci $g_q(x) \in U \cap U_i$.

Inducția începe cu $q = -1$, luînd $g_{-1} = f \mid M$. Presupunem definită g_q. Fie J^{q+1} un $(q+1)$-cub al lui K_{q+1} care nu este conținut în M. Atunci, pentru un unic i, $f(J^{q+1}) \subset U_i$ și rezultă, după (2_q), că $g_q(J^{q+1}) \subset U \cap U_i$. Dar, $q + 1 \leqslant r < n + 1$, deci $q < n$. Prin b′(n), pentru $U \cap U_i$, g_q se poate extinde la o aplicație $J^{q+1} \to U \cap U_i$ și definim $g_{q+1} : K_{q+1} \to X$, încît să coincidă cu această aplicație pe J^{q+1}. Se verifică imediat (1_{q+1}) și (2_{q+1}).

Fie acum $g = g_{r+1} : I^{r+1} \to X$ și arătăm că $f \simeq g$. Aplicația $\bar{k}_i : D^{n+1} \to X$ aplică mulțimea $\left\{x \in D^{n+1} \mid \|x\| < \frac{2}{3}\right\}$ bijectiv pe U_i și presupunem că este dată, cu

ajutorul acestei bijecții, o structură liniară pe U_i. Definim $h_t : I^{r+1} \to X$, prin

$$h_t(x) = \begin{cases} f(x), & f(x) \notin U_i, \forall i, \\ (1-t)f(x) + tg(x), & f(x) \in U_i, i = 1, \ldots, m. \end{cases}$$

Orice $(r+1)$-cub J^{r+1} în subdivizarea dată a lui I^{r+1} este aplicat prin f în U sau într-un U_i. Astfel, formula pentru h_t arată că această aplicație este continuă pe J^{r+1}. Deoarece acest cuburi formează o acoperire a lui I^{r+1} cu submulțimi închise, aceasta implică continuitatea aplicației $h : I^{r+1} \times I \to X$. Avem $h_0 = f$ și dovedim că $h_1 = g$. Presupunem că J este un $(r+1)$-cub al subdivizării și $x \in J$. Dacă $f(x) \in U_i$, atunci $h_1(x) = g(x)$. Presupunem că $f(x) \notin U_i$, $\forall i$ (deci $h_1(x) = f(x)$). Atunci $f(J) \not\subset U_i$, $\forall i$, încît $f(J) \subset U$. Deci $x \in A$ și prin urmare $h_1(x) = f(x) = g(x)$. Întrucît $\partial I^{r+1} \subset M$, omotopia h_t este rel ∂I^{r+1}, deci h definește o omotopie $f \simeq \bar{g}$, unde $\bar{g} : (I^{r+1}, \partial I^{r+1}) \to (X, A)$ este definită de g. În sfîrșit, $\operatorname{Im} g \subset U$ și A este o retractă de deformare a lui U. Rezultă ușor că g este omotopă cu o aplicație $I^{r+1} \to A$.

Rezumînd, avem: c(1) $\Rightarrow$ a(1) $\Leftrightarrow$ b(1) $\Rightarrow$ c(2) $\Rightarrow$ a(2) $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ a(n), $\forall n$. Fie acum $[f] \in [(S^r, p_0'), (S^n, p_0)]$, $r < n$. După c(n), $f : S^r \to S^n$ este nul omotopă și, după Teorema 5 § 13 Cap. I, f este nul omotopă rel$\{p_0'\}$, deci $[f] = 0$. După Teorema 1 § 1 Cap. II, $\pi_r(S^n, p_0) = 0$.

COROLAR 1. $\pi_2(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

Demonstrație. Se aplică Cor. 2 § 8 Cap. II și Teorema 1.

DEFINIȚIA 1. *Spațiul proiectiv real infinit dimensional*, $P\mathbb{R}^\infty$, se definește ca fiind spațiul celular dat de șirul de schelete $P\mathbb{R}^0 \subset P\mathbb{R}^1 \subset \ldots \subset P\mathbb{R}^n \subset \ldots$

Deci $P\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} P\mathbb{R}^n$, cu topologia ca în Def. 3 § 1.

Spațiul proiectiv complex infinit dimensional, $P\mathbb{C}^\infty$, este spațiul celular definit de șirul de schelete $P\mathbb{C}^0 \subset P\mathbb{C}^1 \subset \ldots \subset P\mathbb{C}^n \subset \ldots$

COROLAR 2. $\pi_m(P\mathbb{R}^\infty) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}_2, & m = 1, \\ 0, & m \geqslant 2. \end{cases}$

Demonstrație. Aplicînd exerc. 9 § 4 Cap. II, rezultă că avem $\pi_m(P\mathbb{R}^\infty) \cong \varinjlim_n \pi_m(P\mathbb{R}^n)$.

Prin Propoziția 2 § 8 Cap. II, $\pi_1(P\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}_2$ dacă $n \geqslant 2$ și $\pi_1(P\mathbb{R}^1) \cong \mathbb{Z}$. Fie $p \in \pi_1(P\mathbb{R}^1)$. Dacă p este impar, atunci $(1, p)\, l(n, \hat{1})$, pentru $n \geqslant 2$. Dacă p este par, atunci $(1, p) l(n, \hat{0})$. Rezultă că $\varinjlim_n \pi_1(P\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

Fie acum $m \geqslant 2$. Prin Teorema 1 și Prop. 2 § 8 Cap. II, $\pi_m(P\mathbb{R}^n) = 0$, dacă $2 \leqslant m < n$. Fie $n \leqslant m$ și $[f] \in \pi_m(P\mathbb{R}^n)$. Avem atunci $\pi_m(P\mathbb{R}^{n+m}) = 0$ și deci $(n, [f]) l(n + m, 0)$. Rezultă că $\varinjlim_n \pi_m(P\mathbb{R}^n) = 0$.

Cu totul analog, utilizînd Prop. 4 § 8 Cap. II, se obține următorul rezultat.

COROLARUL 3. $\pi_m(P\mathbb{R}^\infty) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & m = 2, \\ 0, & m \neq 2. \end{cases}$

OBSERVAȚIA 1. Dacă $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X^n$ este un spațiu celular, atunci, aplicînd exerc. 9 § 4 Cap. II, rezultă că avem $\pi_m(X) = \varinjlim_n \pi_m(X^n)$, pentru orice $m \geqslant 1$. Conform Teoremei 3 § 1, rezultatul are loc dacă X este un CW-complex și X^n sînt scheletele acestuia.

TEOREMA 2. *Fie X un spațiu topologic și $(X_r)_{r>0}$ un șir de subspații ale lui X încît:*

a) $X_r \subset X_{r+1}$, $r \geqslant 0$;

b) *Orice aplicație $(D^{r+1}, S^r) \to (X, X_r)$ este omotopă* rel S^r *cu o aplicație $D^{r+1} \to X_{r+1}$.*

Fie K un CW-complex, M un subcomplex al lui K și $f : K \to X$ o aplicație continuă, astfel că $f(M^r) \subset X_r$, $r \geqslant 0$. Atunci, f este omotopă rel M *cu o aplicație $g : K \to X$, astfel încît $g(K^r) \subset X_r$, $r \geqslant 0$.*

Demonstrație. Fie $K_r = M \cup K^r$. Construim niște aplicații $f^r : K \to X$ și omotopii $f^{r-1} \simeq f^r$ rel K^{r-1} încît $f^r(K_s) \subset X_s$, $0 \leqslant s \leqslant r$. Construcția se face prin inducție, luînd $f^{-1} = f$. Fie e^{r+1} o $(r + 1)$-celulă din $K \setminus M$. Atunci, $f^r | K_r \cup e^{r+1}$ este omotopă rel K_r cu o aplicație $K_r \cup e^{r+1} \to X_{r+1}$. Aplicînd aceasta pentru fiecare $(r + 1)$-celulă din

$K \setminus M$, se obține o omotopie $f^r | K_{r+1} \simeq f'$ rel K_r, încît $f'(K_{r+1}) \subset X_{r+1}$. Utilizînd HEP pentru perechea (K, K_{r+1}) (Teorema 1 § 2), obținem o omotopie $f^r \simeq f^{r+1}$ rel K_r. Se definește acum aplicația $g : K \to X$ prin $g | K^r = f^r$.

DEFINIȚIA 2. O aplicație continuă, $f : K \to L$, între două CW-complexe, se numește *aplicație celulară* dacă $f(K^r) \subseteq L^r$, $\forall r \geqslant 0$.

COROLAR 4 (teorema de aproximare celulară). *Fie K și L două CW-complexe conexe și M un subcomplex al lui K (posibil vid). Dacă $f : K \to L$ este o aplicație continuă, încît $f | M$ este celulară, atunci f este omotopă* rel M *cu o aplicație celulară.*

Demonstrație. Luăm în Teorema 2, $X = L$, $X_r = L^r$, și utilizăm afirmația c(n) din Teorema 1, pentru a asigura condiția b) din Teorema 2 : orice aplicație $(D^{r+1}, S^r) \to (L, L^r) \subset (L, L^{r+1})$ este omotopă rel S^r cu o aplicație $D^{r+1} \to L^{r+1}$, deoarece L se obține din L^{r+1} prin atașare de celule de dimensiune $> r + 1$.

EXERCIȚII

1. Fie $f_0, f_1 : K \to L$ două aplicații celulare și $F : f_0 \simeq f_1$, iar M este un subcomplex al lui K. Presupunem că $F | M \times I$ este *celulară*, adică $F_t(M^r) \subset L^{r+1}$, $\forall t \in I$, $\forall r \geqslant 0$. Să se arate că F este omotopă rel $M \times I \cup K \times \partial I$ cu o omotopie $G : f_0 \simeq f_1$, încît $G_t(K^r) \subset L^{r+1}$, $\forall t \in I$, $\forall r \geqslant 0$.

Indicație. Se aplică teorema de aproximare celulară.

2. Fie K un CW-complex. Să se arate că incluziunea $i : K^2 \to K$ induce izomorfismul $i_* : \pi_1(K^2, x) \cong \pi_1(K, x)$, $\forall x \in K^2$.

Indicație. Se aplică c(n) din demonstrația Teoremei 1.

3. Fie L un subcomplex conex al CW-complexului K, $j : L \hookrightarrow K$ incluziunea și $x \in K^0$, $p_0 \in S^r$. Să se arate că orice aplicație $(D^{r+1}, S^r) \to (K, L)$ este omotopă cu o aplicație h, pentru care $h(p_0) = x$.

§ 4. Spații Eilenberg-Mac Lane și sisteme Postnikov

DEFINIȚIA 1. a) Fie n un întreg pozitiv și π un grup (abelian dacă $n > 1$). Un *spațiu de tip* (π, n) sau un *spațiu* $K(\pi, n)$ este un spațiu liniar conex cu punct bază, (Y, y_0), pentru care $\pi_q(Y, y_0) = 0$ dacă $q \neq n$ și $\pi_n(Y, y_0) \cong \pi$.

b) Un *spațiu Eilenberg-Mac Lane* este un spațiu liniar conex cu punct bază, (Y, y_0), avînd toate grupurile de omotopie nule, cu excepția posibilă a unuia singur.

OBSERVAȚIA 1. Un spațiu de tip (π, n) este un spațiu Eilenberg-Mac Lane. Reciproc, dacă (Y, y_0) este un spațiu Eilenberg-Mac Lane și $\pi_q(Y, y_0) = 0$ pentru $q \neq n$, atunci (Y, y_0) este un spațiu de tip $(\pi_n(Y, y_0), n)$.

EXEMPLE. 1. S^1 este un spațiu de tip $(\mathbb{Z}, 1)$.

2. Trompeta lui Klein este un spațiu de tip $(G, 1)$ (vezi Prop. 5 § 8 Cap. II).

3. $P\mathbb{R}^\infty$ este un spațiu de tip $(\mathbb{Z}_2, 1)$ (vezi Cor. 2 § 3).

4. $P\mathbb{C}^\infty$ este un spațiu de tip $(\mathbb{Z}, 2)$ (Cor. 3 § 3).

Vom demonstra că pentru orice număr întreg $n \geq 1$ și orice grup (abelian dacă $n > 1$) există un spațiu $(K(\pi, n)$. În acest scop vom stabili o serie de rezultate preliminarii. Teorema lui Hopf, utilizată în demonstrația următoarei leme, va fi dovedită în § 4 Cap. IV.

LEMA 1. *Fie* $X = \bigvee_{j \in J} S^n_j$ *un buchet de n-sfere. Atunci:*

a) *Dacă* $n = 1$, $\pi_1(X)$ *este* **grupul liber generat de** J, $G\{J\}$;

b) *Pentru* $n \geq 2$, $\pi_n(X)$ *este* **grupul abelian liber generat de** J, adică $\pi_n(X) \cong \bigoplus_{j \in J} \mathbb{Z}$ (această sumă directă se notează $\mathbb{Z}^{(J)}$ sau $\mathrm{Ab}\{J\}$ (vezi Lema 4 § 8)).

Demonstrație. Considerăm mai întîi cazul cînd J este o mulțime finită. Afirmația a) este atunci cea din Cor. 6 § 4 Cap. II.

Fie $n > 1$ și $X = S^n_1 \vee S^n_2 \vee \ldots \vee S^n_p$. Considerăm CW-complexul $Y = S^n_1 \times S^n_2 \times \ldots \times S^n_p$ (exemplul 5 § 1). Atunci, X este un subcomplex al lui Y și Y se obține din X prin atașări de celule de dimensiuni $\geq 2n$. Utilizînd afirmația c(m), din demonstrația Teoremei 1 § 3, pentru $m \geq 2n$, deducem că $\pi_r(Y, X) = 0$, pentru $r < 2n$, iar șirul exact de omotopie al perechii (Y, X) conduce la $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y) \cong \pi_n(S^n_1) \oplus \ldots \oplus \pi_n(S^n_p)$ (Teorema 2 § 4 Cap. II). Din Teorema lui Hopf, $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$, obținem $\pi_n(X) \cong$
$\cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{p \text{ ori}}$.

Să presupunem acum că J este o mulțime arbitrară. Considerăm subbuchetele finite X_s ale lui X. Avem $X = \bigcup_s X_s$ și se verifică condițiile exerc. 9 § 4 Cap. II. Prin urmare, $\pi_n(X) = \varinjlim_s \pi_n(X_s)$ și, aplicînd rezultatele

din cazul buchetelor finite, deducem afirmațiile a) și b) în cazul general.

LEMA 2. *Fie J și J' două mulțimi de indici și un întreg $n \geq 1$. Presupunem de asemenea dat un homomorfism φ:*

a) $\varphi : G\{J\} \to G\{J'\}$ *dacă* $n = 1$;

b) $\varphi : \mathrm{Ab}\{J\} \to \mathrm{Ab}\{J'\}$ *dacă* $n > 1$.

Există atunci o aplicație continuă, unică pînă la echivalențe omotopice, $f : \bigvee_{j \in J} S^n_j \to \bigvee_{j' \in J'} S^n_{j'}$, *încît* $f_* = \varphi : \pi_n(\bigvee_J S^n_j) \to$
$\to \pi_n(\bigvee_{J'} S^n_{j'})$.

Demonstrație. Pentru $j \in J$ notăm cu $\bar{j}$ generatorul grupului $\pi_n(\bigvee_J S^n_j)$, determinat de acest indice. Putem lua $\bar{j} = [q_j]$, unde $q_j = S^n = S^n_j \hookrightarrow \bigvee_J S^n_j$ este incluziunea.

Avem $\varphi(\bar{j}) \in \pi_n(\bigvee_{J'} S^n_{j'})$. Fie $f_j : S^n \to \bigvee_{J'} S^n_{j'}$ o aplicație de spații punctate, încît $\varphi(\bar{j}) = [f_j]$. Alegînd cîte o asemenea aplicație f_j, pentru fiecare indice $j \in J$, definim $f : \bigvee_J S^n_j \to \bigvee_{J'} S^n_{j'}$, prin $f | S^n_j = f_j$. Aceasta este corect definită (deoarece f_j sînt aplicații de spații punctate) și este continuă (lema de lipire și topologia cît). Avem $f_*(\bar{j}) =$
$= \varphi(\bar{j})$, $\forall j \in J$, încît deducem egalitatea $f_* = \varphi$.

Pentru a dovedi unicitatea, fie $g : \bigvee_J S^n_j \to \bigvee_{J'} S^n_{j'}$ încît $g_* = \varphi$. Avem atunci $\varphi(\bar{j}) = [gq_j]$ și deci $g/S^n_j \simeq f_j$ rel p_0, pentru $\forall j \in J$. Rezultă din definiția aplicației f că avem $g \simeq f$ rel p_0 (p_0 fiind punctul bază al sferei S^n).

TEOREMA 1. *Fie n un întreg pozitiv și π un grup (abelian dacă $n > 1$). Există atunci un CW-complex $M(\pi, n)$, numit spațiu Moore de tip (π, n), avînd o celulă de dimensiune zero, celelalte celule fiind de dimensiune n și $n + 1$ și astfel că $\pi_n(M(\pi, n)) \cong \pi$.*

Demonstrație. Conform Teoremei 3 § 1, un buchet arbitrar de n-sfere este un CW-complex, avînd o celulă de dimensiune zero și restul celulelor de dimensiune n. Atunci, dacă π este un grup liber (abelian liber dacă $n > 1$), rezultă din Lema 1 că $M(\pi, n)$ poate fi luat un buchet de n-sfere, avînd cîte o n-sferă pentru fiecare generator al grupului π.

Să presupunem acum că π este un grup oarecare (abelian dacă $n > 1$). Există atunci [53, §§ 4,7 Cap. I] un șir exact de grupuri $0 \to \mathbb{R} \xrightarrow{\varphi} F \to \pi \to 0$, cu F și

$\mathbb{R}$ grupuri libere (abeliene libere dacă π este abelian). După Lema 2, există o aplicație celulară $f: M(\mathbb{R}, n) \to M(F, n)$, încît $f_* = \varphi$. Definim spațiul $M(\pi, n)$ ca fiind conul aplicației f (exerc. 7 § 10 Cap. I), adică $M(\pi, n) = C_f = M(F, n)\ {}_f\!\sqcup CM(\mathbb{R}, n) = M_f / M(\mathbb{R}, n)$, unde M_f este cilindrul aplicației f. Spațiul obținut este un CW-complex (Teorema 3 § 1) avînd o celulă de dimensiune zero și celule de dimensiune n și $n+1$, ultimele fiind datorate conului $CM(\mathbb{R}, n)$ (vezi exerc. 1 § 1).

Dacă $n = 1$, fie $M(\pi, 1) = X_1 \cup X_2$, unde $X_1 = M(\pi, 1) \setminus M(\mathbb{R}, 1) \times \{1\}$, $X_2 = M(\pi, 1) \setminus M(\mathbb{R}, 1)$. Spațiul X_2 este contractibil iar $X_1 \cap X_2$ este omotop cu $M(\mathbb{R}, 1)$. Are loc atunci următorul șir exact (vezi exerc. 5),

$$0 \to \pi_1(X_1 \cap X_2) \to \pi_1(X_1) \to \pi_1(M(\pi, 1)) \to 0,$$

indus de aplicațiile de incluziuni. Rezultă că avem $\pi_1(M(\pi, 1)) \cong \pi_1(X_1)/\pi_1(X_1 \cap X_2) = F/\mathbb{R} \cong \pi$.

Dacă $n > 1$ și considerăm perechea $(M_f, M(\mathbb{R}, n))$, obținem șirul exact

$$\pi_n(M(\mathbb{R}, n)) \to \pi_n(M_f) \to \pi_n(M_f, M(\mathbb{R}, n)) \to 0.$$

Dar, M_f fiind echivalent omotopic cu $M(F, n)$ (Teorema 7 § 13 Cap. I), avem $\pi_n(M_f) \cong \pi_n(M(F, n)) \cong F$. Cum $\pi_n(M(\mathbb{R}, n)) \cong \mathbb{R}$, deducem că $\pi_n(M_f, M(\mathbb{R}, n)) \cong F/\mathbb{R} \cong \pi$. În sfîrșit, după exerc. 6, avem $\pi_n(M_f, M(\mathbb{R}, n)) \cong \pi_n(M_f/M(\mathbb{R}, n)) \cong \pi_n(M(\pi, n))$.

TEOREMA 2. *Fie n un întreg pozitiv și $\varphi: \pi \to \pi'$ un homomorfism de grupuri (abeliene dacă $n > 1$). Există atunci o aplicație continuă, $f: M(\pi, n) \to M(\pi', n)$, astfel încît $f_* = \varphi: \pi_n(M(\pi, n)) \to \pi_n(M(\pi', n))$.*

Demonstrație. Dacă grupurile sînt libere (abeliene dacă $n > 1$), se aplică Lema 2. Dacă aceste grupuri nu sînt libere, putem considera diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathbb{R} & \xrightarrow{\gamma} & F & \to & \pi & \to & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \\ 0 & \to & \mathbb{R}' & \xrightarrow{\gamma'} & F' & \to & \pi' & \to & 0 \end{array}$$

care conduce la diagrama comutativă de aplicații continue

$$\begin{array}{ccccc} M(\mathbb{R}, n) & \xrightarrow{f_\gamma} & M(F, n) & \longrightarrow & M(\pi, n) \\ \downarrow{\scriptstyle f_\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle f_\beta} & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ M(\mathbb{R}', n) & \xrightarrow{f_{\gamma'}} & M(F', n) & \longrightarrow & M(\pi', n) \end{array}$$

Aceasta se poate completa cu aplicația continuă

$$f: M(F, n)\ {}_{f_\gamma}\!\sqcup CM(\mathbb{R}, n) \to M(F', n)\ {}_{f_{\gamma'}}\!\sqcup CM(\mathbb{R}, n),$$

încît $f \mid M(F, n) = f_\beta$ și $f \mid CM(\mathbb{R}, n)$ este indusă de f_α. Din comutativitatea diagramei din dreapta și din unicitatea pînă la omotopie din Lema 2, rezultă $f_* = \varphi$.

LEMA 3. *Fie A un spațiu topologic și n un întreg pozitiv. Există atunci un CW-complex relativ (X, A) cu celule numai în dimensiunea $n+1$ și astfel încît $\pi_n(X) = 0$ și $\pi_r(X) \cong \pi_r(A)$, pentru $r < n$ (se citește bijecție dacă $r = 0$). X este un CW-complex dacă A este astfel.*

Demonstrație. Fie $f_j: S^n_j = S^n \to A$, încît $\{[f_j]\}$ să constituie o mulțime de generatori pentru grupul $\pi_n(A)$. Definim X ca fiind spațiul obținut din A prin atașarea de n-celule cu ajutorul aplicațiilor f_j (Def. 6 § 10 Cap. I și Teorema 3 § 1). Obținem un CW-complex relativ (X, A) și fie incluziunea $i: A \hookrightarrow X$. Avem atunci $i_*[f_j] = 0$ (deoarece $i \circ f_j$ are o extensie la D^{n+1}) și deci $i_*(\pi_n(A)) = 0$. Dar, prin c(n) din demonstrația Teoremei 1 § 3, avem $\pi_r(X, A) = 0$, pentru $r \leqslant n$. Considerînd șirul exact de omotopie al perechii (X, A), deducem că $\pi_r(X) \cong \pi_r(A)$, pentru $r < n$ și $\pi_n(X) = 0$.

TEOREMA 3*). *Dat un spațiu topologic X și un întreg pozitiv n, există un spațiu $X_{[n]}$ astfel încît:*

a) *$(X_{[n]}, X)$ este un CW-complex relativ, avînd toate celulele de dimensiune $\geqslant n+2$;*

b) *$\pi_r(X_{[n]}) = 0$ dacă $r > n$;*

c) *Considerînd incluziunea $i_n: X \hookrightarrow X_{[n]}$, homomorfismul indus $(i_n)_*: \pi_r(X) \to \pi_r(X_{[n]})$ este izomorfism pentru fiecare $r \leqslant n$;*

*) În l. engleză, *theorem for «killing homotopy groups»*.

d) *$X_{[n]}$ este un CW-complex dacă X este astfel.*

Demonstrație. Aplicînd repetat Lema 3, construim pentru $j \geqslant 1$ spațiul $X_{(j)}$, încît $\pi_{n+j}(X_{(j)}) = 0$ și $\pi_r(X_{(j)}) \cong \pi_r(X_{(j-1)})$, pentru $r < n + j$, perechea $(X_{(j)}, X_{(j-1)})$ fiind un CW-complex relativ și $X_{(-1)} = X$.

Fie $X_{[n]} = \bigcup\limits_j X_{(j)}$, cu topologia slabă (exerc. 11 § 10 Cap. I). Afirmația a) rezultă din Def. 4 § 1 și din Lema 3. Proprietatea b) are loc deoarece $\pi_r(X_{(j)}) = 0$, pentru $n < r \leqslant n + j$, iar după exerc. 9 § 4 Cap. II avem $\pi_r(X_{[n]}) \cong \varinjlim\limits_j \pi_r(X_{(j)})$. Afirmația c) rezultă din a), utilizînd c(n) din Teorema 1 § 3 și șirul exact de omotopie al perechii (X_n, X). În sfîrșit, d) are loc datorită Lemei 3 și Teoremei 3 § 1.

TEOREMA 4. *Fie n un întreg pozitiv și π un grup (abelian dacă $n > 1$). Există atunci un CW-complex $K(\pi, n)$.*

Demonstrație. Fie spațiul Moore $M(\pi, n)$ (Teorema 1). Definim $K(\pi, n) = M(\pi, n)_{[n]}$ (Teorema 3). Avem atunci $\pi_r(K(\pi, n)) = \pi_r(M(\pi, n)_{[n]}) = 0$, pentru $r > n$; $\pi_n(K(\pi, n)) = \pi_n(M(\pi, n)_{[n]}) \cong \pi_n(M(\pi, n)) \cong \pi$; $\pi_r(K(\pi, n)) \cong \pi_r(M(\pi, n)) = 0$ dacă $r < n$, deoarece se poate aplica Teorema 1 și afirmația c(n) din Teorema 1 § 3.

Vom arăta că spațiul $K(\pi, n)$ este unic pînă la omotopie. În acest scop, demonstrăm următorul rezultat.

LEMA 4. *Fie n un întreg pozitiv și $\varphi : \pi \to \pi'$ un homomorfism de grupuri (abeliene dacă $n > 1$). Există atunci o aplicație continuă, unică pînă la omotopie, $h : M(\pi, n) \to K(\pi', n)$, încît $h_* = \varphi : \pi_n(M(\pi, n)) \to \pi_n(K(\pi', n))$.*

Demonstrație. Vom construi o aplicație $g : M(\pi', n) \to K(\pi', n)$, pe care o vom compune cu aplicația f din Teorema 2. Deoarece $M(\pi', n)^n$ are numai o zero-celulă și în rest n-celule, avem $M(\pi', n)^n = \bigvee\limits_{j \in J} S_j^n$. Considerăm incluziunile $S_j^n = S^n \overset{q_j}{\hookrightarrow} M(\pi', n)^n \overset{q}{\hookrightarrow} M(\pi', n)$ și fie $\alpha_j = [qq_j] \in \pi_n(M(\pi', n)) \cong \pi'$. Avem însă și izomorfismul $\pi' \cong \pi_n(K(\pi', n))$ și fie $f_j : S_j^n \to K(\pi', n)$, încît $[f_j] = \alpha_j \in \pi_n(K(\pi', n))$. Definim $F : \bigvee\limits_{j \in J} S_j^n \to K(\pi', n)$, prin $F | S_j^n = f_j$. Avem $\operatorname{Ker} F_* = \operatorname{Ker} q_* \subset \pi_n(\bigvee\limits_{j \in J} S_j^n)$, deoarece $F_*([q_j]) = \alpha_j = q_*([q_j])$. Rezultă că pentru orice $(n+1)$-celulă e_k^{n+1} a lui $M(\pi', n)$, cu aplicația de atașare $f_k : S_k^n \to M(\pi', n)^n$, avem $[Ff_k] = F_*([f_k]) = 0$. Există deci o extensie F_k a lui F la e_k^{n+1} și deci o extensie $g : M(\pi', n) \to K(\pi', n)$ a lui F. Avem deci $g_* q_* = F_*$, cu q_* un epimorfism. Aceasta, împreună cu relația $\operatorname{Ker} F_* = \operatorname{Ker} q_*$, implică g_* monomorfism. Fiind evident și epimorfism, rezultă că g_* este un izomorfism. Aplicația $h = gf$ satisface condiția $h_* = \varphi$.

Fie acum $h_0, h_1 : M(\pi, n) \to K(\pi', n)$, încît $(h_0)_* = (h_1)_*$. Avem $[h_0 q_j] = (h_0)_*[qq_j] = (h_1)_*[qq_j] = [h_1 q_j]$, deci $h_0 | \bigvee\limits_{j \in J} S_j^n \simeq h_1 | \bigvee\limits_{j \in J} S_j^n$. Pentru a extinde această omotopie la $M(\pi, n) \times I$ considerăm diagrama

$$\begin{array}{ccc} M(\pi, n) \times I & \dashrightarrow & \\ \uparrow & \searrow & \\ M(\pi, n) \times \{0\} \cup \bigvee\limits_{j \in J} S_j^n \times I \cup M(\pi, n) \times \dot{I} & \longrightarrow & K(\pi, n) \end{array}$$

Deoarece celulele în $M(\pi, n) \times I \setminus \{M(\pi, n) \times \{0\} \cup \bigvee\limits_{j \in J} S_j^n \times I \cup M(\pi, n) \times \dot{I}\}$ au dimensiunea $n + 2$, putem aplica exerc. 6 § 1.

TEOREMA 5. *Fie n un număr natural și $\varphi : \pi \to \pi'$ un homomorfism de grupuri (abeliene dacă $n > 1$). Fie $K(\pi, n) = M(\pi, n)_{[n]}$ și $K(\pi', n)$ un spațiu Eilenberg-Mac Lane arbitrar. Există atunci o aplicație continuă $f : K(\pi, n) \to K(\pi', n)$, încît $f_* = \varphi$ și f este unică pînă la omotopie.*

Demonstrație. După Lema 4, putem construi aplicația continuă $f' : M(\pi, n) \to K(\pi', n)$. Apoi, după exerc. 6 § 1, aceasta se poate extinde la o aplicație $f : K(\pi, n) \to K(\pi', n)$, care satisface $f_* = \varphi$. Pentru a dovedi unicitatea, fie $f_1, f_2 : K(\pi, n) \to K(\pi', n)$, încît $(f_1)_* = (f_2)_*$. Atunci $(f_1 | M(\pi, n))_* \simeq (f_2 | M(\pi', n))_*$ și, prin Lema 4, rezultă $f_1 | M(\pi, n) \simeq f_2 | M(\pi', n)$. Aplicînd din nou exerc. 6 § 1, omotopia acestor aplicații se poate extinde la $K(\pi, n) \times I$.

COROLARUL 1. *Oricare două CW-complexe de tip (π, n) sînt echivalente omotopic.*

Demonstrație. După Teorema 5, aplicată homomorfismului $\varphi = 1_\pi$, orice CW-complex de tip (π, n) este echivalent omotopic cu $M(\pi, n)_{[n]}$.

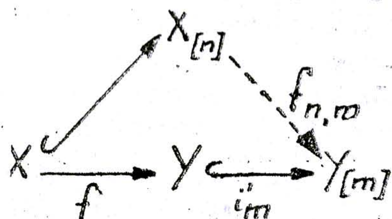
COROLAR 2. *Date grupurile* π_n, $n \geq 1$, *abeliene pentru* $n \geq 2$, *există un spațiu liniar conex* X, *astfel încît* $\pi_n(X) \cong \pi_n$, $n \geq 1$.

Demonstrație. Putem lua $X = \prod_{r \geq 1} K(\pi_r, r)$. Aplicînd Teorema 2 § 4, Cap. II, avem $\pi_n(X, x_0) \cong \prod_{r \geq 1} \pi_n(K(\pi_r, r), *) = \pi_n(K(\pi_n, n), *) \cong \pi_n$, $n \geq 1$.

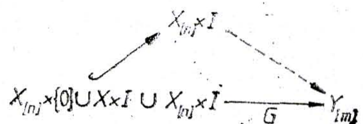
OBSERVAȚIA 2. Corolarul 2 poate fi întărit, în sensul că se pot prescrie niște acțiuni ale grupului π_1 asupra grupurilor π_q, $q \geq 1$ (coincizînd cu conjugarea pentru $q = 1$) și în acest caz odată cu X există niște izomorfisme $\varphi_q : \pi_q(X, x_0) \to \pi_q$, $q \geq 1$, astfel încît, pentru $[\alpha] \in \pi_1(X, x_0)$ și $[f] \in \pi_q(X, x_0)$, să aibă loc relația $\varphi_q(h_{[\alpha]}[f]) = \varphi_1[\alpha] \cdot \varphi_q[f]$ („·" marcînd acțiunea la dreapta a grupului π_1 asupra grupului π_q). Pentru demonstrația acestui rezultat se poate consulta [56].

TEOREMA 6. *Fie* $f : X \to Y$ *o aplicație continuă și* $i_n : X \hookrightarrow X_{[n]}$, $i'_m : Y \hookrightarrow Y_{[m]}$ *incluziunile din* Teorema 3, *cu* $m \leq n$. *Există atunci o aplicație* $f_{n,m} : X_{[n]} \to Y_{[m]}$ *unică pînă la omotopie, astfel încît* $f_{n,m} i_n = i'_m f$.

Demonstrație. Aplicăm exerc. 6 § 1 diagramei următoare

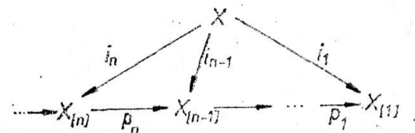


rezultă că există $f_{n,m}$ făcînd diagrama comutativă. Dacă $f'_{n,m}$ este o a doua aplicație cu aceeași proprietate, atunci considerăm diagrama



unde $G(x, 0) = f_{n,m}(x)$, $G(x, 1) = f'_{n,m}(x)$, $\forall x \in X_{[n]}$ și $G(x, t) = i'_m(f(x))$, $\forall x \in X$. Aplicînd iarăși exerc. 6 § 1 acestei diagrame, obținem o omotopie a aplicațiilor $f_{n,m}$ și $f'_{n,m}$.

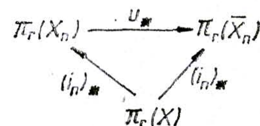
DEFINIȚIA 2. CW-complexul $X_{[n]}$ este numit *n-secțiune Postnikov a spațiului* X. Un sistem de n-secțiuni Postnikov formează un *sistem*, sau un *turn*, sau o *descompunere Postnikov a spațiului* X.



Aplicațiile $p_n : X_{[n]} \to X_{[n-1]}$, din diagrama de mai sus, sînt construite aplicînd Teorema 6 identității $f = 1_X$ și luînd $m = n - 1$.

TEOREMA 7. *Fie* X *un spațiu topologic conex și fie* $X_{[n]}$, $\bar{X}_{[n]}$ *două spații satisfăcînd concluziile* Teoremei 3. *Există atunci o echivalență omotopică slabă* $u : X_{[n]} \to \bar{X}_{[n]}$.

Demonstrație. După Teorema 6, există aplicația u care extinde pe 1_X. Pentru această aplicație și orice r, are loc diagrama comutativă din stînga. Concluzia teoremei are loc în baza condițiilor b) și c) din Teorema 3.

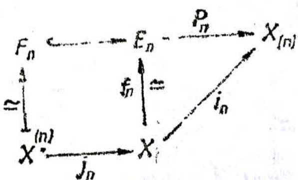


Din Teoremele 7, 3 d) și teorema lui Whitehead obținem rezultatul următor.

COROLAR 3. *Dacă* X *este un* CW-*complex, conex, atunci oricare două* n-*secțiuni Postnikov sînt echivalente omotopic.*

Vom completa acum Teorema 3 cu o altă teoremă de „omorîre" a grupurilor de omotopie.

Fie X un spațiu topologic și $i_n : X \hookrightarrow X_{[n]}$ o n-secțiune Postnikov. După Propoziția 1 § 7 Cap. II există o fibrare Hurewicz $P : L_{i_n} \to X_{[n]}$, pe care o vom nota aici $P_n : E_n \to X_{[n]}$ și fie F_n fibra acesteia (într-un punct). Spațiile X și E_n sînt echivalente omotopic*). Există atunci un subspațiu $X^{(n)}$ al lui X, încît diagrama din dreapta este comutativă, f_n fiind o echivalență omotopică.



TEOREMA 8. $(j_n)_* : \pi_r(X^{(n)}) \to \pi_r(X)$ *este izomorfism dacă* $r > n$ *și* $\pi_r(X^{(n)}) = 0$ *dacă* $r \leq n$.

Demonstrație. Din șirul exact de omotopie al fibrării P_n și din Teorema 3, deducem $\pi_r(F_n) \cong \pi_r(E_n)$, pentru $r > n$ și $\pi_r(F_n) = 0$, pentru $r \leq n$. Afirmația teoremei rezultă acum din echivalența omoto-

*) Arătați aceasta.

pică f_n și din faptul că aceasta induce echivalența omotopică a spațiilor $X^{(n)}$ și F_n.

TEOREMA 9. *Fie $f: X \to Y$ o aplicație continuă și X un CW-complex n-dimensional. Atunci, aplicația f este nul omotopă dacă și numai dacă este nul omotopă aplicația $i_n f: X \to Y \to Y_{[n]}$ (adică dacă f este n-nul omotopă).*

Demonstrație. Necesitatea este evidentă. Reciproc, fie $H: i_n f \simeq 0$. Utilizînd HLP pentru diagrama din stînga,

$$\begin{array}{ccc} E_n & \xrightarrow{P_n} & Y_{[n]} \\ \uparrow{\scriptstyle f_n f} & & \uparrow{\scriptstyle H} \\ X & & X \times I \end{array}$$

există $G: X \times I \to E_n$, încît $G(x, 0) = f_n f(x)$ și $P_n G = H$. Pentru $G_1: X \to E_n$, avem $P_n G_1 = H_1 = 0$, deci $G_1: X \to F_n$ și, ținînd seama că F_n este echivalent omotopic cu $Y^{(n)}$, obținem o aplicație $\tilde{f}: X \to Y^{(n)}$. Deoarece $G_1 \simeq f_n f$, rezultă $f_n^{-1} G_1 \simeq f$ și deci $j_n \tilde{f} \simeq f$. Considerînd apoi diagrama din dreapta și ținînd seama că $CX \setminus X$ are celule numai în dimensiuni $\leqslant n+1$ și că $\pi_r(Y^{(n)}) = 0$, dacă $r \leqslant n$, rezultă din exerc. 6 § 1 că există o extensie a aplicației $\tilde{f}$ la CX.

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\tilde{f}} & Y^{(n)} \\ \downarrow & \nearrow & \\ CX & & \end{array}$$

Prin urmare, $\tilde{f}$ este nul omotopă și, utilizînd echivalența $f \simeq j_n \tilde{f}$, deducem că f este nul omotopă.

OBSERVAȚIA 3. Dacă X este un CW-complex infinit dimensional, pot exista *aplicații fantomă*, $f: X \to Y$, care să fie n-nul omotope, pentru orice n, dar care să nu fie nul omotope. Condiții ca o aplicație să fie n-nul omotopă sînt date în cadrul *teoriei obstrucției* *).

EXERCIȚII

1. Fie $0 \to \pi \xrightarrow{\varphi} \rho \xrightarrow{\psi} \sigma \to 0$ un șir scurt exact de grupuri abeliene. Se construiesc aplicațiile $K(\pi, n) \xrightarrow{f} K(\rho, n) \xrightarrow{g} K(\sigma, n)$, ca în Teorema 5. Să se arate că acest șir este echivalent omotopic cu un șir fibrat, adică există diagrama omotopic comutativă de mai jos.

$$\begin{array}{ccccc} F_g & \dashrightarrow & L_g & \xrightarrow{P} & K(\sigma, n) \\ \uparrow{\scriptstyle \simeq} & & \uparrow{\scriptstyle \simeq} & \nearrow{\scriptstyle g} & \\ K(\pi, n) & \xrightarrow{f} & K(\rho, n) & & \end{array}$$

2. Să se arate că spațiul $K(\pi, n)$ este un H-spațiu dacă și numai dacă π este un grup abelian.

3. Să se arate că $P\mathbb{R}^2$ este un spațiu Moore, $M(\mathbb{Z}_2, 1)$.

4. Dacă se consideră o descompunere Postnikov ca în Def. 2, putem înlocui inductiv, folosind Prop. 1 § 7 Cap. II, fiecare aplicație p_n printr-o fibrare $p'_n: E_{[n]} \to E_{[n-1]}$. Se obține

*) Pentru aceste chestiuni se poate consulta [19].

astfel un sistem proiectiv $\{E_{[n]}, p'_m \circ \ldots \circ p'_n \mid m \leqslant n\}$. Să se arate că există o echivalență omotopică slabă $i': X \to \varprojlim_n E_{[n]}$.

Indicație. Aplicațiile i_n din Def. 2 definesc aplicațiile $i'_n: X \to E_{[n]}$ care induc aplicația cerută i'. Se mai ține seama de izomorfismele $\pi_r(\varprojlim_n E_{[n]}) \cong \varprojlim_n \{\pi_r(E_n)\}$.

5. Fie X liniar conex, $X = \operatorname{Int} X_1 \cup \operatorname{Int} X_2$ și $X_1 \cap X_2$ liniar conex. Să se arate că dacă X_2 este contractibil, atunci are loc șirul exact $0 \to \pi_1(X_1 \cap X_2) \to \pi_1(X_1) \to \pi_1(X) \to 0$, indus de incluziuni.

Indicație. Afirmația poate fi considerată un caz particular al Teoremei Van Kampen-Seifert (vezi, de exemplu, [39, p. 308]). Este simplă însă și o demonstrație directă.

6. Cu notațiile din demonstrația Teoremei 1, să se arate că $\pi_n(M_f, M(\mathbb{R}, n)) \cong \pi_n(M_f/M(\mathbb{R}, n))$.

Soluție. Considerăm conul $CM(\mathbb{R}, n)$. Acesta fiind contractibil, rezultă din exactitatea șirului de omotopie al perechii $(M_f \cup CM(\mathbb{R}, n), CM(\mathbb{R}, n))$, că are loc izomorfismul $\pi_n(M_f \cup CM(\mathbb{R}, n), CM(\mathbb{R}, n)) \cong \pi_n(M_f \cup CM(\mathbb{R}, n))$. Apoi, este ușor de văzut că $M_f \cup M(\mathbb{R}, n) \times I$ este retractă tare de deformare a lui $M_f \times I$. Rezultă că $M_f \cup CM(\mathbb{R}, n)$ este retractă tare de deformare a lui $M_f \times I/M(\mathbb{R}, n) \times \{1\}$. În sfîrșit, $M_f \times \{1\}/M(\mathbb{R}, n) \times \{1\}$ este retractă tare de deformare a lui $M_f \times I/M(\mathbb{R}, n) \times \{1\}$, prin $D: M_f \times I/M(\mathbb{R}, n) \times \{1\} \times I \to M_f \times I/M(\mathbb{R}, n) \times \{1\}$, definită ca $D(\overline{(x, t)}, t') = \overline{(x, t + (1-t')(1-t))}$. Astfel, $M_f/M(\mathbb{R}, n)$, care este homeomorf cu $M_f \times \{1\}/M(\mathbb{R}, n) \times \{1\}$, este echivalent omotopic cu $M_f \cup CM(\mathbb{R}, n)$. Rezultă izomorfismul $\pi_n(M_f \cup CM(\mathbb{R}, n), CM(\mathbb{R}, n)) \cong \pi_n(M_f/M(\mathbb{R}, n))$.

Considerăm acum incluziunea $i: (M_f, M(\mathbb{R}, n)) \hookrightarrow (M_f \cup CM(\mathbb{R}, n), CM(\mathbb{R}, n))$ și homomorfismul indus de aceasta $i_*: \pi_n(M_f, M(\mathbb{R}, n)) \to \pi_n(M_f \cup CM(\mathbb{R}, n), CM(\mathbb{R}, n))$. Homomorfismul i_* este epimorfism, deoarece, pentru $[f] \in \pi_n(M_f \cup CM(\mathbb{R}, n), CM(\mathbb{R}, n))$, obținem, prin proiecția din vîrful conului $CM(\mathbb{R}, n)$, $[f'] \in \pi_n(M_f, M(\mathbb{R}, n))$, încît $i_*[f'] = [f]$. Dacă $F: f \simeq e_{x_0}$ în $(M_f \cup CM(\mathbb{R}, n), CM(\mathbb{R}, n), x_0)$, atunci utilizînd proiecția precedentă și HEP, se poate construi o omotopie $F': f \simeq e_{x_0}$ în $(M_f, M(\mathbb{R}, n), x_0)$. Prin urmare, $\pi_n(M_f, M(\mathbb{R}, n)) \cong \pi_n(M_f \cup CM(\mathbb{R}, n), CM(\mathbb{R}, n))$ și rezumînd deducem izomorfismul $\pi(M_f, M(\mathbb{R}, n)) \cong \pi_n(M_f/M(\mathbb{R}, n))$ *).

§ 5. Complexe simpliciale și poliedre

Considerăm spațiul vectorial normat $\mathbb{R}^m$, cu m suficient de mare.

DEFINIȚIA 1. O mulțime $\mathscr{A} = \{v^0, v^1, \ldots, v^k\}$, formată din $k+1$ puncte din $\mathbb{R}^m$, se numește *independentă*

*) Pentru unele detalii și generalizarea rezultatului, se poate consulta [19, p. 144].

sau *afin independentă* (prescurtat *a-independentă*) dacă vectorii $v^1 - v^0$, $v^2 - v^0$, $\ldots$, $v^k - v^0$ sînt liniar independenţi.

Demonstraţia următoarei leme o lăsăm cititorului.

LEMA 1. *Mulţimea* $\mathscr{A} = \{v^0, v^1, \ldots, v^k\}$ *este a-independentă dacă şi numai dacă relaţiile* $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i v^i = 0$, $\sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 0$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$, *implică* $\lambda_0 = \lambda_1 = \ldots = \lambda_k = 0$. *Deci, definiţia a-independenţei nu depinde de ordinea punctelor mulţimii* $\mathscr{A}$.

EXEMPLUL 1. $\mathscr{A} = \{v^0, v^1, \ldots, v^k\}$ este a-independentă dacă şi numai dacă nu există nici un subspaţiu afin k-dimensional care să conţină punctele mulţimii $\mathscr{A}$. Astfel, două puncte distincte, trei puncte necoliniare etc. sînt a-independente.

DEFINIŢIA 2. Fie $\mathscr{A} = \{v^0, v^1, \ldots, v^k\}$, a-independentă. *k-simplexul geometric generat de* $\mathscr{A}$ sau, *cu vîrfurile* $v^0, v^1, \ldots, v^k$, este subspaţiul lui $\mathbb{R}^m$

$$\sigma_k = \left\{x = \sum_{i=0}^{k} \lambda_i v^i \mid \lambda_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} \lambda_i = 1\right\}.$$

Vom nota $\sigma_k = [v^0, v^1, \ldots, v^k]$. Mulţimea (σ_k)*) $= (v^0, v^1, \ldots, v^k) = \{x \in \sigma_k \mid \lambda_i > 0, \forall i = 0, 1, \ldots, k\}$ se numeşte *simplexul geometric deschis generat de* $\mathscr{A}$. Avem $(v^0) = [v^0]$.

Numerele reale $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$, unic determinate **), se numesc *coordonatele baricentrice ale lui* x *în* σ_k.

O *faţă* a simplexului σ_k este un simplex generat de o submulţime a mulţimii $\mathscr{A}$. Reuniunea feţelor proprii constituie *frontiera simplexului*, $\partial\sigma_k$.

Dacă τ este faţă a simplexului σ, vom scrie $\tau < \sigma$ sau $\sigma > \tau$.

EXEMPLUL 2. *Simplexul standard k-dimensional*, Δ^k, este simplexul cu vîrfurile în punctele $A^0 = (1, 0, \ldots, 0)$, $A^1 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $A^k = (0, \ldots, 0, 1)$ din

---

*) notată şi $\mathring{\sigma}_k$.

**) Motivaţi aceasta.

$\mathbb{R}^{k+1}$, deci

$$\Delta^k = \left\{A = (t_0, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^{k+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^{k} t_i = 1\right\}.$$

LEMA 2. *Orice k-simplex este homeomorf cu k-simplexul standard* Δ^k.

Demonstraţie. Fie $\sigma_k = [v^0, v^1, \ldots, v^k]$. Definim

$$f : \Delta^k \to \sigma_k,\ f((t_0, \ldots, t_k)) = \sum_{i=0}^{k} t_i v^i.$$

Aceasta este o bijecţie continuă, cum se poate constata imediat, ţinînd seama că, coordonatele baricentrice ale unui punct, într-un simplex dat, sînt funcţii continue de coordonate carteziene ale punctului.

COROLAR 1. *Pentru orice k-simplex* σ_k *există un homeomorfism* $g : (\sigma_k, \partial\sigma_k) \to (D^k, S^{k-1})$.

Demonstraţie. În baza Lemei 2, este suficient să se ia $\sigma_k = \Delta^k$. Or, dacă se ia discul circumscris lui Δ^k, $D\left(\hat{\sigma}_k, \sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)$, unde $\hat{\sigma}_k = \left(\frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{k+1}\right)$ este *baricentrul* lui σ_k, atunci rezultă uşor homeomorfismul perechilor $(\sigma_k, \partial\sigma_k)$ şi $\left(D\left(\hat{\sigma}_k, \sqrt{\frac{k}{k+1}}\right), S\left(\hat{\sigma}_k, \sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)\right)$, deci şi cu perechea standard (D^k, S^{k-1}).

DEFINIŢIA 3. Un *complex simplicial geometric*, K, este o mulţime finită de simplexe, toate situate într-un spaţiu $\mathbb{R}^m$ şi satisfăcînd condiţiile:

a) Dacă $\sigma \in K$ şi $\tau < \sigma \Rightarrow \tau \in K$;

b) Dacă $\sigma, \tau \in K$, atunci $\sigma \cap \tau = \emptyset$ sau $\sigma \cap \tau$ este faţă comună pentru σ şi τ.

Dimensiunea lui K, dim K, este maximumul dimensiunilor simplexelor sale.

Un *subcomplex L* al lui K este o submulţime de simplexe ale lui K, satisfăcînd a) şi b).

Scheletul de dimensiune $r \geq 0$ este submulţimea K^r a simplexelor de dimensiune cel mult r ale lui K.

O *pereche simplicială*, (K, L), constă dintr-un complex simplicial şi un subcomplex al său.

Mulţimea punctelor din $\mathbb{R}^m$ situate în cel puţin unul din simplexele lui K, cu structura de subspaţiu al lui $\mathbb{R}^m$, se notează prin $|K|$ şi se numeşte *poliedrul lui K*. Dacă L este un subcomplex al lui K, atunci $|L|$ se numeşte *subpoliedru al lui* $|K|$.

EXEMPLUL 3. Pentru un simplex σ_n, mulţimea feţelor sale formează un complex simplicial geometric $K(\sigma_n)$, pentru care $|K(\sigma_n)| = \sigma_n$, iar mulţimea feţelor proprii formează un subcomplex $\dot{\sigma}_n$ al lui $K(\sigma_n)$.

OBSERVAŢII. 1. K fiind un complex simplicial, $|K|$ este un subspaţiu compact al lui $\mathbb{R}^m$.

2. Fiecare punct $x \in |K|$ este situat în interiorul*) unui simplex şi al unuia singur, notat carrier x (în l. română, aproximativ, *purtătorul lui* x).

3. Un subcomplex L al unui complex simplicial K este el însuşi un complex simplicial.

4. Reuniunea şi intersecţia a două subcomplexe sînt de asemenea subcomplexe**).

DEFINIŢIA 4. Date complexele simpliciale K şi L, o *aplicaţie simplicială* $f : |K| \to |L|$ este o funcţie cu următoarele proprietăţi :

i) Dacă v este un vîrf al lui K, atunci $f(v)$ este un vîrf al lui L ;

ii) Dacă $[v^0, v^1, \ldots, v^n]$ este un simplex al lui K, atunci $f(v^0), f(v^1), \ldots, f(v^n)$ sînt vîrfuri ale aceluiaşi simplex din L, nu neapărat de dimensiune n ;

iii) Dacă $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v^i \in [v^0, \ldots, v^n]$, atunci $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f(v^i)$, adică, f este „liniară'' pe orice simplex.

O *aplicaţie simplicială, de perechi simpliciale*, $f : (|K|, |L|) \to (|M|, |N|)$, este o aplicaţie simplicială $f : |K| \to |N|$, pentru care $f(|L|) \subset |N|$.

OBSERVAŢIA 5. *Compunerea a două aplicaţii simpliciale este o aplicaţie simplicială.*

DEFINIŢIA 5. Dat un spaţiu topologic X, o *triangulare* a lui X constă dintr-un complex simplicial K, împreună cu un homeomorfism $h : |K| \to X$.

---

*) Dacă dim $\sigma = 0$, atunci interiorul lui σ este σ.

**) Demonstraţi aceste proprietăţi.

Un spaţiu cu o triangulare se numeşte *spaţiu triangulat* ; o să-i mai spunem şi *poliedru*.

Lăsăm cititorului definiţia *perechilor triangulabile*.

Dăm în continuare cîteva exemple de spaţii triangulabile.

EXEMPLE. 4. *Perechea* (D^n, S^{n-1}). Conform exerc. 4 § 5 Cap. I, această pereche este homeomorfă cu perechea $(\bar{D}^n, \bar{S}^{n-1})$, unde $\bar{D}^n = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=0}^{n} |x_i| \leq 1\right\}$,

$$\bar{S}^{n-1} = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1\right\}.$$

Putem considera următoarea triangulare pentru $(\bar{D}_n, \bar{S}^{n-1})$. Fie

$$A^0 = (0, \ldots, 0), A^i = (0, \ldots, \underset{i}{1}, 0, \ldots, 0), A'^i =$$

$$= (0, \ldots, \underset{i}{-1}, 0, \ldots, 0), i = 1, \ldots, n.$$

Fie K acel complex simplicial ce are aceste vîrfuri şi simplexele $[B^{i_0}, \ldots, B^{i_r}]$, unde $i_0 < i_1 < \ldots < i_r$ şi B^{i_s} este sau A^{i_s} sau A'^{i_s}. Dacă L este mulţimea simplexelor ce nu conţin A^0, atunci $(|K|, |L|) = (\bar{D}^n, \bar{S}^{n-1})$; vezi fig. 39, cazul $n = 2$.

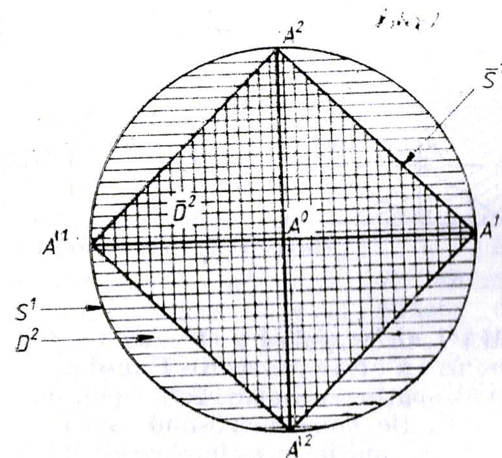


Fig. 39

5. *Banda lui Möbius.* Considerăm $M = I^2/m$, ca în Prop. 3 § 11 Cap. I. Atunci, o triangulare este cea din fig. 40.

6. *Torul.* Fie $T^2 = I^2/\rho$, ca în Prop. 2 § 11 Cap. I. O triangulare este cea din fig. 41.

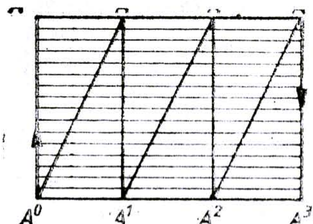


Fig. 40

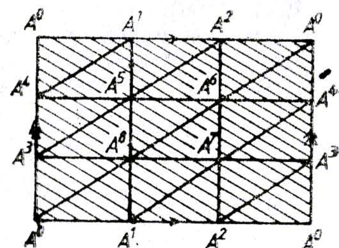


Fig. 41

7. *Trompeta lui Klein*, $K = I^2/k$ (Prop. 4 § 11 Cap. I) are triangularea din fig. 42.

8. *Planul proiectiv real* $P\mathbb{R}^2$. Considerăm $P\mathbb{R}^2 = D^2/p$, ca în Prop. 11 c) § 11, Cap. I. Se poate considera atunci triangularea din fig. 43.

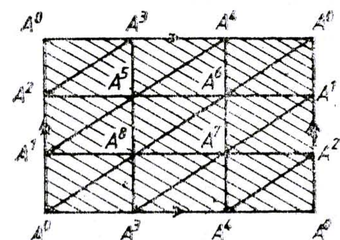


Fig. 42

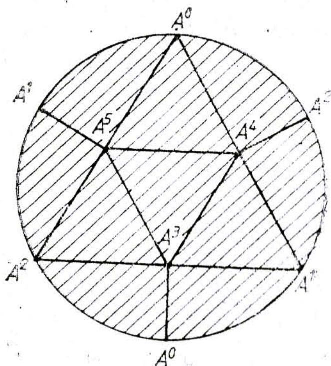


Fig. 43

TEOREMA 1. *Orice poliedru* $|K|$ *este un CW-complex.*

Demonstrație. $|K|$ este un spațiu Hausdorff, fiind subspațiu al unui spațiu euclidian $\mathbb{R}^m$. Apoi, pentru orice n-simplex $\sigma \in K$, fie homeomorfismul $\varphi^n_\sigma : D^n \to \sigma$ (Cor. 1). Luînd drept J_n mulțimea n-simplexelor lui K, se verifică imediat condițiile Def. 1 § 1.

COROLAR 2. *O submulțime* $F \subset |K|$ *este închisă dacă și numai dacă* $F \cap \sigma$ *este închisă în* σ, *pentru orice simplex* σ *al lui* K.

Demonstrație. Se aplică Teorema 1 și Obs. 2 § 1, ținînd seama că celulele CW-complexului $|K|$ sînt simplexele lui K.

COROLAR 3. *Orice aplicație simplicială* $f : |K| \to |L|$ *este continuă.*

Demonstrație. Fie F închisă în $|L|$. Fie σ un simplex al lui K. Atunci, $f^{-1}(F) \cap \sigma = (f|\sigma)^{-1}(F)$ este închisă în σ deoarece $f|\sigma$, fiind liniară, este evident continuă. După Corolarul 2, $f^{-1}(F)$ este închisă în $|K|$.

COROLARUL 4. *Fie* (K, L) *o pereche simplicială. Atunci, perechea poliedrală* $(|K|, |L|)$ *are* HEP.

Demonstrație. Din Teorema 1, rezultă ușor că perechea $(|K|, |L|)$ este un CW-complex relativ. Se aplică Teorema 1 § 2.

DEFINIȚIA 6. Un *complex simplicial abstract* $\mathscr{K}$ este o mulțime finită de elemente $a^0, a^1, \ldots$, numite *vîrfuri (abstracte)*, împreună cu o familie de părți $[a^{i_0}, \ldots, a^{i_n}]$*), numite *n-simplexe (abstracte)*, cu proprietatea că orice submulțime a unui simplex este un simplex.

O *realizare* a unui complex simplicial abstract $\mathscr{K}$ este un complex geometric K împreună cu o corespondență biunivocă între vîrfurile celor două complexe, astfel încît o submulțime a lui $\mathscr{K}$ este simplex dacă și numai dacă vîrfurile corespunzătoare subîntind un simplex în K.

TEOREMA 2. a) *Orice complex simplicial abstract* $\mathscr{K}$, *n-dimensional, are o realizare în* $\mathbb{R}^{2n+1}$.

b) K_1 *și* K_2 *fiind două realizări arbitrare ale lui* $\mathscr{K}$, *există un homeomorfism simplicial* $f : |K_1| \to |K_2|$.

Demonstrație. a) Fie $a^0, a^1, \ldots, a^m$ vîrfurile lui $\mathscr{K}$. Considerăm următoarele $(m + 1)$ puncte din $\mathbb{R}^{2n+1}$, $v^r = (r, r^2, \ldots, r^{2n+1})$, $0 \leqslant r \leqslant m$. Din acestea, orice mulțime cu $\leqslant (2n + 2)$ elemente este a-independentă **). Stabilim acum corespondența $a^r \leftrightarrow v^r$ și definim simple-

---

*) Este o notație pentru mulțimea $\{a^{i_0}, \ldots, a^{i_n}\}$.

**) Demonstrați aceasta.

xele cu vîrfurile $v^0, \ldots, v^m$ corespunzătoare simplexelor lui $\mathscr{K}$. Se verifică imediat condiția a) din Def. 3.

Fie σ_p și τ_q două simplexe construite în $\mathbb{R}^{2n+1}$. Presupunem că acestea au în comun r vîrfuri. Deci σ_p împreună cu τ_q conțin $p+q-r+2 \leqslant 2n-r+2 \leqslant \leqslant 2n+2$ vîrfuri distincte. Acestea sînt a-independente și σ_p, τ_q sînt fețe ale unui simplex cu $(p+q-r+2)$ vîrfuri. Atunci, $\sigma_p \cap \tau_q$ este față a acestuia și deci față comună pentru σ_p și τ_q.

b) Fie vîrfurile lui K_1, $v^0, v^1, \ldots, v^m$ și cele ale lui K_2, $w^0, w^1, \ldots, w^m$, încît, prin intermediul vîrfurilor lui $\mathscr{K}$, acestea se corespund. Atunci, $[v^{i_0}, \ldots, v^{i_n}]$ este un simplex în K_1 dacă și numai dacă $[w^{i_0}, \ldots, w^{i_n}]$ este un simplex din K_2. Definim $f : |K_1| \to |K_2|$, încît $f(v^i) = w^i$ și o extindem pe simplexe prin liniaritate.

DEFINIȚIA 7. Fie K și L două complexe simpliciale geometrice și fie $\mathscr{K}$, $\mathscr{L}$ *abstractizările* acestora, cu vîrfurile respectiv $a^0, a^1, \ldots$ și $b^0, b^1 \ldots$ *Uniunea**) $\mathscr{K}*\mathscr{L}$ este definită ca fiind complexul simplicial abstract ale cărui simplexe sînt toate submulțimile $[a^{i_0}, a^{i_1}, \ldots, a^{i_p}, b^{i_0}, \ldots \ldots, b^{i_q}]$, încît $[a^{i_0}, \ldots a^{i_p}]$ este un simplex în $\mathscr{K}$ iar $[b^{i_0}, \ldots, b^{i_q}]$ este un simplex în $\mathscr{L}$. Orice realizare a lui $\mathscr{K}*\mathscr{L}$ este numită *uniunea* $K*L$ iar poliedrul $|K*L|$ este *uniunea poliedrelor* $|K|$ și $|L|$ și este notat $|K|*|L|$.

DEFINIȚIA 8. Un spațiu Hausdorff X se numește *spațiu* (*infinit*) *triangulabil* dacă pentru orice $n \geqslant 0$ este dată cîte o mulțime de indici J_n, cîte un n-simplex σ_n și niște aplicații $\Phi^n_j : \sigma_n \to X$, cîte una pentru oricare $j \in J_n$, cu proprietățile următoare:

i) $X = \bigcup\limits_{\substack{n \geqslant 0 \\ j \in J_n}} \Phi^n_j(\sigma_n)$;

ii) Φ^n_j sînt injective, $\Phi^n_j(\sigma_n)$ este un *n-simplex închis al lui* X;

iii) Dată o față τ_m a lui σ_n, există un homeomorfism simplicial $\psi_\tau : \sigma_m \to \tau_m$, încît, dat $j \in J_n$, există $k \in J_m$ cu $\Phi^m_k = (\Phi^n_j | \tau_m)\psi_\tau$ *);

iv) $\Phi^n_j(\sigma_n) \cap \Phi^m_k(\sigma_m)$ este fie mulțimea vidă, fie $\Phi^p_l(\sigma_p)$, pentru $p \geqslant 0$ și $l \in J_p$. În cel de-al doilea caz există fețele τ a lui σ_n și μ a lui σ_m, încît $\Phi^p_l = \Phi^n_j\psi_\tau = \Phi^m_k\psi_\mu$;

v) O submulțime F a lui K este închisă dacă și numai dacă $(\Phi^n_j)^{-1}(F)$ este închisă în σ_n, pentru orice n și oricare $j \in J_n$.

Un *subspațiu triangulabil* al lui X este o reuniune de simplexe închise.

OBSERVAȚIA 6. Topologia definită prin condiția v) pe X este numită *topologia Whitehead*. Pe X se mai consideră așa-numita *topologie metrică*. Pentru definirea acesteia, să considerăm vîrfurile $\{\sigma^j_0 | j \in J_0\}$ ale spațiului triangulabil X.

Un punct $x \in X$ poate fi dat prin „coordonatele sale baricentrice" $\{\lambda_j | j \in J_0\}$, satisfăcînd condițiile: a) $0 \leqslant \leqslant \lambda_j \leqslant 1$; b) $\lambda_j = 0$, cu excepția unei mulțimi finite de indici j; c) $\sum\limits_j \lambda_j = 1$. Vom scrie $x = \sum \lambda_j v^j_0$. Dacă avem și $y = \sum \mu_j v^j_0$, se definește metrica $d(x, y) = [\sum\limits_j(\lambda_j - \mu_j)^2]^{1/2}$. Topologia definită de aceasta este *topologia metrică* a spațiului triangulabil X.

Dacă X este local finit (starul oricărui vîrf este finit (vezi § 6)), atunci cele două topologii ale lui X, coincid.

TEOREMA 3. a) *Orice spațiu homeomorf cu un poliedru este un spațiu triangulabil.*

b) *Orice spațiu* (*infinit*) *triangulabil este un* CW-*complex.*

Demonstrație. a) Fie X homeomorf cu poliedrul $|K|$, prin homeomorfismul $h : |K| \to X$. Pentru $n \geqslant 0$, fie J_n mulțimea n-simplexelor lui K și σ_n un n-simplex fixat, de exemplu Δ^n. Dacă $j = \sigma'_n \in J_n$, fie $f_n : \sigma_n \to \sigma'_n$ un homeomorfism liniar (Lema 2). Definim $\Phi^n_j : \sigma_n \to X$, ca fiind compunerea $\sigma_n \xrightarrow{f_n} \sigma'_n \xrightarrow{i} |K| \xrightarrow{h} K$, unde i este incluziunea. Proprietățile i) și ii) din Def. 8 se verifică în mod evident. Dacă τ_m este o față a lui σ_n, luăm $\psi_\tau : \sigma_m \to \tau_m$, un homeomorfism simplicial. Atunci, pentru $j = \sigma'_n \in J_n$, luăm $k = \sigma'_m = f_n(\tau_m)$, care este față a lui σ'_n și deci simplex în K. Rezultă imediat iii). Condiția iv) se

*) În l. engleză, *join*.

*) Vom scrie $\Phi^m_k = \Phi^n_j\psi_\tau$.

verifică deoarece dacă $\sigma'_m, \sigma'_n \in K$, atunci intersecția $\sigma'_m \cap \sigma'_n$ este fie vidă, fie o față comună. În sfîrșit, v) rezultă din Cor. 2.

b) Fie X un spațiu (infinit) triangulabil. Acesta este un spațiu Hausdorff și pentru fiecare $n \geq 0$, considerăm mulțimea J_n din Def. 8. Pentru n-simplexul σ_n, fie un homeomorfism $h_n : (D^n, S^{n-1}) \to (\sigma_n, |\dot{\sigma}_n|)$. Pentru orice $j \in J_n$, considerăm aplicația $\varphi^n_j : D^n \to X$, ca fiind compunerea $\varphi^n_j = \Phi^n_j \circ h_n$. Acestea sînt aplicațiile caracteristice pentru X, verificînd Def. 1 § 1.

OBSERVAȚIA 7. Cu totul analog definirii complexelor simpliciale abstracte (Def. 6), se pot defini *complexele simpliciale abstracte infinite.*

EXEMPLUL 9. Fie X un spațiu topologic și $\mathscr{D} = \{D_i\}$ o acoperire deschisă a lui X. Se construiește un complex simplicial abstract infinit, numit *nervul acoperirii* $\mathscr{D}$, notat $N(\mathscr{D})$, în felul următor: elementele lui $\mathscr{D}$ sînt vîrfurile lui $N(\mathscr{D})$, iar p-simplexele sînt mulțimile de cîte $(p+1)$ vîrfuri distincte $[D_{i_0}, D_{i_1}, \ldots, D_{i_p}]$, cu $D_{i_0} \cap \ldots \cap D_{i_p} \neq \emptyset$.

Fie $\mathscr{K}$ un complex simplicial abstract, infinit, cu vîrfurile $\{a^i\}_{i\in I}$. Considerăm mulțimea $|\mathscr{K}|$ a sistemelor de numere reale nenegative $\{\lambda_i\}_{i\in I}$, încît:

a) $\{a^i | \lambda_i \neq 0\}$ este un simplex al lui $\mathscr{K}$;

b) $\sum_{i\in I} \lambda_i = 1$ (suma este finită, în baza condiției a)).

Fiecărui simplex abstract $\sigma = [a^{i_0}, \ldots, a^{i_p}]$ îi corespunde o submulțime $|\sigma| = \{(\lambda_i) \in |\mathscr{K}| \mid \lambda_i = 0,\ i \neq i_0, i_1, \ldots, i_p\}$.

Fie $|\overset{\circ}{\sigma}| = \{(\lambda_i) \in |\mathscr{K}| \mid \lambda_i \neq 0 \Leftrightarrow i \in \{i_0, i_1, \ldots, i_p\}\}$.

Atunci, $|\mathscr{K}| = \bigcup_\sigma |\sigma| = \bigcup_\sigma |\overset{\circ}{\sigma}|$. Definim

$$t : |\sigma| \to \mathbb{R}^{p+1},\quad t((\lambda_i)) = (\lambda_{i_0}, \ldots, \lambda_{i_p}).$$

Se consideră pe $|\sigma|$ topologia în raport cu care t este o scufundare, iar o topologie pe $|\mathscr{K}|$ se definește încît $F \subset |\mathscr{K}|$ este închisă dacă și numai dacă $F \cap |\sigma|$ este închisă în $|\sigma|$, pentru orice simplex σ din $\mathscr{K}$. Spațiul topologic obținut, $|\mathscr{K}|$, este numit *realizarea topologică* a lui $\mathscr{K}$.

TEOREMA 4. *Realizarea topologică a unui complex simplicial abstract infinit este un spațiu (infinit) triangulabil.*

Demonstrație. Să arătăm că spațiul $|\mathscr{K}|$ este separat Hausdorff. Fie $(\lambda^1_i)_i \neq (\lambda^2_i)_i$. Să presupunem că pentru un indice $i_0 \in I$, $\lambda^1_{i_0} < \lambda^2_{i_0}$. Fie

$$A = \left\{(\lambda_i) \in |\mathscr{K}| \;\middle|\; \lambda_{i_0} \leq \frac{1}{2}(\lambda^1_{i_0} + \lambda^2_{i_0})\right\},$$

$$B = \left\{(\lambda_i) \in |\mathscr{K}| \;\middle|\; \lambda_{i_0} \geq \frac{1}{2}(\lambda^1_{i_0} + \lambda^2_{i_0})\right\};$$

A și B sînt închise. Complementarele acestora sînt disjuncte și conțin respectiv punctele considerate. Pentru fiecare submulțime $|\sigma|$, corespunzătoare unui n-simplex abstract, considerăm aplicația $\Phi^n_j : t(|\sigma|) \to |\mathscr{K}|$, $\Phi^n_j = t^{-1}$. Se pot verifica ușor condițiile Def. 8. (Condiția v) rezultă din definiția topologiei lui $|\mathscr{K}|$.)

DEFINIȚIA 9. Fie Y un spațiu topologic, $\mathscr{U} = \{U_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ o acoperire a lui Y, K un spațiu triangulabil cu topologia Whitehead și L un subspațiu triangulabil al lui K, conținînd toate vîrfurile lui K. O *realizare parțială a lui L în Y, relativ la $\mathscr{U}$, definită pe L*, este o aplicație $f : L \to Y$, încît pentru fiecare simplex închis σ al lui K există $\lambda \in \Lambda$ cu $f(L \cap \sigma) \subset U_\lambda$. În cazul $L = K$ spunem că f este o *realizare plină a lui K în Y, relativ la $\mathscr{U}$.*

Dăm fără demonstrație, pentru care se poate consulta [24, Th. 4.1, p. 122], următoarea teoremă.

TEOREMA 5. *Dacă Y este un ANR și $\mathscr{D}$ este o acoperire deschisă a sa, există o acoperire deschisă $\mathscr{D}'$, mai fină decît $\mathscr{D}$, încît fiecare realizare parțială a unui spațiu triangulabil K în Y, relativ la $\mathscr{D}'$, se poate extinde la o realizare plină a lui K în Y, relativ la $\mathscr{D}$.*

OBSERVAȚIA 8. Fie K și L două complexe simpliciale. Atunci $|K| \times |L|$ este un CW-complex, celulele fiind produsele de simplexe. Există, cum vom vedea, și o triangulare a acestui produs, dar aceasta nu mai este evidentă, simplexele acestei triangulări fiind obținute ceva mai dificil decît prin considerarea produsului de simplexe.

LEMA 3. *Produsul topologic a două simplexe este un spaţiu triangulabil.*

Demonstraţie. Fie $\sigma = [a^0, a^1, \ldots, a^q] \subset \mathbb{R}^m$ şi $\tau = [b^0, b^1, \ldots, b^r] \subset \mathbb{R}^n$. Fie $x_1 \in \sigma$, $x_1 = \sum \lambda_k(x_1)a^k$ şi $x_2 \in \tau$, cu $x_2 = \sum_l \mu_l(x_2)b^l$. Definim

$$\alpha_i(x_1) = \sum_{k=0}^{i} \lambda_k(x_1),\ \beta_j(x_2) = \sum_{l=0}^{j} \mu_l(x_2),$$

$$i = 0, 1, \ldots, q-1\,;\ j = 0, 1, \ldots, r-1$$

Scriem aceste $q + r$ numere ordonat nedescrescător, $\gamma_1(x_1, x_2) \leqslant \ldots \leqslant \gamma_{q+r}(x_1, x_2)$. Notăm $M_{rq} = \{\varphi \mid \varphi \subset \{1, 2, \ldots, q+r\}, |\varphi| = q\}$ şi fie $s(\varphi) = \{(x_1, x_2) \in \sigma \times \tau \mid \forall p \in \varphi \Rightarrow \gamma_p(x_1, x_2) \in \{\alpha_0(x_1), \ldots, \alpha_{q-1}(x_1)\}\}$. Vom arăta că $s(\varphi)$ este un simplex. În acest scop, pentru $\varphi = \{j_1, \ldots, j_q\} \in M_{rq}$, cu $j_1 < j_2 < \ldots < j_q$, considerăm următoarele $q + r + 1$ puncte din spaţiul $\mathbb{R}^{m+n}$ (ale cărui puncte le reprezentăm sub forma (x, y), cu $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$):

$$(1)\qquad \begin{cases} (a^0, b^0), \ldots, (a^0, b^{j_1-1}), \\ (a^1, b^{j_1-1}), \ldots, (a^1, b^{j_2-2}), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (a^{q-1}, b^{j_{q-1}-(q-1)}), \ldots, (a^{q-1}, b^{j_q-q}), \\ (a^q, b^{j_q-q}), \ldots, (a^q, b^r). \end{cases}$$

Aceste $q + r + 1$ puncte sînt afin independente şi putem considera simplexul $(\sigma \times \tau)(\varphi)$ generat de acestea. Vom arăta că $(\sigma \times \tau)(\varphi) = s(\varphi)$.

Dacă $(x_1, x_2) \in s(\varphi)$, atunci:

$$(2)\quad x_1 = \sum_{k=0}^{q} \left\{ \sum_{l=j_k-k}^{j_{k+1}-(k+1)} [\gamma_{k+l+1}(x_1, x_2) - \gamma_{k+l}(x_1, x_2)] \right\} a^k,$$

$$(3)\quad x_2 = \sum_{l=j_k-k}^{j_{k+1}-(k+1)} \left\{ \sum_{k=0} [\gamma_{k+l+1}(x_1, x_2) - \gamma_{k+l}(x_1, x_2)] \right\} b^l.$$

Pentru a dovedi (2), să observăm că avem

$$\sum_{l=j_k-k}^{j_{k+1}-(k+1)} [\gamma_{k+l+1}(x_1, x_2) - \gamma_{k+l}(x_1, x_2)] = \gamma_{j_k+1}(x_1, x_2) -$$

$$- \gamma_{j_k}(x_1, x_2) + \gamma_{j_k+2}(x_1, x_2) - \gamma_{j_k+1}(x_1, x_2) + \ldots$$

$$\ldots + \gamma_{j_{k+1}}(x_1, x_2) - \gamma_{j_{k+1}}(x_1, x_2) - 1 = \gamma_{j_{k+1}}(x_1, x_2) -$$

$$- \gamma_{j_k}(x_1, x_2) = \alpha_k(x_1) - \alpha_{k-1}(x_1) = \lambda_k(x_1),$$

deoarece $\gamma_{j_1}(x_1, x_2), \ldots, \gamma_{j_q}(x_1, x_2)$ sînt numerele $\alpha_0(x_1), \ldots, \alpha_{q-1}(x_1)$ (eventual în altă ordine). Deducem deci că are loc (2). Relaţia (3) este valabilă deoarece $\gamma_{l+1}(x_1, x_2) - \gamma_l(x_1, x_2) = \beta_l(x_2) - \beta_{l-1}(x_2) = \mu_l(x_2)$, întrucît indicii $l \neq j_1, \ldots, j_q$ sînt în complementara lui φ şi $\gamma_{j_1}(x_1, x_2) - \gamma_{j_1-1}(x_1, x_2) + \gamma_{j_1+1}(x_1, x_2) - \gamma_{j_1}(x_1, x_2) = \beta_{j_1}(x_2) - \beta_{j_1}(x_2)$, din faptul că j_1 şi j_2 sînt consecutive în φ (convenim ca $j_0 = 0$, $j_{q+1} = q + r + 1$, $\gamma_0 = 0$, $\gamma_{q+r+1} = 1$).

Din (2) şi (3) putem scrie

$$(4)\ (x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{q} \left\{ \sum_{l=j_k-k}^{j_{k+1}-(k+1)} [\gamma_{k+l+1}(x_1, x_2) - \gamma_{k+l}(x_1, x_2)] \right\} (a^k, b^l).$$

Aceasta este o reprezentare baricentrică, deoarece $\gamma_{k+l+1}(x_1, x_2) - \gamma_{k+l}(x_1, x_2) \geqslant 0$ şi suma acestor coeficienţi este

$$\sum_{k=0}^{q} \sum_{l=j_k-k}^{j_{k+1}-(k+1)} [\gamma_{k+l+1}(x_1, x_2) - \gamma_{k+l}(x_1, x_2)] =$$

$$= \sum_{l=0}^{j_1-q} (\gamma_{l+1}(x_1, x_2) - \gamma_l(x_1, x_2)) + \sum_{l=j_1-1}^{j_2-2} (\gamma_{l+2}(x_1, x_2) -$$

$$- \gamma_{l+1}(x_1, x_2)) + \ldots + \sum_{l=j_q-q}^{r} (\gamma_{q+l+1}(x_1, x_2) -$$

$$- \gamma_{q+t}(x_1, x_2)) = \sum_{p=0}^{q+r} (\gamma_{p+1}(x_1, x_2) - \gamma_p(x_1, x_2)) =$$

$$= \gamma_{q+r+1}(x_1, x_2) - \gamma_0(x_1, x_2) = 1.$$

Prin urmare, obținem $(x_1, x_2) \in (\sigma \times \tau)(\varphi)$, care implică incluziunea $s(\varphi) \subseteq (\sigma \times \tau)(\varphi)$. Rezultă și incluziunea inversă din faptul că $s(\varphi)$ este mulțime convexă și conține vîrfurile simplexului $(\sigma \times \tau)(\varphi)$. Lăsăm verificarea acestor afirmații în seama cititorului.

Deoarece, pentru fiecare punct $(x_1, x_2) \in \sigma \times \tau$, putem construi un simplex $(\sigma \times \tau)(\varphi)$ care-l conține, luînd drept φ mulțimea indicilor numerelor $\alpha_0(x_1), \ldots, \alpha_{q-1}(x_1)$, în șirul $\gamma_p(x_1, x_2)$, rezultă că avem $\sigma \times \tau = \bigcup_{\varphi \in M_{qr}} (\sigma \times \tau)(\varphi)$.

Mai departe, dacă $\varphi_1, \varphi_2 \in M_{qr}$, avem că $s(\varphi_1) \cap s(\varphi_2)$ coincide cu simplexul generat de vîrfurile comune simplexelor $s(\varphi_1)$ și $s(\varphi_2)$. În adevăr, nici un vîrf $(a^{k'}, b^{j_{k'}-l'})$ al simplexului $s(\varphi_2)$ nu se poate afla în interiorul simplexului $s(\varphi_1)$, deoarece șirul γ al acestui vîrf este $(0, \ldots, 0, 1, \ldots, 1)$ și deci $\gamma_{l+1} - \gamma_l$ este 0 sau 1. Dacă $(x_1, x_2) \in s(\varphi_1) \cap s(\varphi_2)$ și presupunem că acest punct are o coordonată nenulă în $s(\varphi_1)$ aceasta trebuie să fie nenulă și în reprezentarea în $s(\varphi_2)$, ceea ce implică faptul că vîrful respectiv este vîrf comun celor două simplexe. Deci, $s(\varphi_1) \cap s(\varphi_2)$ este o față comună. Rezultă că simplexele $(\sigma \times \tau)(\varphi)$ împreună cu fețele acestora determină o triangulare a spațiului $\sigma \times \tau$.

OBSERVAȚIA 9. Dacă $\sigma' < \sigma$ și $\tau' < \tau$, atunci simplexele de forma $(\sigma' \times \tau')(\psi)$ sînt simplexe ale triangulării de mai sus a produsului $\sigma \times \tau$. Nu rezultă însă că toate simplexele acestei triangulări sînt de această formă *).

TEOREMA 6. *Fie K și L două complexe simpliciale avînd dimensiunea m și respectiv n. Atunci, spațiul $|K| \times |L|$ este triangulabil, avînd dimensiunea egală cu $m + n$.*

Demonstrație. Avem $|K| \times |L| = \bigcup_{\substack{\sigma \in K \\ \tau \in L}} \sigma \times \tau$. Conform Lemei 3, $\sigma \times \tau$ este un poliedru. Dacă $\sigma, \sigma' \in K$ și $\tau, \tau' \in L$, cu $(\sigma \times \tau) \cap (\sigma' \times \tau') \neq \emptyset$, avem $\sigma \cap \sigma' \neq \emptyset$ și $\tau \cap \tau' \neq \emptyset$, încît $(\sigma \times \tau) \cap (\sigma' \times \tau') = (\sigma \cap \sigma') \times (\tau \cap \tau')$ este un spațiu triangulabil. De aici se deduce că descompunerea de mai sus a produsului $|K| \times |L|$ conduce la o triangulare a acestui spațiu. Dimensiunea triangulării rezultă din demonstrația Lemei 3.

*) Dați un exemplu în acest sens.

EXERCIȚII

1. Să se arate că pentru orice n-simplex σ, perechea simplicială $(K(\sigma), \dot{\sigma})$ constituie o triangulare pentru perechea topologică (D^n, S^{n-1}).

2. Dacă L este un subcomplex al complexului simplicial K, atunci $K \setminus L$ nu este în general un subcomplex al lui K. Să se arate că există însă un subcomplex M, numit *închiderea lui* $K \setminus L$, notat $\overline{K \setminus L}$, pentru care $M = \overline{|K| \setminus |L|}$, aici supralinierea însemnînd închiderea topologică.

Indicație. Se ia M format din simplexele care sînt fețe pentru simplexele mulțimii $K \setminus L$.

3. Fiind dat K un complex simplicial în $\mathbb{R}^m$ și L un complex simplicial în $\mathbb{R}^n$, să se construiască o realizare în $\mathbb{R}^{m+n+1}$ pentru $K * L$.

Indicație. Se consideră $\mathbb{R}^{m+n+1} = \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1$ și atunci $K * L = \{((1 - \lambda)y, \lambda z, \lambda) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^1) \mid y \in |K|, z \in |L|, 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}$.

4. Să se arate că triangularea L a lui S^{n-1} construită în exemplul 4 este $L_1 * L_2 * \ldots * L_n$, unde L_i este complexul simplicial constînd din 0-simplexele A^i și A'^i iar triangularea K a lui D este $A^0 * L$.

§ 6. Subdivizări baricentrice. Teorema de aproximare simplicială

Reamintim că pentru un simplex $\sigma = [v^0, \ldots, v^n]$, punctul $\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1} \sum_{i=0}^{n} v^i$ se numește *baricentrul lui* σ.

TEOREMA 1. a) *Dacă $\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^q$ sînt simplexe ale unui complex simplicial geometric K, încît $\sigma^0 < \sigma^1 < \ldots < \sigma^q$, atunci baricentrele acestora $\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \ldots, \hat{\sigma}^q$ sînt a-independente;*

b) *Mulțimea tuturor simplexelor $[\hat{\sigma}^0, \hat{\sigma}^1, \ldots, \hat{\sigma}^q]$, cînd $\sigma^0, \sigma^1, \ldots, \sigma^q$ sînt ca mai sus, parcurgînd simplexele lui K, constituie un complex simplicial geometric K', pentru care $|K'| = |K|$ și* dim K' = dim K.

K' este numit **primul complex derivat al lui** K **sau prima subdivizare baricentrică a lui** K *);

*) Există noțiunea mai generală de subdivizare a unui complex simplicial. Vezi, de exemplu, [51, p.121].

c) *Dacă L este un subcomplex al lui K, atunci L' este subcomplex al lui K'.*

Demonstrație. Precizăm că indicii superiori ai simplexelor nu arată dimensiunile acestora.

a) Fie $\sum_{i=0}^{q} \lambda_i \hat{\sigma}^i = 0$, $\sum_{i=0}^{q} \lambda_i = 0$ și $\sigma^q = [v^0, \ldots, v^{s_q}]$. Nu restrîngem generalitatea presupunînd

$$\sigma^0 = [v^0, v^1, \ldots, v^{s_0}], \ \sigma^1 = [v^0, v^1, \ldots, v^{s_1}], \ldots$$

$$\ldots, \sigma^{q-1} = [v^0, \ldots, v^{s_{q-1}}],$$

cu $s_0 < s_1 < \ldots < s_q$. Avem

$$\frac{\lambda_0}{s_0+1}(v^0 + \ldots + v^{s_0}) + \frac{\lambda_1}{s_1+1}(v^0 + \ldots + v^{s_1}) + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\lambda_q}{s_q+1}(v^0 + \ldots + v^{s_q}) = 0$$

și suma coeficienților este zero. Ținînd seama că mulțimea $\{v^0, v^1, \ldots, v^{s_q}\}$ este a-independentă, obținem

$$\frac{\lambda_q}{s_q+1} = 0, \ \frac{\lambda_{q-1}}{s_{q-1}+1} + \frac{\lambda_q}{s_q+1} = 0, \ \ldots, \ \frac{\lambda_0}{s_0+1} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\lambda_q}{s_q+1} = 0,$$

care implică $\lambda_q = 0$, $\lambda_{q-1} = 0, \ldots, \lambda_0 = 0$.

b) Condiția a) din Def. 3 § 5 este verificată în mod evident. Verificăm condiția b), din aceeași definiție, prin inducție după numărul m al simplexelor lui K. Dacă $m = 1$, $K' = K$. Presupunem b) adevărată pentru complexe ce au mai puțin decît m simplexe. Fie τ un simplex de dimensiune maximă și L subcomplexul lui K, necontinînd pe τ. Prin ipoteza inductivă, L' este un complex simplicial geometric.

Fie t', t'' două simplexe ale lui K' incluse în τ, avînd un vîrf în $\hat{\tau}$, de exemplu $t' = [\hat{\alpha}^0, \ldots, \hat{\alpha}^{p-1}, \hat{\tau}]$, $t'' = [\hat{\beta}^0, \ldots$ $\ldots \hat{\beta}^{q-1}, \hat{\tau}]$. Dacă mai există $x \in t' \cap t''$, atunci $\exists y \in [\hat{\tau}, x)$*) $\cap$ $\cap [\hat{\alpha}^0, \ldots, \hat{\alpha}^{p-1}] \cap [\hat{\beta}^0, \ldots, \hat{\beta}^{q-1}]$. În baza ipotezei inductive, $[\hat{\alpha}^0, \ldots, \hat{\alpha}^{p-1}] \cap [\hat{\beta}^0, \ldots, \hat{\beta}^{q-1}]$ este o față comună s și atunci $\hat{\tau} * s$ este intersecția simplexelor t' și t''. Dacă t'' nu are un vîrf în $\hat{\tau}$, dar $t' \cap t'' \neq \emptyset$, atunci $[\hat{\beta}^0, \ldots, \hat{\beta}^{q-1}] \cap$ $\cap\, t' \neq \emptyset$ și aplicăm iarăși ipoteza inductivă.

Pentru a arăta că avem $|K'| = |K|$, să observăm mai întîi că are loc $|K'| \subseteq |K|$, deoarece dacă $t = [\hat{\sigma}^0, \ldots, \hat{\sigma}^q]$, atunci $t \subset \sigma^q$. Dacă $x \in |K|$, atunci $x \in \sigma$, pentru un simplex σ și îl putem lua pe σ de cea mai mică dimensiune. Fie $\sigma = [v^0, v^1, \ldots, v^p]$. Atunci, $x = \sum_{i=0}^{p} \lambda_i v^i$, cu $\lambda_i > 0$, și putem presupune $\lambda_0 \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_p$. Fie $\sigma^i = [v^0, v^1, \ldots, v^i]$, $i = 0, \ldots, p$. Avem atunci

$$x = (\lambda_0 - \lambda_1)\hat{\sigma}^0 + 2(\lambda_1 - \lambda_2)\hat{\sigma}^1 \ldots + p(\lambda_{p-1} - \lambda_p)\hat{\sigma}^{p-1} +$$

$$+ (p+1)\lambda_p \hat{\sigma}^p,$$

deci $A \in [\hat{\sigma}^0, \ldots, \hat{\sigma}^p] \subset |K'|$. Celelalte afirmații ale teoremei fiind ușor de demonstrat, le lăsăm în seama cititorului.

DEFINIȚIA 1. *m-subdivizarea baricentrică* a unui complex simplificial geometric se definește inductiv, prin formula $K^{(m)} = (K^{(m-1)})'$.

LEMA 1. *Fie σ un simplex în $\mathbb{R}^m$. Atunci*, diam σ = $= d(v^i, v^j)$, *pentru v^i, v^j două vîrfuri ale lui σ.*

Demonstrație. diam $\sigma = \sup_{x, x' \in \sigma} d(x, x') = d(x_1, x_2)$ (exerc. 2, § 9, Cap. I). Dacă presupunem că x_2 nu este un vîrf, atunci $x_2 = ty_1 + (1-t)y_2$, cu $y_1 \neq y_2$, $0 < t < 1$. Funcția $f(t) = d(x_1, ty_1 + (1-t)y_2)$ nu are un maxim pentru $t \in (0, 1)$**), în contradicție cu relația diam $\sigma = d(x_1, x_2)$.

---

*) Semidreapta cu originea în $\hat{\tau}$ și conținînd pe x.

**) Explicați de ce.

DEFINIȚIA 2. *Norma unui complex simplicial geometric* K *din* $\mathbb{R}^n$ (cu metrica uzuală) se definește prin mesh K *) $= \max\limits_{\sigma \in K}$ diam σ.

COROLAR 1. *Pentru orice complex simplicial geometric* K, mesh $K = d(v^i, v^j)$, *pentru* v^i, v^j *vîrfuri ale unui simplex al lui* K.

Demonstrație. Se aplică definiția și Lema 1.

TEOREMA 2. *Fie* K *un complex simplicial de dimensiune* m.

a) mesh $K' \leqslant \dfrac{m}{m+1}$ mesh K;

b) $\lim\limits_{n\to\infty}$ mesh $K^{(n)} = 0$.

Demonstrație. a) După Corolarul 1, există un simplex $t = [\hat{\sigma}^0, \ldots, \hat{\sigma}^r] \in K'$, încît mesh $K' = d(\hat{\sigma}^p, \hat{\sigma}^q)$ și fie $\sigma^p < \sigma^q$. Putem presupune că $\sigma^p = [v^0, v^1, \ldots, v^p]$, $\sigma^q = [v^0, v^1, \ldots, v^p, v^{p+1}, \ldots, v^q]$. Avem

$$\text{mesh } K' = \|\hat{\sigma}^p - \hat{\sigma}^q\| =$$

$$= \left\| \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v^i - \frac{1}{q+1} \sum_{j=0}^{q} v^j \right\| =$$

$$= \frac{1}{q+1} \left\| \frac{q+1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v^i - \sum_{j=0}^{q} v^j \right\| =$$

$$= \frac{1}{q+1} \left\| \sum_{j=0}^{q} \left[\left(\frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} v^i \right) - v^j \right] \right\| =$$

$$= \frac{1}{q+1} \frac{1}{p+1} \left\| \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=0}^{p} (v^i - v^j) \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(p+1)(q+1)} \sum_{j=0}^{q} \sum_{i=0}^{p} \|v^i - v^j\|.$$

În această sumă sînt $(p+1)$ termeni nuli. Mai rămîn nenuli deci $(p+1)(q+1) - (p+1) = q(q+1)$

*) Notația din l. engleză.

termeni. Apoi, $\|v^i - v^j\| \leqslant$ mesh K. Prin urmare,

$$\text{mesh } K' \leqslant \frac{q}{q+1} \text{ mesh } K \leqslant \frac{m}{m+1} \text{ mesh } K,$$

deoarece $q \leqslant m$;

b) mesh $K^{(n)} \leqslant \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n$ mesh K și $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{m}{m+1}\right)^n = 0$.

DEFINIȚIA 3. Fie $f: |K_1| \to |K_2|$, o aplicație continuă între două poliedre. O aplicație simplicială $\varphi: |K_1| \to |K_2|$ se numește o *aproximare simplicială pentru* f dacă $\forall x \in |K_1|$, $\varphi(x) \in$ carrier $f(x)$.

OBSERVAȚIA 1. Dacă $f(x)$ este un vîrf în K_2, atunci $\varphi(x) = f(x)$.

COROLAR 2. *Fie* $f: |K_1| \to |K_2|$ *o aplicație continuă,* L_1 *un subcomplex al lui* K_1 *și* $f \mid |L_1|$ *simplicială, iar* $\varphi: |K_1| \to |K_2|$ *o aproximare simplicială pentru* f. *Atunci* $\varphi \mid |L_1| = f \mid |L_1|$.

LEMA 2. *Fie* $\varphi: |K_1| \to |K_2|$ *o aproximare simplicială a aplicației* $f: |K_1| \to |K_2|$ *și* A *o submulțime a lui* $|K_1|$, *încît* $f|A = \varphi|A$. *Atunci,* $\varphi \simeq f$ rel A.

Demonstrație. Definim $H: |K_1| \times I \to |K_2|$, prin $H(x, t) = tf(x) + (1-t)\varphi(x)$, $x \in |K_1|$, $t \in I$. Aceasta are sens deoarece $f(x)$ și $\varphi(x)$ sînt în același simplex. Rezultă ușor că H este continuă și $H: \varphi \simeq f$ rel A.

COROLAR 3. *Dacă* φ *este o aproximare simplificială pentru* $f: |K_1| \to |K_2|$, *atunci* φ *este o aproximare celulară pentru* f.

OBSERVAȚIA 2. Reciproca Corolarului 3 nu este adevărată. Mai mult, nu orice aplicație continuă $f: |K_1| \to |K_2|$ admite o aproximare simplificială $\varphi: |K_1| \to |K_2|$ *). Spre exemplu, fie $|K_1| = |K_2| = [0, 1]$, unde K_1 are vîrfurile $0, \dfrac{1}{3}, 1$, iar K_2 are vîrfurile $0, \dfrac{2}{3}, 1$ (vezi fig. 44).

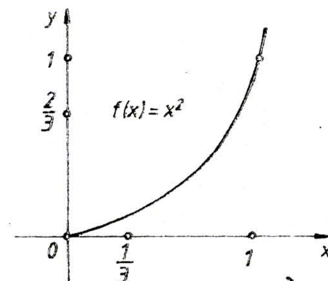


Fig. 44

*) Vezi mai departe *teorema de aproximare simplicială.*

Fie $f : |K_1| \to |K_2|$, $f(x) = x^2$. Aceasta nu are o aproximare simplicială $\varphi : |K_1| \to |K_2|$. În adevăr, în caz contrar am avea $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ și cum $f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ rezultă $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = 0$ sau $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$. Prima variantă cade, deoarece $\frac{1}{3}$ și 1 sînt vîrfuri ale unui simplex în vreme ce 0, 1 nu sînt. Avem deci $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$. Așadar, φ aplică liniar $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ pe $\left[0, \frac{2}{3}\right]$ și $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ pe $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$. Aceasta însă este în contradicție cu următorul fapt: $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \in \left(0, \frac{2}{3}\right)$ în vreme ce $\varphi\left(\frac{1}{2}\right) \notin \left[0, \frac{2}{3}\right]$.

DEFINIȚIA 4. Dacă v este un vîrf al unui complex simplicial geometric K, *steaua* (sau *starul*) vîrfului v este reuniunea, $\operatorname{st} v$ sau $\operatorname{st}_K v$, a tuturor simplexelor lui K

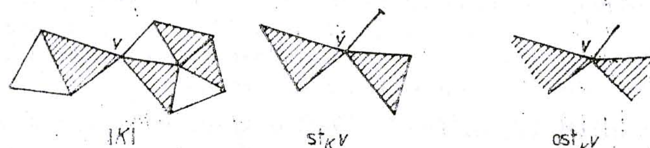


Fig. 45

pentru care v este vîrf. *Steaua deschisă a lui* v, $\operatorname{ost}_K v$ *) este reuniunea simplexelor deschise care-l au pe v ca vîrf. În figura 45 se exemplifică aceste noțiuni.

LEMA 3. *Vîrfurile $v^0, v^1, \ldots, v^k$, ale unui complex simplicial geometric K, sînt vîrfurile unui simplex din K dacă și numai dacă* $\bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{ost}_K(v^i) \neq \emptyset$.

Demonstrație. Dacă $\sigma = [v^0, v^1, \ldots, v^k]$, atunci $(\sigma) \subset \operatorname{ost}_K(v^i)$, $\forall i = 0, 1, \ldots, k$, deci $\bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{ost}_K(v^i) \neq \emptyset$. Reciproc,

*) În l. engleză: *open star*.

fie $x \in \bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{ost}_K(v^i)$ și fie $\sigma =$ carrier x. Rezultă că v^i este vîrf al lui σ, deci $v^0, v^1, \ldots, v^k$ sînt vîrfuri ale unei fețe a lui σ.

TEOREMA 3 (teorema de aproximare simplicială). *Fie $f : |K_1| \to |K_2|$ o aplicație continuă între două poliedre, cu triangulările K_1 și K_2. Există atunci o subdivizare baricentrică $K_1^{(m)}$ a lui K_1 și o aplicație simplicială $\varphi : |K_1^{(m)}| \to |K_2|$, care este o aproximare simplicială pentru $f : |K_1^{(m)}| \to |K_2|$.*

Demonstrație. a) Să presupunem mai întîi că este satisfăcută condiția $f(\operatorname{ost}_{K_1} u) \subset \operatorname{ost}_{K_2} v$, pentru orice vîrf u din K_1, v fiind un vîrf din K_2. Alegînd dintre vîrfurile v satisfăcînd relația de mai sus cîte unul, obținem o funcție v satisfăcînd relația de mai sus cîte unul, obținem o funcție $u \mapsto \varphi(u) = v$, de la vîrfurile lui K_1 la vîrfurile lui K_2.

Fie $\sigma = [u^0, u^1, \ldots, u^k]$ un simplex din K_1. După Lema 3, avem $\bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{ost}(u^i) \neq \emptyset \Rightarrow \bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{ost}_{K_2} \varphi(u^i) \supset \bigcap_{i=0}^{k} f(\operatorname{ost}_{K_1} u^i) = f\left(\bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{ost}_{K_1} u^i\right) \neq \emptyset$, deci $\varphi(u^0), \ldots, \varphi(u^k)$ sînt vîrfurile unui simplex din K_2. Putem deci extinde φ la aplicația simplicială $\varphi : |K_1| \to |K_2|$, considerînd-o „liniară" pe simplexele lui $|K_1|$.

Să arătăm că φ este o aproximare a lui f. Fie $x \in |K_1|$ și carrier $x = \sigma = [u^0, u^1, \ldots, u^k]$. Atunci $x \in \bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{ost}_{K_1} u^i$ și prin urmare $f(x) \in \bigcap_{i=0}^{k} \operatorname{ost}_{K_2} \varphi(u^i)$. Deci, carrier $f(x)$ are drept față simplexul generat de $\varphi(u^0), \ldots, \varphi(u^k)$ și deci $\varphi(x) \in$ carrier $f(x)$.

b) Fie $f : |K_1| \to |K_2|$ continuă, arbitrară. Să observăm că $\{\operatorname{ost} v\}_{v \in K_2^0}$ *) constituie o acoperire deschisă a lui $|K_2|$. Atunci, $\{f^{-1}(\operatorname{ost} v)\}_{v \in K_2^0}$ este o acoperire deschisă a lui $|K_1|$ și fie δ un număr Lebesgue al acestei acoperiri ($|K_1|$ este metric compact). În baza Teoremei 2 b), există m, încît mesh $K_1^{(m)} < \frac{\delta}{2}$. Atunci, dacă u este vîrf al com-

*) Mulțimea vîrfurilor lui K_2.

plexului $K_1^{(m)}$, diam$(\mathrm{ost}_{K_1^{(m)}}u) < \delta$ *) și prin urmare $\mathrm{ost}_{K_1^{(m)}}u \subset$ $\subset f^{-1}(\mathrm{ost}_{K_2}v)$, pentru un vîrf v al lui K_2. Deci, $f(\mathrm{ost}_{K_1^{(m)}}u) \subset$ $\subset \mathrm{ost}_{K_2}v$ și se aplică a).

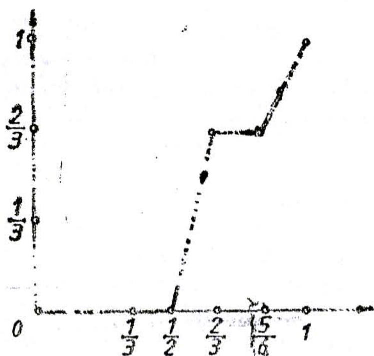


Fig. 46

EXEMPLE. 1. Să reluăm aplicația $f(x) = x^2$ din Obs. 2. Am văzut că aceasta nu are o aproximare simplicială $|K_1| \to$ $\to |K_2|$. Se poate constata, la fel, că nu are nici o aproximare simplicială $|K_1'| \to |K_2|$. Există însă o aproximare simplicială $\varphi : |K_1^{(2)}| \to |K_2|$, definită ca în fig. 46.

2. Fie σ_2 un 2-simplex și $\dot\sigma_2$ complexul format din fețele proprii ale lui σ_2. Spațiul $|\dot\sigma_2|$ este homeomorf cu S^1. Cum $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$, mulțimea $[S^1, S^1]$, deci și $[|\dot\sigma_2|, |\dot\sigma_2|]$, este infinită. Pe de altă parte, pentru fiecare n există numai un număr finit de aplicații simpliciale $|\dot\sigma_2^{(n)}| \to |\dot\sigma_2|$, deoarece $\dot\sigma_2$ și $\dot\sigma_2^{(n)}$ au cîte un număr finit de simplexe. Rezultă deci că, pentru fiecare n, există o aplicație continuă $|\dot\sigma_2| \to |\dot\sigma_2|$ care nu are o aproximare simplicială $|\dot\sigma_2^{(n)}| \to |\dot\sigma_2|$ **).

OBSERVAȚIA 3. Există o teoremă de aproximare simplicială a unei aplicații $f : |K_1| \to |K_2|$ rel $|M|$, pentru M un subcomplex al lui K_1, dacă $f||M|$ este simplicială. Se poate consulta, de exemplu, [37, p. 55].

EXERCIȚII

1. Să se motiveze afirmațiile din exemplul 1.

2. Utilizînd Teorema 3, să se arate că S^n este $(n-1)$-conexă, pentru $n \geqslant 1$.

Indicație. Orice aplicație $S^m \to S^n$, $m \leqslant n-1$, este omotopă cu o aplicație simplicială $\varphi : |\dot\sigma_m^{(i)}| \to |\dot\sigma_n|$, pentru i suficient de mare. Dar, cum dim $\dot\sigma_m^{(i)} = m < n$, orice aplicație simplicială φ are imaginea în scheletul m-dimensional al lui $\dot\sigma_i$. Există deci $x \in |\dot\sigma_n|$, încît $|\varphi(|\dot\sigma_m^{(i)}|) \subset |\dot\sigma_n| \setminus$ $\setminus \{x\}$. Dar $|\dot\sigma_n| \setminus \{x\}$ este homeomorf cu $\mathbb{R}^n$, deci este un spațiu contractibil.

3. Fie $f : |K_1| \to |K_2|$ o aplicație continuă și $\varepsilon > 0$. Să se arate că există subdivizările baricentrice $K_1^{(m)}$ și $K_2^{(n)}$ și o aplicație simplicială $\varphi : |K_1^{(m)}| \to |K_2^{(n)}|$, care este aproximare simplicială pentru f și $d(f, \varphi) <$ $< \varepsilon$, adică $d(f(x), \varphi(x)) < \varepsilon$, $\forall x \in |K_1^{(m)}| = |K_1|$.

Indicație. Se consideră $K_2^{(n)}$, încît mesh $K_2^{(n)} < \varepsilon$, și se aplică Teorema 3, pentru $f : |K_1| \to |K_2^{(n)}|$.

4. Să se arate că dacă $\varphi : |K_1| \to |K_2|$ este o aplicație simplicială, atunci, pentru orice m, aplicația $\varphi : |K_1^{(m)}| \to |K_2^{(m)}|$ este de asemenea simplicială.

5. Să se arate că dacă $\varphi : |K_1^{(m)}| \to |K_2|$ este o aproximare simplicială pentru f iar $\psi : |K_2^{(n)}| \to |K_3|$ este o aproximare simplicială pentru g, atunci $\psi\varphi : |K_1^{(m+n)}| \to |K_3|$ este o aproximare simplicială pentru gf.

6. Să se arate că pentru poliedrele $|K_1|$ și $|K_2|$, mulțimea $[|K_1|, |K_2|]$ este numărabilă.

Indicație. Se raționează ca în exemplul 2.

7. Să se arate că dacă Y este un subspațiu triangulabil al spațiului triangulabil X, atunci Y este retractă de vecinătate a lui X, fie că acesta se consideră cu topologia Whitehead, fie cu topologia metrică.

Indicație. a) Considerăm subdivizarea baricentrică X' a lui X, care se poate defini în mod evident. Spațiile X și X', cu topologiile Whitehead, coincid. Y' este un subspațiu triangulabil al lui X'. Se poate arăta că dacă toate vîrfurile unui simplex $\Phi_j^n(\sigma_n')$ aparțin lui Y', atunci $\Phi_j^n(\sigma_n') \subset Y'$.

Fie $\{\sigma_0'^{j'} | j' \in J_0'\}$ vîrfurile lui X'. Putem scrie $\forall x \in X'$, $x = \sum_{j'} \lambda_{j'}\sigma_0'^{j'}$. Fie $J_0'' = \{j'' \in J_0' | \sigma_0'^{j''} \in Y'\}$. Definim $\varphi : X' \to I = [0, 1]$, $\varphi(x) =$ $= \sum_{j'' \in J_0''} \lambda_{j''}$. Funcția φ este continuă și $U = \{x \in X' | \varphi(x) > 0\}$ este deschisă. Se definește retracția $r : U \to Y'$, $r(x) = \sum \mu_{j'}\sigma_0'^{j'}$ cu

$$\mu_{j'} = \begin{cases} \lambda_{j'} | \varphi(x), & j' \in J_0'', \\ 0, & j' \in J_0' \setminus J_0''. \end{cases}$$

b) Dacă X se consideră cu topologia metrică, continuitatea aplicației φ rezultă din $|\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \sum |\lambda_{j'} - \mu_{j'}| \leqslant d(x, y)$.

8. Un *spațiu triangulabil* X se numește *plin**) dacă fiecare submulțime finită de vîrfuri generează un simplex din X. Să se arate că orice spațiu triangulabil plin X, cu topologia metrică, este un AR.

Indicație. Se aplică Teoremele 6, 5 și 7 § 12 Cap. I.

9. Să se arate că orice spațiu triangulabil, cu topologia metrică, este un ANR.

---

*) Motivați de ce.

**) Două aplicații neomotope au aproximări simpliciale distincte.

*) În l. engleză, *full triangulated space*.

Indicație. Dacă X este un spațiu triangulabil, acesta se poate considera în mod evident ca subspațiu (triangulabil) al unui spațiu triangulabil plin Y. Se aplică atunci exerc. 7, 8.

10. Fie X un spațiu triangulabil și X_w spațiul respectiv cu topologia Whitehead, iar X_m spațiul cu topologia metrică. Să se arate că aplicația identică $i : X_w \to X_m$ este o echivalență omotopică.

Indicație. Se consideră o acoperire local finită a lui X cu mulțimi deschise $\{U_v\}$, unde U_v conține vîrful v și este conținută în ost (v). De exemplu, $\left\{U_v = \left\{x \mid x_v > \frac{1}{2} \max_{v'} x_{v'}\right\}\right\}$; aici $x = \sum x_v v$. Se alege o partiție a unității subordonată acestei acoperiri, de exemplu

$$p_v(x) = \frac{\max\left[x_{v''} - \frac{1}{2}\max\{x_{v'}\},\ 0\right]}{\sum \max\left[x_v - \frac{1}{2}\max\{x_{v'}\}, 0\right]}.$$

Se definește $i' : X_m \to X_w$, $i'(x) = \sum p_v(x)v$. Avem că x și $i'(x)$ sînt în același simplex și deci omotopia liniară $tx + (1-t)i'(x)$ este o echivalență între $ii' = i'i = i'$ și aplicația identică. Omotopia este continuă în ambele topologii.

11. Dacă sistemul de mulțimi compacte $C_0, C_1, \ldots, C_n$ satisface condiția $[v^{i_0}, \ldots, v^{i_p}] \subset C_{i_0} \cup C_{i_1} \cup \ldots \cup C_{i_p}$, pentru orice față $[v^{i_0}, \ldots, v^{i_p}]$ a unui n-simplex $\sigma = [v^0, \ldots, v^n]$, atunci $C_0 \cap C_1 \cap \ldots \cap C_n \neq \emptyset$ *).

Soluție. Să presupunem contrariul. Atunci, întrucît $\sigma \subset C_0 \cup \ldots \cup C_n$, luînd complementarele D_i în σ ale mulțimilor C_i, obținem o acoperire deschisă $\{D_i\}$ a lui σ. Fie ε un număr Lebesgue al acestei acoperiri. Considerăm o subdivizare baricentrică L a complexului $L(\sigma)$, încît mesh $L < \varepsilon$. Prin urmare, fiecare simplex al lui L este situat în una din mulțimile D_i. Dar, dacă se ia un n-simplex al acestui complex, acesta, datorită ipotezei, trebuie să aibă cîte un vîrf în fiecare din mulțimile $C_0, \ldots C_n$. Acest lucru se poate stabili prin inducție sau se poate folosi teorema lui Sperner [30, p.264]. Se ajunge astfel la o contradicție.

12. Pentru un simplex $\sigma = [v^0, \ldots, v^n]$, orice aplicație continuă $f : \sigma \to \sigma$ are cel puțin un punct fix, adică există $x_0 \in \sigma$ încît $f(x_0) = x_0$ **).

Soluție. Pentru un punct $x \in \sigma$, scriem $f(x) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^* v^i$. Avem de arătat că există un punct $x = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i v^i$, încît $\lambda_i^* = \lambda_i$ pentru $i = 0, 1, \ldots, n$. Fie $C_i = \{x \in \sigma \mid \lambda_i^* \leqslant \lambda_i\}$. Datorită continuității coordonatelor baricentrice a continuității aplicației f, rezultă că C_i sînt închise și deci compacte. Avem în plus $\sigma = C_0 \cup \ldots \cup C_n$ și dacă $P_i = \{x \in \sigma \mid \lambda_i > 0\}$, atunci $C_i \subset P_i$, ceea ce atrage verificarea condițiilor exerc. 11. Avem deci $C_0 \cap C_1 \cap \ldots \cap C_n \neq \emptyset$, adică $\exists x \in \sigma$, cu $\lambda_i^* \leqslant \lambda_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Cum însă $\lambda_i \geqslant 0$, $\lambda_i^* \geqslant 0$ și $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^* = 1$, rezultă $\lambda_i = \lambda_i^*$, $\forall\, i$.

13. Fie L triangularea, din exemplul 4 § 5, a sferei S^{n-1}. Să se arate că prin identificarea punctelor diametral opuse în divizarea baricentrică L', se obține un complex simplicial M, care este o triangulare pentru spațiul proiectiv $P\mathbb{R}^{n-1}$.

14. Fie Y spațiul din exerc. 8 § 13 Cap. I. Să se arate că pentru orice $n \geqslant 0$, $\pi_n(Y) = 0$.

Soluție. Fie $f : S^n \to Y$ o aplicație continuă. Cu notațiile din exerc. 8 § 13 Cap. I, mulțimea $\{f^{-1}(A), f^{-1}(B), f^{-1}(C)\}$ formează o acoperire deschisă a lui S^n. Fie δ un număr Lebesgue al acestei acoperiri. Dacă luăm o triangulare K a sferei S^n, cu mesh $K < \delta$, atunci numai un număr finit de simplexe sînt aplicate prin f în B și, deoarece imaginea fiecăruia dintre acestea este liniar conexă, rezultă că mulțimea $f(S^n) \cap B$ este conținută într-un număr finit de „raze" de la punctul $(0, 1)$ sau de la punctul $(0, -1)$. Cu alte cuvinte, $f(S^n)$, este o mulțime conținută în subspațiul Z al lui Y constînd din reuniunea dintre $A \cup C$ cu un număr finit de „raze" ca mai sus. Este ușor de verificat însă că Z este un spațiu contractibil. Rezultă în felul acesta că f este nul omotopă în Z și prin urmare în Y. Cum n și f s-au luat arbitrar, rezultă $\pi_n(Y) = 0$, $\forall n$.

§ 7. Grupul $E(K, v^0)$

DEFINIȚIA 1. Fie K un complex simplicial geometric. Un *drum de muchii**), prescurtat ep, de la un vîrf v^0 la un vîrf v^n, este un șir α de vîrfuri $v^0, v^1, \ldots, v^n$, astfel că pentru orice $i = 1, \ldots, n$, vîrfurile v^{i-1}, v^i determină un simplex în K. Dacă $v^n = v^0$ avem un *drum închis de muchii***) în (K, v^0), prescurtat el. Vom scrie $\alpha = v^0v^1 \ldots v^n$.

Fie α ca mai sus și $\beta = v^{n+1} \ldots v^{n+m}$. Se definește *produsul* $\alpha \cdot \beta = v^0v^1 \ldots v^nv^{n+1} \ldots v^{n+m}$ și *inversul lui* α, $\alpha^{-1} = v^nv^{n-1} \ldots v^0$.

Se verifică imediat că $(\alpha \cdot \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot (\beta \cdot \gamma)$ și $(\alpha \cdot \beta)^{-1} = \beta^{-1} \cdot \alpha^{-1}$.

DEFINIȚIA 2. Două drumuri de muchii α și β se numesc *echivalente*, și scriem $\alpha \sim \beta$, dacă unul se obține din celălalt printr-un număr finit de operații de tipul

---

*) *Lema K^2M (Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz)*, vezi Rus, I.A., *Principii și aplicații ale teoriei punctelor fixe*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, 1979.

**) *Teorema lui Brouwer*; pentru o altă demonstrație vezi Cor. 5 § 3 Cap. IV.

*) În l. engleză, *edge-path*.

**) În l. engleză, *edge-loop*.

următor :

a) Dacă $v^{i-1} = v^i$, atunci $\ldots(v^{i-1}v^i)\ldots$ se înlocuieşte cu $\ldots v^i \ldots$ sau invers;

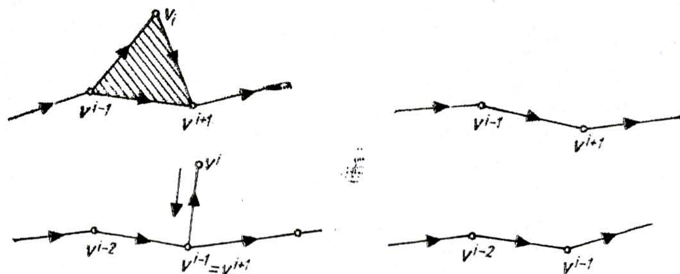


Fig. 47

b) Dacă v^{i-1}, v^i, v^{i+1} determină un simplex în K (nu neapărat de dimensiune 2), atunci $\ldots(v^{i-1}v^iv^{i+1})\ldots$ se înlocuieşte cu $\ldots(v^{i-1}, v^{i+1})\ldots$ sau invers. Pentru exemplificare, vezi fig. 47.

Se verifică imediat conţinutul următoarei leme.

LEMA 1. *Fie α, β două ep, de la v^0 la v^n, şi α', β' două ep, de la v^n la v^{n+m}, încît $\alpha \sim \beta$ şi $\alpha' \sim \beta'$. Atunci:*

a) $\alpha \cdot \alpha' \sim \beta \cdot \beta'$;

b) $\alpha^{-1} \sim \beta^{-1}$;

c) $v^0 \cdot \alpha \sim \alpha \sim \alpha \cdot v^n$;

d) $\alpha \cdot \alpha^{-1} \sim v^0$ şi $\alpha^{-1} \cdot \alpha \sim v^n$.

DEFINIŢIA 3. Fie $E(K, v^0)$ mulţimea claselor de echivalenţă ale el în (K, v^0), $E(K, v^0) = \{[\alpha] | \alpha = v^0v^1 \ldots v^0\}$. În baza Lemei 1, este bine definită operaţia $[\alpha][\beta] = [\alpha \cdot \beta]$ şi în raport cu aceasta $K(E, v^0)$ este un grup, numit *grupul fundamental de muchii* *) pentru (K, v^0).

TEOREMA 1. $E(K, v^0) \cong \pi_1(|K|, v^0)$.

Demonstraţie. Construim funcţia $\Phi : E(K, v^0) \to \pi_1(|K|, v)$, interpretînd fiecare el ca un drum închis în $(|K|, v^0)$. Analitic, dat $[\alpha] = [v^0, v^1 \ldots v^n v^0]$, fie $u_{ij} : I \to |K|$ aplicaţia liniară $u_{ij}(t) = (1 - t)\, v^i + t v^j$ **) şi considerăm $\varphi(\alpha) = u_{01} * u_{12} * \ldots * u_{n0}$. Dacă $\alpha \sim \beta$, rezultă din Def. 2, utilizînd faptul că $u_{ii} = e_{v^i}$ (drumul constant) şi $u_{i-1} * u_{i,i+1} \simeq u_{i-1,i+1}$ rel ∂I, dacă v^{i-1}, v^i, v^{i+1} generează un 2-simplex, că avem $\varphi(\alpha) \simeq \varphi(\beta)$ rel ∂I. Putem deci defini $\Phi[\alpha] = [\varphi(\alpha)]$. Rezultă uşor că Φ este un homomorfism de grupuri. Dacă $[\alpha] = [v^0v^1 \ldots v^nv^0]$ şi $[\beta] = [v^0v^{n+1} \ldots v^{n+m}v^0]$, atunci

$$\Phi([\alpha][\beta]) = [u_{01} * \ldots * u_{n,0} * u_{0,n+1} * \ldots * u_{n+m,0}] =$$
$$= [u_{01} * \ldots * u_{n,0}][u_{0,n+1} * \ldots * u_{n+m,0}] = \Phi[\alpha]\Phi[\beta].$$

Să arătăm că Φ este epimorfism. Dacă $[f] \in \pi_1(|K|, v^0)$, deci $f : I \to |K|$, atunci, considerăm pentru I triangularea L, cu vîrfurile 0,1 şi cu 1-simplexul $[0, 1]$. Există, conform Teoremei 3, o aplicaţie simplicială $s : |L^{(m)}| \to |K|$ care este omotopă cu f. Vîrfurile lui $L^{(m)}$ sînt punctele $\frac{i}{2^m}$, $0 \leqslant i \leqslant 2^m$. Avem $s(0) = f(0) = v^0$, $s(1) = f(1) = v^0$ (Obs. 1 § 6). Fie $v^i = s\left(\frac{i}{2^m}\right)$, $1 \leqslant i \leqslant 2^m - 1$. Atunci, luînd $\alpha = v^0v^1 \ldots v^{2^m-1}v^0$, avem $\Phi[\alpha] = [s] = [f]$.

Să mai arătăm că Φ este monomorfism. Fie $[\alpha] = [v^0v^1 \ldots v^nv^0] \in E(K, v^0)$, încît $\Phi[\alpha] = [e_{v^0}]$. Clasa $\Phi[\alpha]$ este reprezentată de o aplicaţie simplicială $u : |M| \to |K|$, unde M este o triangulare a lui I, cu vîrfurile $0 = t^0 < t^1 < \ldots < t^{n+1} = 1$, încît $u(t^i) = v^i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, $u(t^{n+1}) = v^0$. Deoarece $u \simeq e_{v^0}$ rel ∂I, există o omotopie $F : I \times I \to |K|$, $F : u \simeq e_{v^0}$ rel ∂I. Triangulăm pătratul $I \times I$ ca în fig. 48. Fie N această triangulare şi P subcomplexul lui N al cărui poliedru este $\partial(I \times I)$. Avem $F(t, 0) = u(t)$ şi u este simplicială. $F(t, 1) = F(0, t') = F(1, t') = v^0$, deci $F | |P|$ este simplicială. Aplicînd Teorema 3, există o aproximare simplicială, $S : |N^{(m)}| \to |K|$, a omotopiei $F : |N^{(m)}| \to |K|$. Drumurile de muchii $t^0t^1 \ldots t^nt^{n+1}$ şi t^0abt^{n+1} sînt echivalente în N. Prin luarea diviziunii baricentrice $N^{(m)}$ se obţin, corespunzător acestora, două ep, α_1 şi respectiv α_2, care, în mod evident, sînt echivalente în $N^{(m)}$.

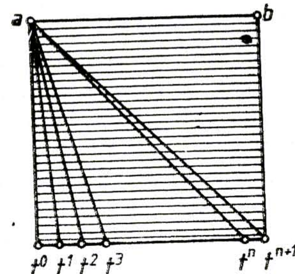


Fig. 48

*) În l. engleză, *edge-group*.

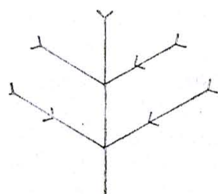
**) Dacă v^i şi v^j sînt vîrfuri ale unui simplex din K.

Este uşor de văzut acum că aplicaţiile simpliciale păstrează relaţia de echivalenţă a drumurilor de muchii. De aceea, imaginile prin S ale ep α_1 şi α_2 sînt echivalente în K. Dar, $S(\alpha_2)$ este ep constant în v^0. Deoarece $F(t^i) = v^i$, $1 \leq i \leq n$, şi S aproximează simplicial pe F, imaginea prin S a oricărui nou vîrf în α_1 introdus între t^i şi t^{i+1} este sau v^i sau v^{i+1}. De aceea, S aplică α_1 într-un ep echivalent cu α. Prin urmare, α este echivalent cu ep constant în v^0. Cu aceasta teorema este demonstrată.

COROLAR 1. *Pentru orice poliedru $|K|$ şi orice vîrf v^0 al lui K, $\pi_1(|K|, v^0)$ depinde numai de $|K|^2$* *).

EXEMPLUL 1. Fie sfera S^n, $n > 1$, triangulată ca $\dot\sigma$, unde σ este un $(n)+1$)-simplex. Dacă $n > 1$, $\dot\sigma$ are acelaşi 2-schelet ca şi $K(\sigma)$, al cărui poliedru este simplu conex (fiind contractibil). Deci, S^n este simplu conex.

DEFINIŢIA 4. Un subcomplex 1-dimensional L al unui complex simplicial geometric K se numeşte *arbore* dacă $|L|$ este spaţiu contractibil (vezi fig. 49). K avînd un număr finit de simplexe, există desigur arbori maximali.


Un arbore

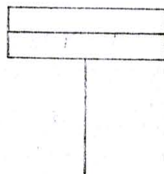

Acesta nu este arbore

Fig. 49

LEMA 2. *Fie $|K|$ liniar conex şi L un arbore maximal al lui K. Atunci, L conţine toate vîrfurile lui K.*

Demonstraţie. Să presupunem că v este un vîrf al lui K neconţinut în L. Deoarece $|K|$ este liniar conex, există un drum în $|K|$ de la un vîrf w al lui L la v. În baza Teoremei 3 § 6, există un ep, $wv^0v^1 \dots v^n v$ în K. Dacă v^r este ultimul vîrf din L al acestui ep, atunci $v^r v^{r+1}$ nu este un 1-simplex în L ($v^r \neq v^{r+1}$). În aceste condiţii, $\bar{L} = L \cup [v^r v^{r+1}] \cup \cup [v^{r+1}]$ este un subcomplex 1-dimensional ce conţine pe L. Mai mult, $|\bar{L}|$ este echivalent omotopic cu $|L|$, deoarece $[v^r, v^{r+1}]$ poate fi contractat la v^r. Deci, $|\bar{L}|$ este contractibil şi prin urmare $\bar{L}$ este un arbore, în contradicţie cu maximalitatea lui L.

*) Să se compare cu exerc. 2 § 3.

DEFINIŢIA 5. Fie $G\{A\}$ grupul liber generat de o mulţime A (vezi Def. 1 § 4 Cap. II) şi fie $B \subset G\{A\}$. Notăm cu $\bar{B}$ intersecţia tuturor subgrupurilor normale ale lui $G\{A\}$ care conţin pe B. Subgrupul $\bar{B}$ este normal. Grupul factor $G\{A\}/\bar{B}$ se notează $G\{A\,;\,B\}$ şi se numeşte *grupul generat de A şi satisfăcînd relaţiilor B*. Elementele lui $G\{A\,;\,B\}$ sînt scrise sub forma de cuvinte în A şi efectul relaţiilor B este de-a introduce egalităţi de forma $b = 1$, pentru orice element $b \in B$.

Un grup G este *finit generat* dacă $G \cong G\{A\,;\,B\}$, pentru A o mulţime finită. Dacă şi B este finită, G se numeşte *finit prezentat**).

Fie $|K|$ liniar conex şi $|L|$ un subpoliedru contractibil, ce conţine toate vîrfurile lui K (de exemplu, L un arbore maximal). Ordonăm toate vîrfurile lui K sub forma $v^0 < v^1 < \dots < v^m$. Atunci, un simplex al lui K se poate scrie $[v^{i_0} v^{i_1} \dots v^{i_n}]$, unde $i_0 < i_1 < \dots < i_n$. Numim *ordonat* un simplex scris în acest fel. Fie $G(K, L)$ grupul determinat de generatorii g_{ij}, cîte unul pentru fiecare 1-simplex ordonat $[v^i v^j]$ şi satisfăcînd relaţiile $g_{ij} = 1$ dacă $[v^i v^j]$ este un 1-simplex în L şi $g_{ij} g_{jk} = g_{ik}$ dacă $[v^i v^j v^k]$ există ca 2-simplex ordonat în $K \setminus L$.

TEOREMA 2. $G(K, L) \cong E(K, v^0)$.

Demonstraţie. Alegem cîte un ep, α_i în L de la v^0 la v^i (luînd $\alpha_0 = v^0$). Definim $\theta : G(K, L) \to E(K, v^0)$, luînd $\theta(g_{ij}) = [\alpha_i v^i v^j \alpha_j^{-1}]$. Extindem la un homomorfism. Acest lucru este posibil deoarece : dacă $[v^i v^j]$ este un 1-simplex în L, atunci $\alpha_i v^i v^j \alpha_j^{-1}$ este în întregime un ep în L care este simplu conex şi, după Teorema 1, $[\alpha_i v^i v^j \alpha_j^{-1}] = [v^0]$. Apoi, dacă $[v^i v^j v^k]$ este un 2-simplex ordonat în $K \setminus L$, atunci $\theta(g_{ij})\theta(g_{jk}) = [\alpha_i v^i v^j \alpha_j^{-1}][\alpha_j v^j v^k \alpha_k^{-1}] = [\alpha_i v^i v^j v^j v^k \alpha_k^{-1}] = [\alpha_i v^i v^k \alpha_k^{-1}] = \theta(g_{ik})$.

Aşadar, relaţiile din $G(K, L)$ sînt păstrate prin θ şi deci aceasta defineşte un homomorfism. Vom defini inversul lui θ, $\Phi : E(K, v^0) \to G(K, L) = G$. Dacă $[v^i v^j]$ este un 1-simplex din K, fie

$$h_{ij} = \begin{cases} g_{ik} & \text{dacă } [v^i v^j] \text{ este 1-simplex ordonat în } K\setminus L, \\ g_{ji}^{-1} & \text{dacă } [v^j v^i] \text{ este 1-simplex ordonat în } K\setminus L, \\ 1 & \text{în celelalte situaţii} \end{cases}$$

*) Pentru proprietăţi şi alte consideraţii asupra acestor noţiuni se poate consulta, de exemplu, [37] sau [32].

Dacă $\alpha = v^0v^1 \ldots v^nv^0$ este un el în (K, v^0), luăm $\Phi[\alpha] = h_{01} \ldots h_{ij} \ldots h_{n0} \in G(K, L)$ care este bine definită, cum se constată ușor. Avem acum $\Phi\theta(g_{ij}) = \Phi\ [\alpha_i v^i v^j \alpha_j^{-1}] = g_{ij}$, deci $\Phi\theta = 1_{G(K,L)}$. Apoi, dacă

$$\alpha = v^0v^1 \ldots v^{\prime}v^0,$$

$$\theta\Phi[\alpha] = \theta\Phi([\alpha_0 v^0 v^1 \alpha_1^{-1}] \ldots [\alpha_n v^n v^0 \alpha_0^{-1}]) =$$

$$= \theta\Phi[\alpha_0 v^0 v^1 \alpha_1^{-1}] \ldots \theta\Phi[\alpha_n v^n v^0 \alpha_1^{-1}].$$

Avem $[\alpha_r v^r v^s \alpha_s^{-1}] = 1$, exceptînd cazul cînd v^r, v^s generează un 1-simplex al lui $K \setminus L$ și, în orice caz, $\theta\Phi[\alpha_r v^r v^s \alpha_s^{-1}] = [\alpha_r v^r v^s \alpha_s^{-1}]$, deci $\theta\Phi = 1_{E(K,v^0)}$. Astfel θ și Φ sînt izomorfisme.

COROLAR 2. $\pi_1(|K|, v^0) \cong G(K, L)$.

COROLAR 3. *K fiind un complex de dimensiune 1 (un graf) și v^0 un vîrf al lui K, $\pi_1(|K|, v^0)$ este grupul liber generat de 1-simplexele ordonate din $K \setminus L$, pentru L un arbore maximal.*

EXEMPLUL 2. Fie $X = \bigvee_{i=1}^{p} S_i^1$. Atunci X este triangulabil, $X = |K|$, pentru K un graf, ca în fig. 50.

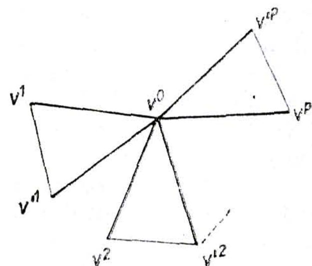


Fig. 50

Un arbore maximal este cel al cărui spațiu este desenat mai plin. Atunci $\pi_1(X, v^0)$ este grupul abelian liber cu generatorii $g_i = [v^i v'^i]$, $i = 1, \ldots, p$, regăsind Cor. 6 § 4 Cap. II.

COROLAR 4. *Grupul fundamental al unui spațiu triangulabil este finit prezentat.*

DEFINIȚIA 6. Fie $G = G\{x_1, \ldots, x_m; r_1, \ldots, r_n\}$ și $H = G\{y_1, \ldots, y_h; s_1, \ldots, s_k\}$ două grupuri finit prezentate. Atunci, *produsul liber* $G*H$ este grupul $G*H = G\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_h; r_1, \ldots, r_n, s_1, \ldots, s_k\}$*).

*) Pentru produsul liber de grupuri arbitrare vezi [37, p.79].

TEOREMA 3 (teorema Van Kampen-Seifert)*). *Fie J și K două complexe simplicale geometrice, situate în același spațiu euclidian, care se intersectează după un subcomplex comun lui J și K. Presupunem că $|J|$, $|K|$, $|J \cap K|$ sînt liniar conexe și fie v^0 un vîrf în $J \cap K$ iar $j: |J \cap K| \hookrightarrow |J|$, $k: |J \cap K| \hookrightarrow |K|$ incluziunile. Atunci, $\pi_1(|J \cup K|, v^0)$ este izomorf cu grupul ce se obține din produsul liber $\pi_1(|J|, v^0) * \pi_1(|K|, v^0)$ adăugînd relațiile $j_*(z) = k_*(z)$, pentru toate elementele $z \in \pi_1(|J \cap K|, v^0)$.*

Demonstrație. Fie L_0 un arbore maximal în $J \cap K$, pe care-l completăm la un arbore maximal L_1 în J și la un arbore maximal L_2 în K. Atunci, $L_1 \cup L_2$ este un arbore maximal în $J \cup K$ (vezi Teorema 1 § 4 Cap. II). Aplicînd Corolarul 2, $\pi_1(|J \cup K|, v^0)$ este generat de elementele g_{ij} corespunzătoare muchiilor orientate din $J \cup K \setminus L_1 \cup L_2$, cu relațiile $g_{ij}g_{jk} = g_{ik}$, date de triunghiurile (orientate) din $J \cup K \setminus L_1 \cup L_2$. Dar acest grup este exact cel ce rezultă luînd cîte un generator g'_{ij} pentru orice muchie (orientată) din $J \setminus L_1$ și cîte un generator g''_{ij} pentru orice muchie (orientată) din $K \setminus L_2$, cu relații de forma $g'_{ij}g'_{jk} = g'_{ik}$, $g''_{ij}g''_{jk} = g''_{ik}$ corespunzătoare triunghiurilor (orientate) din J și respectiv K, adăugîndu-se relațiile $g'_{ij} = g''_{ij}$, cînd g'_{ij} și g''_{ij} corespund aceleași muchii (orientate) din $J \cap K$. În plus, muchiile (orientate) din $J \cap K \setminus L_0$ privite ca muchii (orientate) în J dau o mulțime de generatori pentru $j_*\pi_1(|J \cap K|, v^0)$ și analog, aceleași muchii considerate în K dau o mulțime de generatori pentru $k_*\pi_1(|J \cap K|, v^0)$. Deci $g'_{ij} = g''_{ij}$ înseamnă $j_*(z) = k_*(z)$, pentru fiecare generator z al grupului $\pi_1(|J \cap K|, v^0)$.

OBSERVAȚIA 1. În Teorema 3, $\pi_1(|J \cup K|, v^0)$ este finit prezentat deoarece relațiilor produsului liber, care sînt în număr finit, este suficient să adăugăm relațiile $j_*(z) = k_*(z)$, numai pentru o mulțime de generatori z ai lui $\pi_1(|J \cap K|, v^0)$.

COROLAR 5. *Dacă în Teorema 3, $|J \cap L|$ este simplu conex, atunci $\pi_1(|J \cup K|, v^0) \cong \pi_1(|J|, v^0) * \pi_1(|K|, v^0)$.*

Fie $|K|$ un poliedru liniar conex și $\alpha = v^0v^1 \ldots v^nv^0$, $n \geq 2$, un el în K, cu vîrfurile consecutive distincte. Fie (L, M) triangularea perechii (D^2, S^1), unde $|L|$ este o

*) Teorema generală poate fi găsită în [39, p. 308].

suprafață poligonală regulată cu $(n+1)$-laturi situată în $\mathbb{R}^2$ (vezi fig. 51).

TEOREMA 4. *Fie* $\varphi: S^1 = |M| \to |K|$ *aplicația simplicială, definită prin* $\varphi(w^i) = v^i$, $0 \leqslant i \leqslant n$, *și* $X = |K|_\varphi \sqcup D^2$. *Atunci,* $\pi_1(X, v^0)$ *este grupul obținut din* $\pi_1(|K|, v^0)$, *adăugînd relația* $\Phi[\alpha] = 1$, *unde* Φ *este izomorfismul din* Teorema 1.

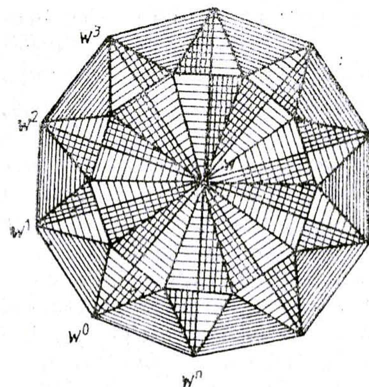


Fig. 51

Demonstrație. Pentru X putem obține o triangulare N în felul următor. Considerăm abstractizările $\mathscr{L}$ și $\mathscr{K}$ pentru L și respectiv K și identificăm vîrfurile w^i și v^i, $0 \leqslant i \leqslant n$. Prin aceasta se identifică simplexele abstracte $[w^i, w^{i+1}]$ și $[v^i, v^{i+1}]$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$, $(w^{n+1} = w^0$, $v^{n+1} = v)^0$, fără alte identificări. Aceasta deoarece:

1) $v^i \neq v^{i+1}$, $i = 0, \ldots, n$, și orice simplex al lui L intersectează M după o față, ceea ce face ca prin identificări simplexele să nu *colapseze* în simplexe de dimensiuni mai mici decît erau;

2) Două 1-simplexe distincte, $[w^{i_1}w']$, $[w^{i_2}w'']$, din $L \setminus M$ nu pot fi identificate decît dacă $w' = w''$ și atunci w^{i_1}, w^{i_2} trebuie să fie vîrfuri consecutive ale lui M, care nu se identifică;

3) Date două 2-simplexe distincte ale lui L, există un vîrf în $L \setminus M$ care este în unul din simplexe și nu este în celălalt.

Complexul simplicial abstract $\mathscr{N}$ ce se obține din $\mathscr{K}$ și $\mathscr{L}$, cu identificările precizate, are drept realizare geometrică o triangulare N a lui X. Se poate considera și direct triangularea (mai complicată) din fig. 51.

Fie acum un 2-simplex $\sigma = [w^0w'w'']$ din L și luăm $Y = |N \setminus \sigma|$. Aplicînd Teorema 3, $\pi_1(X, v^0)$ se obține din $\pi_1(Y, v^0) * \pi_1(\sigma, v^0)$ adăugînd relațiile $j_*(z) = k_*(z)$, pentru orice generator z al grupului $\pi_1(|\dot\sigma|, v^0)$, unde $j: |\dot\sigma| \to Y$, $k: |\dot\sigma| \to \sigma$ sînt incluziunile.

Avem însă $\pi_1(\sigma, v^0) = 0$ iar $\pi_1(|\dot\sigma|, v^0)$ este grupul liber generat de $\Phi[w^0w'w''w^0]$. Rezultă că $\pi_1(X, v^0)$ se obține în $\pi_1(Y, v^0)$ adăugînd relația $\Phi[w^0w'w''w^0] = 1$. Pentru a deduce concluzia teoremei, să observăm că deoarece $|L|$ este convexă, proiecția radială din $\hat\sigma$ este o retracție tare de deformare a lui $|L \setminus \sigma|$ pe $|M|$ și aceasta se poate extinde la o retracție de deformare $\rho: Y \to |K|$. Aceasta induce izomorfismul $\rho_*: \pi_1(Y, v^0) \to \pi_1(|K|, v^0)$, prin care $\rho_*\Phi[w^0w'w''w^0] = \Phi[\alpha]$ (vezi și fig. 51).

EXERCIȚII

1. Utilizînd triangulările din §5, să se calculeze, după Cor. 2, grupul fundamental pentru: tor, trompeta lui Klein și planul proiectiv.

2. Fie triangularea trompetei lui Klein din exemplul 7 §5. Fie J complexul obținut înlăturînd simplexul $\sigma = [A^0A^1A^8]$ și fie $K = K(\sigma)$. Să se aplice Teorema 3 pentru a regăsi grupul fundamental al trompetei lui Klein (Atenție la notație!).

3. Să se dea o triangulare pentru *torul cu o «cavitate»* (vezi fig. 52 a) și să se calculeze, utilizînd Cor. 2, grupul său fundamental. (Verificați rezultatul utilizînd Teorema 8 §8.)

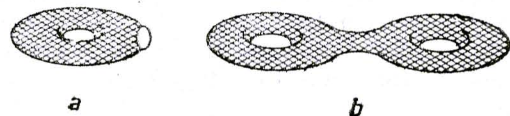


Fig. 52

4. Utilizînd Teorema 3, să se afle grupul fundamental al unui *tor dublu* (vezi fig. 52 b). (Comparați cu § 8.)

§ 8. Suprafețe. Teoreme de clasificare

DEFINIȚIA 1. O *n-pseudovarietate fără bord* este un complex simplicial K, satisfăcînd condițiile:

i) Fiecare simplex al lui K este față a unui n-simplex din K;

ii) Fiecare $(n-1)$-simplex al lui K este față a exact două n-simplexe din K;

iii) Date două n-simplexe σ_n, $\sigma_n' \in K$, există un șir de n-simplexe, începînd cu σ_n și încheind cu σ_n' și astfel că două simplexe consecutive se intersectează după o $(n-1)$-față.

EXEMPLUL 1. Dacă σ_{n+1} este un $(n+1)$-simplex oarecare, atunci $\dot{\sigma}_{n+1}$ este o n-pseudovarietate.

DEFINIȚIA 2. O *suprafață închisă* este un poliedru admițînd ca o triangulare o 2-pseudovarietate.

EXEMPLUL 2. Sfera S^2, torul T^2, trompeta lui Klein K și planul proiectiv $P\mathbb{R}^2$ sînt suprafețe închise (vezi exemplele 4 — 8 § 5).

DEFINIȚIA 3. O *n-pseudovarietate cu bord* este un complex simplicial K, satisfăcînd condițiile i) și iii) din Def. 1, condiția ii) fiind înlocuită cu ii b): orice $(n-1)$-simplex al lui K este față a cel puțin unui și a cel mult două n-simplexe ale lui K.

Spațiul unei 2-pseudovarietăți cu bord se numește *suprafață cu bord*.

EXEMPLUL 3. Discul D^2 și banda lui Möbius sînt suprafețe cu bord (vezi exemplele 4, 5 § 5).

DEFINIȚIA 4. Fie K un complex simplicial și $x \in |K|$. *Vecinătatea simplicială a lui x în K* este mulțimea simplexelor ce conțin punctul x împreună cu fețele acestora. Se notează $N_K(x)$ sau $N(x)$. *Linkul*) lui x*, $\mathrm{Lk}_K(x)$ este mulțimea simplexelor din $N_K(x)$ care nu conțin pe x (fig. 53).

Următoarea lemă poate fi ușor demonstrată de către cititor.

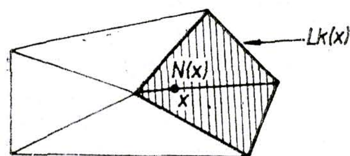


Fig. 53

LEMA 1. *Fie $|K|$ o suprafață și $x \in |K|$.* a) *Dacă suprafața este închisă, atunci $|\mathrm{Lk}(x)|$ este homeomorf cu S^1;*

b) *Dacă suprafața este cu bord, $|\mathrm{Lk}(x)|$ este un spațiu omotop sau cu S^1 (dacă punctul nu este pe bord) sau cu un punct.*

Fie o suprafață poligonală regulată P, cu $2n$ laturi. Considerăm acum un spațiu topologic ce se obține din P prin identificarea laturilor lui P în perechi. Vezi, spre exemplificare, § 11 Cap. I.

---

*) Din l. engleză, aproximativ „verigă".

Considerăm P orientat și fie vîrfurile sale, notate în ordinea orientării, $b^0, b^1, \ldots, b^{2n-1}, b^0$.

Dacă o muchie orientată $[c, d]$ se identifică cu o muchie orientată $[c', d']$, c identificîndu-se cu c' și d cu d', atunci notăm cu o singură literă ambele muchii orientate, de exemplu, x, în vreme ce muchiile orientate $[d, c]$, $[d', c']$ le notăm cu x^{-1}. În felul acesta, spațiul topologic obținut din P prin identificarea în perechi a muchiilor se poate da printr-un șir de simboluri de tipul x sau x^{-1} corespunzătoare șirului de muchii orientate $[b^0, b^1]$, $[b^1, b^2], \ldots, [b^{2n-1}, b^0]$.

EXEMPLE. 4. $T^2 = xyx^{-1}y^{-1}$(vezi fig. 19 § 11 Cap. I).

5. Trompeta lui Klein, $K = xyxy^{-1}$ (vezi fig. 23 § 11 Cap. I).

6. $S^2 = xx^{-1}yy^{-1}$ (vezi fig. 54 a).

7. $P\mathbb{R}^2 = xy^{-1}xy^{-1}$ (vezi fig. 54 b).

NOTAȚIA 1. a) Fie $M_g (g \geqslant 1)$ spațiul topologic obținut dintr-o suprafață poligonală regulată cu $4g$ laturi, identificînd laturile în perechi, conform șirului de simboluri $x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \ldots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$. Pentru $g = 0$, M_0 este reprezentat de $xx^{-1}yy^{-1}$ (sfera S^2).

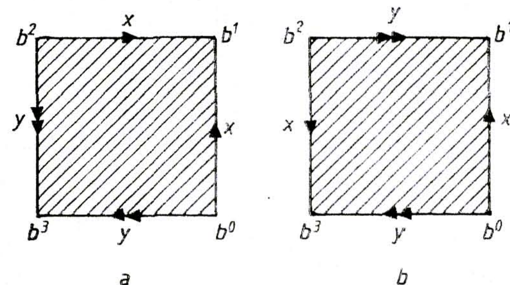


Fig. 54

b) $N_h (h \geqslant 2)$ este spațiul topologic obținut dintr-o suprafață poligonală regulată, cu $2h$ laturi, identificînd laturile acesteia după șirul de simboluri $x_1x_1 \ldots x_hx_h$. Pentru $h = 1$, N_1 este definit ca fiind reprezentat de $xxyy^{-1}$.

OBSERVAȚIA 1. N_1 este homeomorf cu planul proiectiv $P\mathbb{R}^2$. Considerăm în fig. 55b o tăietură a pătratu-

lui după diagonala $[b^1b^3]$ (vezi fig. 55 a) și apoi, făcînd reasamblarea ca în fig. 55 b, obținem $zzyy^{-1}$, adică N_1.

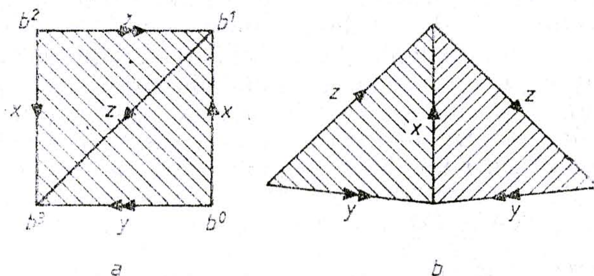


Fig. 55

TEOREMA 1. *Spațiile topologice $M_g(g \geq 0)$ și $N_h(h \geq 1)$ sînt suprafețe închise.*

M_g este numită **suprafață orientabilă avînd genul egal cu** *g, iar N_h* **suprafață neorientabilă avînd genul egal cu** *h.*

Demonstrație. Avem de arătat că spațiile M_g și N_h sînt triangulabile avînd drept triangulări cîte o 2-pseudovarietate fără bord. Aceasta rezultă din demonstrația Teoremei 4 § 7, luînd :

a) În cazul M_g, $\alpha = v^0v^1v'^1v^0w^1w'^1v^0v'^1v^1v^0w'^1w^1v^0 \ldots$ $\ldots v^0v^gv'^gv^0w^gw'^gv^0v'^gv^gv^0w'^gw^gv^0$ și $|K|$ spațiul acestuia, ca în fig. 56 a.

b) În cazul N_h, $\alpha = v^0v^1v'^1v^0v^1v'^1v^0 \ldots v^0v^hv'^hv^0v^hv'^hv^0$ și $|K|$ spațiul acestuia, ca în fig. 56 b.

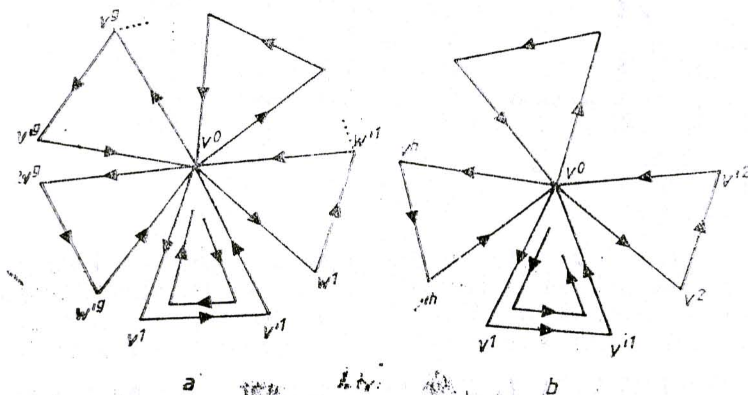


Fig. 56

Este ușor de văzut că spațiul $|K|_\varphi \sqcup D^2$, considerat în Teorema 4, coincide în cazul a) cu spațiul M_g iar în cazul b) cu spațiul N_h. Triangularea construită în demonstrația Teoremei 4 arată că spațiile M_g și N_h sînt spațiile unor 2-pseudovarietăți fără bord, deci sînt suprafețe închise.

Din Teorema 4 § 7 obținem imediat rezultatul următor.

TEOREMA 2. a) $\pi_1(M_g) \cong G\{x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g\,;\, x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \ldots$ $\ldots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}\}$, $g \geq 1$ $(\pi_1(M_0) = 0)$;

b) $\pi_1(N_h) \cong G\{x_1, x_2, \ldots, x_h\,;\, x_1^2x_2^2, \ldots x_h^2\}$.

TEOREMA 3. a) *Suprafețele M_g și $M_{g'}$ sînt distincte omotopic dacă $g \neq g'$;*

b) *Suprafețele N_h și $N_{h'}$ sînt distincte omotopic pentru $h \neq h'$;*

c) *Orice suprafață M_g este distinctă omotopic de orice suprafață N_h.*

DEFINIȚIA 5. Dat un grup G, *subgrupul comutatorilor lui* G, notat $[G, G]$, este subgrupul conținînd toate produsele (finite) de elemente de forma $xyx^{-1}y^{-1}$, $x, y \in G$.

LEMA 2. $[G, G]$ *este subgrup normal al lui G și $G/[G, G]$ este abelian.*

Demonstrație. Fie $a \in G$, $z = zyx^{-1}y^{-1}$. Atunci,

$$aza^{-1} = axyx^{-1}y^{-1}a^{-1} = [(ax)y(ax)^{-1}y^{-1}][yay^{-1}a^{-1}] \in [G, G].$$

Deci $[G, G]$ este subgrup normal. Dacă $\hat{a}, \hat{b} \in G/[G, G]$, atunci $\hat{a}\hat{b}\hat{a}^{-1}\hat{b}^{-1} = \widehat{aba^{-1}b^{-1}} = 1$, adică $\hat{a}\hat{b} = \hat{b}\hat{a}$.

LEMA 3. *Dacă $G \cong H$, atunci $G/[G, G] \cong H/[H, H]$.*

Demonstrație. Fie $f : G \cong H$ un izomorfism. Atunci, $f(xyx^{-1}y^{-1}) = f(x)f(y)(f(x))^{-1}f(y))^{-1}$, deci $f([G, G]) \subset [H, H]$, încît există $f_* : G/[G, G] \to H/[H, H]$ și $f_*^{-1} = (f^{-1})_*$, cum se constată imediat.

LEMA 4. *Dacă $G = \{A\,;\, B\}$ și $p : G\{A\} \to Ab\{A\} = G\{A\}/[G\{A\}, G\{A\}]$**), *atunci $G/[G, G] \cong Ab\{A\,;\, p(B)\}$***) $= Ab\{A\}/\overline{p(B)}$.

*) Arătați că $Ab\{A\}$ este grupul abelian liber generat de A, adică $\mathbb{Z}^{(A)}$.

**) Grupul abelian generat de A și satisfăcînd relațiilor $p(B)$.

Demonstrație. p este epimorfism și dacă $\bar{B}$ este subgrupul normal generat de B, atunci $p(\bar{B}) = \overline{p(B)}$ este subgrupul generat de $p(B)$. Se obține un epimorfism, $p_* : G\{A ; B\} \to Ab\{A ; p(B)\}$, al cărui nucleu este $[G, G]$.

Demonstrația Teoremei 3. a) Utilizînd Teorema 2 și Lema 4, avem

$$\pi_1(M_g)/[\pi_1(M_g), \pi_1(M_g)] \cong Ab\{x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g ;$$

$$; p(x_1 y_1 x_1^{-1} y_1^{-1} \ldots x_g y_g x_g^{-1} y_g^{-1})\} = Ab\{x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g\}.$$

Dacă M_g ar fi echivalent omotopic cu $M_{g'}$, ar urma $\pi_1(M_g) \cong \pi_1(M_{g'})$, și, prin Lema 3,

$$\pi_1(M_g)/[\pi_1(M_{g'}), \pi_1(M_g)] \cong \pi_1(M_{g'})/[\pi_1(M_{g'}), \pi_1(M_{g'})],$$

adică $Ab\{x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g\} \cong Ab\{x_1, y_1, \ldots, x_{g'}, y_{g'}\}$, ceea ce nu poate avea loc dacă $g \neq g'$.

b) $\pi_1(N_h)/[\pi_1(N_h), \pi_1(N_h)] \cong \mathrm{Ab}\{x_1, x_2, \ldots, x_h ; 2(x_1 + \ldots + x_h)\} \cong \mathrm{Ab}\{x_1, x_2, \ldots, x_{h-1}, y ; 2y\}$*) $\cong \mathrm{Ab}\{x_1, \ldots, x_{h-1}\} \oplus \mathbb{Z}_2$. Pentru $h \neq h' \Rightarrow \mathrm{Ab}\{x_1, \ldots, x_{h-1}\} \oplus \mathrm{Z}_2 \ncong \mathrm{Ab}\{x_1, \ldots, x_{h'-1}\} \oplus \mathbb{Z}_2$, deci $\pi_1(N_h) \ncong \pi_1(N_{h'})$.

c) $\mathrm{Ab}\{x_1, y_1, \ldots, x_g, y_g\} \neq \mathrm{Ab}\{x_1, \ldots, x_{h-1}\} \oplus \mathbb{Z}_2$, deci $\pi_1(M_g) \neq \pi_1(N_h)$, $\forall g$, $\forall h$.

TEOREMA 4. *Orice spațiu topologic S, obținut dintr-o suprafață poligonală regulată, cu un număr par de laturi, prin identificarea laturilor acesteia în perechi, este homeomorf sau cu un spațiu M_g sau cu un spațiu N_h. În consecință, S este o suprafață închisă*

Demonstrație. După cum am văzut, S se poate exprima printr-un șir de simboluri $x_1 x_2 \ldots x_{2n}$ cu x_i de tipul x sau x^{-1} și astfel că o literă x apare în șir de două ori. Vom nota prin litere majuscule „monoame" din șir, adică un produs de mai mulți „factori".

Două *șiruri de simboluri* A și B sînt *echivalente*, vom scrie $A \sim B$, dacă spațiile reprezentate de acestea sînt homeomorfe. Vom face demonstrația teoremei în mai multe etape.

---

*) $y = x_1 + \ldots + x_h$.

Etapa I. Au loc următoarele echivalențe :

E$_1$) $ABxCDxE \sim AyDB^{-1}yC^{-1}E$ *) ;

E$_2$) $ABxCDx^{-1}E \sim AyDCy^{-1}BE$;

E$_3$) $Axx^{-1}B \sim AB$ și $Ax^{-1}xB \sim AB$, dacă AB conține cel puțin două litere (fiecare apărînd de două ori).

Echivalențele E$_1$ și E$_2$ rezultă astfel : în suprafețele poligonale regulate, corespunzătoare simbolurilor din primul membru, unim extremitatea lui A cu extremitatea lui C, tăiem suprafața poligonală după această linie și reasamblăm făcînd „lipirea" după x (vezi fig. 57—58).

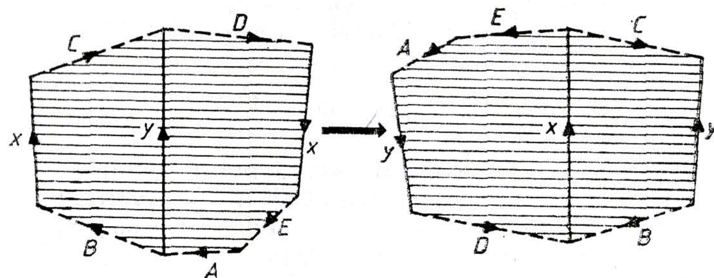


Fig. 57

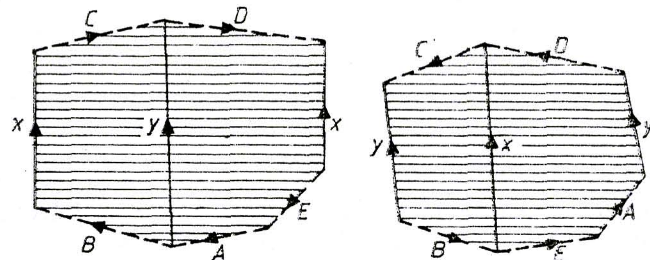


Fig. 58

Echivalența E$_3$ rezultă imediat, prin deformările sugerate în fig. 59.

Etapa II. Fiecare literă x apare într-un șir de două ori. Dacă avem $\ldots x \ldots x \ldots$ sau $\ldots x^{-1} \ldots x^{-1} \ldots$, se spune că x creează o *repetiție*, iar dacă avem $\ldots x \ldots$

---

*) Dacă $M = x_1 \ldots x_p \Rightarrow M^{-1} = x_p^{-1} \ldots x_1^{-1}$.

$\ldots x^{-1} \ldots$ sau $\ldots x^{-1} \ldots x \ldots$, se spune că x creează o *pereche inversată*.

a) Putem arăta că spațiul S este echivalent cu un șir AB, unde A este de forma $x_1x_1x_2x_2 \ldots x_hx_h$ și B conține

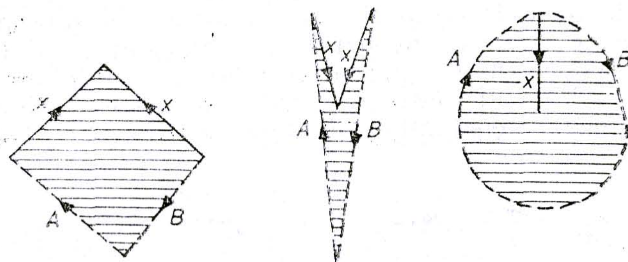


Fig. 59

numai perechi inversate (A sau B pot fi vide). Aceasta rezultă aplicînd echivalența $E_1 : CDxExF \sim CyD^{-1}yE^{-1}F \sim$ $\sim CzzDE^{-1}F$, unde C este presupus deja de forma $x_1x_1x_2x_2\ldots$

Mai facem observația că orice repetiție $\ldots x^{-1} \ldots x^{-1} \ldots$ se poate scrie, schimbînd simbolul x, sub forma $\ldots y \ldots$ $\ldots y \ldots$

b) Șirul AB de mai sus este echivalent cu un șir ACD, unde C este de forma $y_1z_1y_1^{-1}z_1^{-1} \ldots y_gz_gy_g^{-1}z_g^{-1}$ și D nu mai conține *comutatori* $\ldots y \ldots z \ldots y^{-1} \ldots z^{-1} \ldots$ Acest lucru poate fi realizat prin E_2

$$EFaGbHa^{-1}Ib^{-1}J \sim EcGbHc^{-1}FIb^{-1}J \sim$$

$$\sim EcGdFIHc^{-1}d^{-1}J \sim EeFIHGde^{-1}d^{-1}J \sim Eefe^{-1}f^{-1}FIHGJ^{*)},$$

unde „x”-ul din E_2 este luat consecutiv a, b, c, d.

c) Dacă în șirul ACD de mai sus, A este nevid, $ACD \sim$ $\sim ED$, unde E este de forma $x_1x_1x_2x_2 \ldots$ Aceasta se realizează utilizînd în ordine inversă, astfel :

$$Fxxaba^{-1}b^{-1}G \sim Fyb^{-1}a^{-1}ya^{-1}b^{-1}G \sim Fyay^{-1}accG \sim$$
$$\sim FyyddccG,$$

F fiind presupus deja de forma necesară.

*) E este presupus deja de forma unui produs de comutatori.

d) Presupunem că în c), D este un șir nevid. Acesta nu conține comutatori $\ldots y \ldots z \ldots y^{-1} \ldots z^{-1} \ldots$ Dacă în D există perechea inversată $\ldots x \ldots x^{-1} \ldots$, atunci între x și x^{-1} nu poate exista nici un alt simbol, deoarece dacă între x și x^{-1} ar fi $\ldots y \ldots y^{-1} \ldots$, ne ocupăm mai întîi de acesta, iar dacă avem $\ldots x \ldots y \ldots x^{-1} \ldots y^{-1} \ldots$ aceasta conduce la ceea ce am numit un comutator. Avem deci $\ldots xx^{-1} \ldots$ și aplicăm E_3 (dacă ceea ce rămîne conține cel puțin două litere).

Etapa III. Concluzii. Dacă S conține o repetiție $\ldots x \ldots$ $\ldots x \ldots$, atunci, aplicînd pașii din etapa II, se deduce că avem $S \sim x_1x_1 \ldots x_hx_h$, $h \geqslant 2$, sau $S \sim x_1x_1yy^{-1} = N_1$.

Dacă S nu conține repetiții, atunci A, în etapa II, este vid și aplicînd b), c), d), avem $S \sim x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \ldots$ $\ldots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}$, $g \geqslant 1$, sau $x_1x_1^{-1}x_2x_2^{-1} = M_0$. Cu aceasta teorema este complet demonstrată.

TEOREMA 5. *Orice suprafață închisă este homeomorfă cu o suprafață de tip M_g sau cu una de tip N_k.*

Demonstrație. Conform Teoremei 4, este suficient să arătăm că orice suprafață închisă este homeomorfă cu o suprafață obținută dintr-o suprafață poligonală regulată, cu un număr par de laturi, identificînd laturile în perechi.

Fie K o 2-pseudovarietate fără bord și σ_2 un 2-simplex din K. Spațiul σ_2 este homeomorf cu o suprafață triunghiulară din $\mathbb{R}^2$ (Lema 2 § 5). Alegem o 1-față τ_1 a lui σ_2. Prin condiția ii) din Def. 1, mai există încă exact un 2-simplex $\sigma_2' \in K$, încît $\tau_1 < \sigma_2'$. Atunci, $\sigma_2 \cup \sigma_2'$ este un spațiu homeomorf cu o suprafață pătrată din $\mathbb{R}^2$. Dacă 1-fețele, diferite de τ_1, ale simplexelor σ_2 și σ_2' sînt identificate cîte două în K, atunci se fac identificările corespunzătoare pe laturile pătratului, obținîndu-se spații homeomorfe. Dacă pătratul are o 1-față „liberă” se atașează un nou triunghi, corespunzător unui 2-simplex din K. Continuînd, se obține o suprafață poligonală P, în care laturile se identifică perechi, obținîndu-se o suprafață S. Avem de arătat că S este homeomorfă cu spațiul $|K|$, deci că P nu se poate „închide” pînă nu se epuizează „transportul” în $\mathbb{R}^2$ a tuturor 2-simplexelor lui K. Să presupunem contrariul, că S este homeomorfă cu un subpoliedru $|L|$ al lui $|K|$. Datorită condiției iii) din Def. 1, fiecare vîrf din L poate fi unit printr-un ep cu fiecare vîrf din $K \setminus L$. Fie

u un vîrf din L și v un vîrf în $K\setminus L$, încît $[u, v]$ este 1-simplex în $K\setminus L$ (vezi fig. 60).

Vom arăta că $|\mathrm{Lk}(u)|$ nu este liniar conex. Fie $w \in \mathrm{Lk}(u) \cap L$ și $v \in (K\setminus L) \cap \mathrm{Lk}(u)$. Există atunci un drum de muchii în $\mathrm{Lk}(u)$ de la w la v. Rezultă că există $w' \in K\setminus L$, $w' \in \mathrm{Lk}(u)$, astfel încît $[w, w'] \subset \mathrm{Lk}(u)$ și $[u, w, w'] \in K\setminus L$. Prin definiția lui L, orice 1-simplex, în particular $[u, w]$, este față a două 2-simplexe din L. Mai avem și $[u, w] < [u, w, w']$, contrar condiției ii) din Def. 1. La această contradicție am ajuns presupunînd că $\mathrm{Lk}(u)$ este liniar conex. Așadar, dacă $|L| \neq |K| \Rightarrow |\mathrm{Lk}(u)|$ nu este liniar conex, contrar Lemei 1. Prin urmare, $|L| = |K|$ și deci $|K|$ este homeomorf cu S.

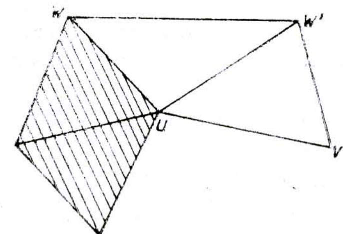


Fig. 60

OBSERVAȚIA 2. Teoremele 5 și 3 determină clasificarea suprafețelor închise.

COROLAR 1. *Orice suprafață închisă simplu conexă este homeomorfă cu sfera S^2.*

Demonstrație. Se aplică Teorema 5 și Teorema 2.

OBSERVAȚIA 3. De Corolarul 1 se leagă rezultatul următor.

Conjectura lui Poincaré. *Fiecare 3-varietate simplu conexă este homeomorfă cu sfera S^3.*

Conjectura corespunzătoare în dimensiunea patru este falsă: 4-varietatea $S^2 \times S^2$ este simplu conexă, dar nu este homeomorfă cu S^4, deoarece $\pi_2(S^2 \times S^2) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ iar $\pi_2(S^4) = 0$.

Introducerea de către Hurewicz a tipului de omotopie a condus la următoarea extindere a conjecturii lui Poincaré.

Conjectura generalizată a lui Poincaré. *Fiecare n-varietate care este echivalentă omotopic cu S^n este homeomorfă cu S^n.*

Această conjectură a fost dovedită ca adevărată pentru orice $n \geq 4$. Pentru $n > 4$ demonstrația a fost dată în

jurul anului 1960*) iar cazul $n = 4$ a fost rezolvat recent**). Cazul $n = 3$ și conjectura lui Poincaré sînt încă nerezolvate.

DEFINIȚIA 6. Fie X și Y două suprafețe (cu sau fără bord). Fie $f : D^2 \to X$, $g : D^2 \to Y$ două scufundări. Spațiul obținut din suma $(X\setminus f(\mathring{D}^2)) \sqcup (Y\setminus g(\mathring{D}^2))$, prin identificarea punctelor $f(z)$ și $g(z)$, pentru orice $z \in S^1 \subset D^2$, se numește *suma conexă* a lui X cu Y și se notează $X \# Y$***).

TEOREMA 6. a) *Spațiul $M_g \# M_1$ este homeomorf cu M_{g+1};*

b) *Spațiul $N_h \# N_1$ este homeomorf cu N_{h+1};*

c) *Spațiul $N_h \# M_0$ este homeomorf cu N_h.*

Demonstrație. a) Fie $g = 0$ și $f_1 : D^2 \to M_0 = S^2$, $f_2 : D^2 \to M_1$ două scufundări (vezi fig. 61). Spațiile $M_0\setminus f_1(\mathring{D}^2)$ și $M_1\setminus f_2(\mathring{D}^2)$ sînt reprezentate în fig. 62a, iar $M_0 \# M_1$ este obținut identificînd, ca în fig. 62 b, z_1 cu z (și efectuînd și identificările necesare anterior). Pentru suprafața rezultată, $x_1xyx^{-1}y^{-1}x_1^{-1}y_1y_1^{-1}$, aplicăm echivalența E_3 și obținem $x_1xyx^{-1}y^{-1}x_1^{-1}$ care, prin permutări circulare, se scrie $xyx^{-1}y^{-1}x_1^{-1}x_1$ și deci, iarăși prin E_3, obținem $xyx^{-1}y^{-1}$, adică M_1.

Pentru $g \geq 1$, avem

$$M_g \# M_1 \sim x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1} \ldots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1}yxy^{-1} = M_{g+1}$$

(vezi fig. 63).

b) $N_1 \# N_1 \sim x_1x_1y_1y_1^{-1}x_2x_2y_2y_2^{-1} \overset{E_3}{\sim} x_1x_1x_2x_2 = N_2$;

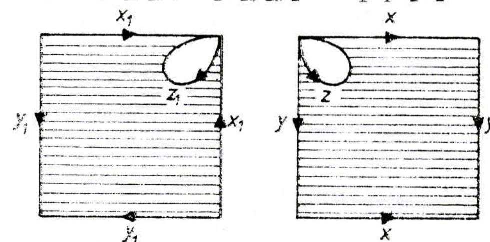


Fig. 61

*) S. Smale, Bull. Amer. Math. Soc. **69** (1963), 131–145; J.R. Stallings, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 485–488; E.C. Zeeman, Bull. Amer. Math. Soc. **67** (1961), 270.

) M.H. Freedman and F. Quinn (Topology, **20 (1981), no. 2, 161–173); M.H. Freedman, J. Diff. Geometry **17** (1982), no. 3, 357–453.

***) Definiția nu depinde de scufundările particulare f și g, cum se arată în [43, exerc. 3.14, p. 37].

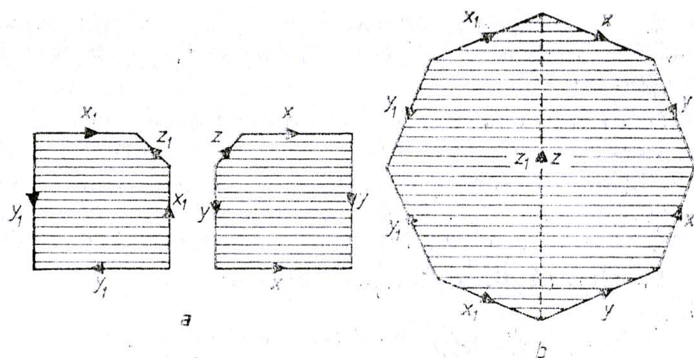


Fig. 62

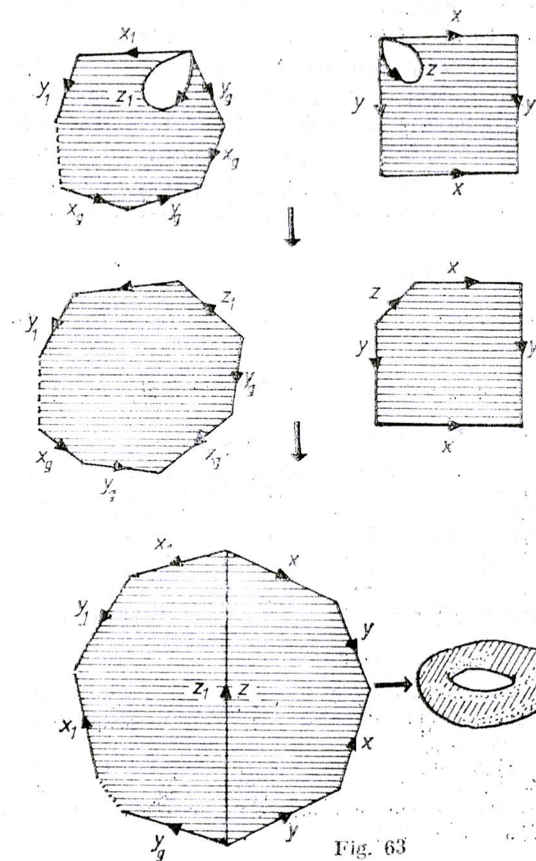


Fig. 63

Pentru $h \geqslant 2$, avem

$$N_h \# N_1 \sim x_1x_1x_2x_2 \dots x_hx_hxxyy^{-1} \overset{E_3}{\sim} x_1x_1x_2x_2 \dots$$
$$\dots x_hx_hxx = N_{h+1};$$

c) $N_h \# M_0 \sim x_1x_1 \dots x_hx_hxx^{-1}yy^{-1} \overset{E_3}{\sim} x_1x_1 \dots x_hx_h = N_h$ dacă $h \geqslant 2$, și $N_1 \# M_0 \sim x_1x_1y_1y_1^{-1}xx^{-1}yy^{-1} \overset{E_3}{\sim} x_1x_1y_1y_1^{-1} = N_1$.*

COROLAR 2. *Orice suprafață închisă este homeomorfă cu unul din spațiile :*

a) $S^2 \# \underbrace{T^2 \# \dots \# T^2}_{g \text{ ori}}$, $g \geqslant 0$;

b) $S^2 \# \underbrace{P\mathbb{R}^2 \# \dots P\mathbb{R}^2}_{h \text{ ori}}$ **), $h \geqslant 1$.

OBSERVAȚIA 4. Luarea sumei conexe cu un tor (M_1) este adeseori numită *atașarea unui mîner* (un mîner fiind un tor din care s-a îndepărtat un disc deschis) (vezi fig. 64). Se obține același spațiu ca și prin *atașarea unui cilindru* (vezi fig. 65).

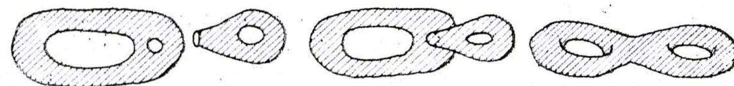


Fig. 64

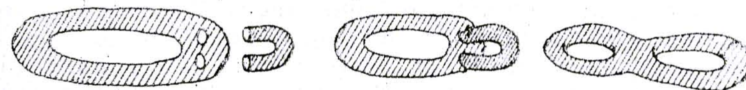


Fig. 65

Luarea sumei conexe cu planul proiectiv ($P\mathbb{R}^2 = N_1$) este numită și *atașarea unei benzi Möbius* (vezi fig. 66).

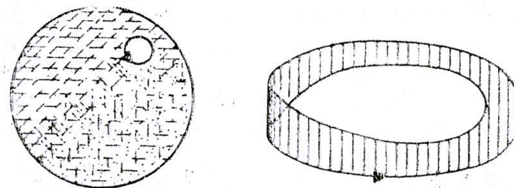


Fig. 66

*) Faceți desenele corespunzătoare pentru cazurile b) și c).

**) S^2 este scris pentru analogie cu a); vezi însă mai departe și afirmațiile a′) și b′).

Corolarul 2 poate fi enunțat și astfel:
Orice suprafață închisă este homeomorfă cu unul din următoarele spații:

a') *O sferă căreia i s-au atașat g mînere,* $g \geq 0$;

b') *O sferă căreia i s-au atașat h benzi Möbius,* $h \geq 1$.

TEOREMA 7. *O suprafață cu bord nevid, avînd bordul format din* $r(\geq 1)$ *componente liniar conexe, este homeomorfă cu unul din următoarele spații:*

a) M_g^r, *obținut dintr-o suprafață poligonală regulată cu* $4g+3r$ *laturi, identificînd laturile acesteia conform șirului de simboluri*

$$a_1b_1a_1^{-1}\dots a_rb_ra_r^{-1}x_1y_1x_1^{-1}y_1^{-1}\dots x_gy_gx_g^{-1}y_g^{-1},\quad g\geq 0;$$

b) N_h^r, *obținut dintr-o suprafață poligonală regulată cu* $2h+3r$ *laturi, prin identificări de forma*

$$a_1b_1a_1^{-1}\dots a_rb_ra_r^{-1}x_1x_1x_2x_2\dots x_hx_h,\quad h\geq 1.$$

Demonstrație. Dacă $|L|$ este o componentă liniar conexă a bordului $\partial|K|$, a suprafeței date $|K|$, prin eventuale subdivizări, se poate presupune că orice 2-simplex are intersecția cu $|L|$ fie vidă, fie o față.

Atunci, în mod analog demonstrației Teoremei 5, se arată că subpoliedrul lui $|K|$, constînd din acele 2-simplexe ce intersectează $|L|$ este homeomorf cu spațiul obținut dintr-o suprafață poligonală regulată identificînd laturile după șiruri $aba^{-1}c$ (eventual c poate lipsi).

Utilizînd suprafețele poligonale corespunzătoare la toate componentele liniar conexe ale lui $\partial|K|$, împreună cu suprafețele triunghiulare date de celelalte 2-simplexe ale lui K, în modul în care au fost folosite în Teorema 5, și aplicînd echivalențele E_1-E_3, se obține M_g^r sau N_h^r. Faptul că M_g^r și N_h^r sînt suprafețe cu bord rezultă din demonstrația Teoremei 4 § 7, analog deducerii Teoremei 1.

TEOREMA 8. *Fie* $r\geq 1$. a) M_g^r *este un spațiu topologic echivalent omotopic cu un buchet de* $2g+r-1$ *cercuri,* $g\geq 0$;

b) N_h^r *este echivalent omotopic cu un buchet de* $h+r-1$ *cercuri,* $h\geq 1$.

Demonstrație. a) Dacă $g\geq 1$, atunci M_g^r se obține dintr-o suprafață poligonală regulată P, cu $4g$ laturi, din interiorul căruia s-au înlăturat interioarele a r discuri disjuncte (vezi fig. 67).

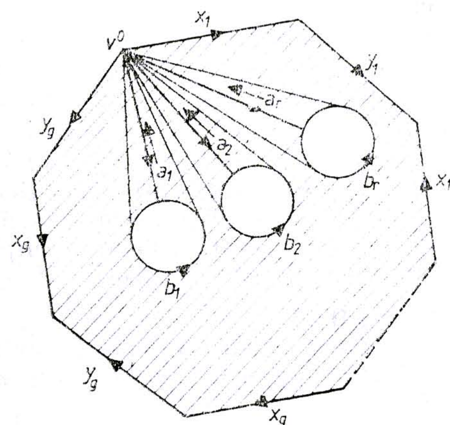


Fig. 67

Aranjăm discurile din interior, încît orice dreaptă ce trece prin v^0 să nu intersecteze mai mult decît un cerc. Fie A mulțimea constînd din frontiera lui P, din segmentele de tangente duse din v^0 la cercurile $b_1,\dots,b_{r-1}$ și din arcele exterioare ale acestor cercuri cuprinse între punctele de tangență. Atunci, se constată ușor că A este retractă tare de deformare a suprafeței poligonale fără interioarele celor r discuri. Prin identificările necesare, în frontiera lui P, pentru a obține M_g^r, se deduce că un buchet format din $2g+r-1$ cercuri este retractă tare de deformare a lui M_g^r. Dacă $g=0$, atunci M_g^r se obține dintr-o suprafață triunghiulară, din interiorul căruia s-au înlăturat interioarele a $r-1$ discuri disjuncte (vezi fig. 68).

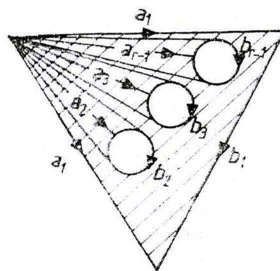


Fig. 68

b) Se procedează cu totul analog.

COROLAR 3. a) $\pi_1(M_g^r)\cong G\{b_1,\dots,b_{r-1},x_1,y_1,\dots x_g,y_g\}$ — *grupul liber cu* $2g+r-1$ *generatori;*

b) $\pi_1(N_h^r)\cong G\{b_1,\dots,b_{r-1},x_1,\dots,x_h\}$ — *grupul liber cu* $h+r-1$ *generatori.*

TEOREMA 9. *Suprafețele* M_g^r, $M_{g'}^{r'}$, N_h^r, $N_{h'}^{r'}$ *sînt cîte două distincte topologic dacă* $(g,r)\neq(g',r')$ *și* $(h,r)\neq(h',r')$.

Demonstrație. Să presupunem că M_g^r și $M_{g'}^{r'}$ sînt homeomorfe. Atunci, deoarece prin homeomorfisme linkul unui punct nu-și schimbă tipul omotopic *) rezultă, din Lema 1, că $r = r'$.

Pe de altă parte, din $\pi_1(M_g^r) \cong \pi_1(M_{g'}^{r'})$ și din Cor. 3, deducem $2g + r - 1 = 2g' + r - 1$, adică $g = g'$, ceea ce implică $(g, r) = (g', r')$, contrar ipotezei. Analog se arată că sînt distincte N_h^r și $N_{h'}^{r'}$, pentru $(h, r) \neq (h', r')$.

În sfîrșit, dacă M_g^r și $N_h^{r'}$ sînt homeomorfe, deducem că $r = r'$ Apoi, prin atașarea la fiecare din aceste suprafețe a cîte r discuri D^2, obținem două suprafețe închise homeomorfe. Aceasta este însă imposibil deoarece suprafețele obținute sînt respectiv M_g și N_h.

OBSERVAȚIA 5. a) Dacă $2g + r = 2g' + r'$, M_g^r și $M_{g'}^{r'}$, sînt echivalente omotopic, chiar dacă $(g, r) \neq (g', r')$ $(r \geqslant 1,\ r' \geqslant 1)$ și deci topologic sînt distincte;

b) Dacă $h + r = h' + r'$, N_h^r și $N_{h'}^{r'}$ sînt echivalente omotopic, chiar dacă $(h, r) \neq (h', r')$ $(r \geqslant 1,\ r' \geqslant 1)$ și deci topologic sînt distincte;

c) Dacă $2g + r = h + r'$, spațiile M_g^r și $N_g^{r'}$ sînt echivalente omotopic $(r \geqslant 1,\ r' \geqslant 1)$, dar sînt distincte topologic.

EXERCIȚII

1. Să se arate că trompeta lui Klein este homeomorfă cu spațiul N_2

Indicație. Se procedează ca în fig. 69.

2. Să se arate că suprafața $N_h \# M_1$ este homeomorfă cu N_{h+2}, $h \geqslant 1$.

Indicație. Pentru $h = 1$ vezi c) p. 250. Pentru $h \geqslant 2$ se aplică Teorema 6 b).

Fig. 69

3. Să se arate că $S = nT^2 \# \# mP\mathbb{R}^2$ este o suprafață homeomorfă cu $(m + 2n)P\mathbb{R}^2$ (am notat $hX = \underbrace{X \# X \# \ldots \# X}_{h \text{ ori}}$).

4. Să se arate că dacă S este suprafața obținută din D^2 prin înlăturarea a r discuri deschise, disjuncte, atunci $\pi_1(S)$ este grupul liber avînd r generatori.

Indicație. S este homeomorfă cu M_0^{r+1}.

*) Pentru detalii vezi exerc. 7.

5. Să se precizeze tipul și grupul fundamental al suprafeței din fig. 70.

6. Să se arate că N_1^1 este homeomorfă cu banda lui Möbius.

Indicație. Vezi figura 71.

7. Fie K și L două complexe simpliciale și $f: |K| \to |L|$ o scufundare. Atunci, pentru orice $x \in \in |K|$, încît $f(x)$ este conținut într-o mulțime deschisă U a lui $|L|$, cu $U \subset f(|K|)$, are loc echivalența omotopică $|\mathrm{Lk}_K(x)| \simeq \simeq |\mathrm{Lk}_L(f(x)|$.

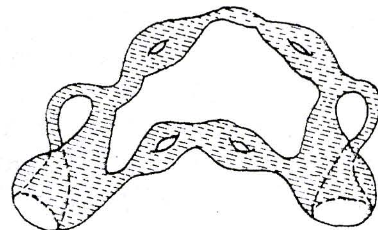


Fig. 70

Soluție. Fie σ = carrier $f(x)$. Atunci, $f(x) \in U \cap \mathrm{st}(\sigma) \subset |N_L(f(x))|$, încît $f^{-1}(U \cap \mathrm{st}(\sigma))$ este o deschisă ce conține x și avînd imaginea în $|N_L(f(x))|$. Pentru $0 < \lambda \leqslant 1$, fie $\lambda|N_K(x)| = \{(1 - \lambda)x + \lambda y \mid y \in |N_K(x)|\}$. Atunci, $\lambda|N_K(x)|$ este evident homeomorf cu $|N_K(x)|$. Deoarece $f^{-1}(U \cap \mathrm{st}(\sigma))$ este deschisă și $|N_K(x)|$ este mărginit, există λ, încît $x \in \lambda|N_K(x)| \subset f^{-1}(U \cap \mathrm{st}(\sigma)|$ și deci $f(x) \in f(\lambda|N_K(x)|) \subset |N_L(f(x))|$. În mod analog, găsim $\mu, \nu \in (0, 1]$, încît $f(x) \in \in f(\nu|N_K(x)|) \subset \mu|N_L(f(x))| \subset f(\lambda|N_K(x)|) \subset |N_L(f(x))|$. Fie $y \in \mu|\mathrm{Lk}_L(f(x))| = = \{(1 - \mu)f(x) + \mu z \mid z \in |\mathrm{Lk}_L(f(x))|\}$. Deoarece $|N_L(f(x))|$ este stelată în raport cu $f(x)$ și orice semidreaptă cu originea în $f(x)$ intersectează $|\mathrm{Lk}_L(f(x))|$ într-un punct, putem defini o aplicație $\varphi : \mu|\mathrm{Lk}_L(f(x))| \to \to f(\nu|\mathrm{Lk}_K(x)|)$, proiectînd $f^{-1}(y)$ în lungul razelor prin x în $\lambda|N_K(x)|$ și apoi aplicînd f. În mod analog, definim $\psi : f(\nu|\mathrm{Lk}_K(x)|) \to \mu|\mathrm{Lk}_L(f(x))|$ prin proiecția radială din $f(x)$ în $\mu|N_L(f(x))|$. Fie acum $F : \mu|\mathrm{Lk}_L(f(x))| \times \times I \to |N_L(f(x))| \setminus \{f(x)\}$, omotopia ce se obține „lipind" omotopia lini-

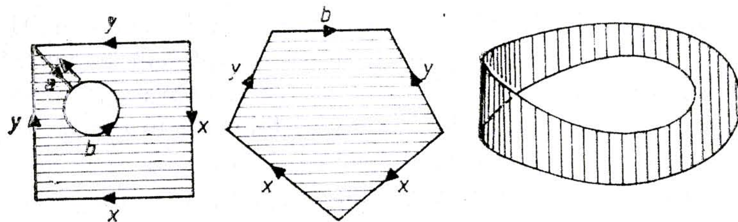


Fig. 71

ră dintre f^{-1} și $f^{-1}\varphi$, compusă cu f, și omotopia liniară între φ și $\psi\varphi$. Atunci, $F : 1 \simeq \psi\varphi$ și dacă $g : |N_L(f(x))| \setminus \{f(x)\} \to \mu|\mathrm{Lk}_L(f(x))|$ este proiecția radială din $f(x)$, $gF : 1 \simeq \psi\varphi$. Analog, deducem $\varphi\psi \simeq 1$, deci $\mu|\mathrm{Lk}_L(f(x))| \simeq f(\mu|\mathrm{Lk}_K(x)|)$. Datorită homeomorfismelor anterioare, obținem $|\mathrm{Lk}_L(f(x))| \simeq |\mathrm{Lk}_K(x)|$.

§ 9. Complexe semisimpliciale. Teorema lui Mardešić

DEFINIȚIA 1. Un *complex semisimplicial* X constă dintr-un șir de mulțimi disjuncte $\{X_n | n = 0, 1, \ldots\}$ împreună cu două sisteme de aplicații:

$d_i : X_{n+1} \to X_n$, $i = 0, 1, \ldots, n+1$, *i-operator față* și $s_j : X_n \to X_{n+1}$, $j = 0, 1, \ldots, n$, *j-operator de degenerare*, aceste aplicații fiind supuse următoarelor condiții:

1) $d_i d_j = d_{j-1} d_i$, $i < j$;

2) $d_i s_j = s_{j-1} d_i$, $i < j$;

3) $d_j s_j = \text{identitatea} = d_{j+1} s_j$;

4) $d_i s_j = s_j d_{i-1}$, $i > j+1$;

5) $s_i s_j = s_{j+1} s_i$, $i \leqslant j$.

Elementele mulțimii X sînt numite *n-simplexe*. Un simplex de forma $s_i\, x$ se numește *degenerat*. Un simplex care nu este de această formă se numește *nedegenerat*.

DEFINIȚIA 2. Dacă X și Y sînt două complexe semisimpliciale, o *aplicație semisimplicială* $f : X \to Y$ constă dintr-un șir de aplicații de mulțimi $f_n : X_n \to Y_n$, încît $d_i f_{n+1} = f_n d_i$ și $s_j f_{n-1} = f_n s_j$.

EXEMPLE. 1. Fie K un complex simplicial cu mulțimea vîrfurilor $V = \{v^i\}$, pe care o presupunem ordonată printr-o relație de ordine $\#$. Construim complexul semisimplicial $K^\#$ astfel: $K_n^\#$ este mulțimea tuturor șirurilor ordonate nedescrescătoare $\langle v^0, v^1, \ldots, v^n \rangle$ de elemente din V, elementele acestora (nu neapărat distincte) fiind vîrfuri ale unor simplexe din K; operatorii d_i și s_j sînt definiți prin formulele:

$$d_i \langle v^0, \ldots, v^n \rangle = \langle v^0, \ldots, v^{i-1}, v^{i+1}, \ldots, v^n \rangle,$$

$$s_j \langle v^0, v^1, \ldots, v^n \rangle = \langle v^0, \ldots, v^j, v^j, \ldots, v^n \rangle.$$

Se verifică ușor condițiile 1)—5) din Def. 1. Dacă $f : K \to L$ este o aplicație simplicială și f este monoton nedescrescătoare pe mulțimea vîrfurilor, atunci se poate defini aplicația semisimplicială $f^\# : K^\# \to L^\#$ prin,

$$f_n^\#(\langle v^0, \ldots, v^n \rangle) = \langle f(v^0), \ldots, f(v^n) \rangle.$$

2. Fie X un spațiu topologic arbitrar, Δ^n simplexul standard n-dimensional (exemplul 2 § 5) și

$$\sum\nolimits_n(X) = \{x_n : \Delta^n \to X \mid x_n \text{ continuă}\} = \text{Top}\,(\Delta^n, X).$$

Considerăm aplicațiile

$$d_i^* : \Delta^n \to \Delta^{n+1},\ d_i^*(t_0, \ldots, t_n) = (t_0, \ldots, t_{i-1}, 0, t_i, \ldots, t_n),$$

$$s_j^* : \Delta^n \to \Delta^{n-1},\ s_j^*(t_0, \ldots, t_n) = (t_0, \ldots, t_{j-1}, t_j + t_{j+1}, t_{j+2}, \ldots, t_n).$$

Putem defini atunci

$$d_i : \sum\nolimits_n(X) \to \sum\nolimits_{n-1}(X),\ d_i(x_n) = x_n d_i^*,$$

$$s_j : \sum\nolimits_n(X) \to \sum\nolimits_{n+1}(X),\ s_j(x_n) = x_n s_j^*.$$

Rezultă imediat că se obține astfel un complex semisimplicial $\Sigma(X)$, *complexul semisimplicial singular al lui* X.

Dacă $f : X \to Y$ este o aplicație continuă, atunci, definind $\Sigma(f)_n : \Sigma_n(X) \to \Sigma_n(Y)$ prin $\Sigma(f)_n(x_n) = f x_n$, se obține o aplicație semisimplicială.

Fie X un complex semisimplicial. Considerăm suma topologică $M(X) = \coprod_{n \geqslant 0} (\Delta^n \times X_n)$, X_n fiind cu topologia

discretă, și pe aceasta luăm următoarea relație de echivalență :

$$(d_i^* t, x_n) \sim (t, d_i x_n), \ \forall t \in \Delta^n, \ x_n \in X_n ;$$

$$(s_j^* t, x_n) \sim (t, s_j x_n), \ \forall t \in \Delta^{n+1}, \ t \in X_n,$$

și, în general, $(t, x) \sim (u, y)$ dacă există un lanț finit de echivalențe elementare, ca cele de mai sus, unind (t, x) cu (u, y).

Notăm prin $|X|$ spațiul topologic cît $M(X)/\sim$, $\eta : M(X) \to |X|$ proiecția canonică și $\eta(t, x) = [t, x]$. Dacă $f : X \to Y$ este o aplicație semisimplicială, aceasta induce o aplicație continuă $|f| : |X| \to |Y|$, $|f|([t, x]) = [t, f(x)]$.

LEMA 1. *$M(X)$ are o structură de CW-complex.*

Demonstrație. Putem scrie $M(X) = \bigsqcup_{n \geq 0} \Delta^n_{x_n}$, unde $\Delta^n_{x_n}$ este o copie a lui Δ^n. Din structura de CW-complex a lui Δ^n rezultă imediat structura de CW-complex pentru $M(X)$.

Dacă $I = (i, \ldots, j)$ este o mulțime ordonată de indici, încît se poate considera compunerea $d_i \circ \ldots \circ d_j$, vom nota aceasta prin d_I (d_Φ = identitatea). Analog, $s_I = s_i \circ \ldots \circ s_j$ și $s_\Phi = \text{id}$.

Orice *operator semisimplicial* ψ se poate scrie ca un produs $D \cdot F = s_J d_I$, $J = (j_1, \ldots, j_p)$, $I = (i_1, \ldots, i_q)$, $j_1 > \ldots > j_p$, și $i_1 < \ldots < i_q$. Aceasta datorită condițiilor 1)–5) din Def. 1.

Dacă $\psi = s_J d_I : X_p \to X_q$, atunci, notăm $\psi^* = d_{\bar{I}}^* s_{\bar{J}}^* : \Delta^q \to \Delta^p$, unde $\bar{I} = (i_q, \ldots, i_1)$, $\bar{J} = (j_p, \ldots, j_1)$.

LEMA 2. *În orice clasă de echivalență din $|X|$ există un element (t, x_n) și numai unul, cu t un punct în interiorul lui Δ^n, iar $x_n \in X$, un simplex nedegenerat. Numim această pereche un* **reprezentant ireductibil** *pentru $[t, x_n]$. Dacă (t, x) este ireductibil, la fel este (u, x), cu $u \in \text{Int}\ \Delta^n$.*

Demonstrație. Vom defini o funcție θ care asociază unui punct din $M(X)$ un reprezentant ireductibil, ast fel. Dat $(t, x) \in M(X)$, putem scrie $t = F^* t'$, unde F este un operator față și t' este un punct interior unui simplex standard. Scriem acum $Fx = Dx'$, unde D este un operator de degenerare sau identitatea, iar x' este nedegenerat. Definim $\theta(t, x) = (D^* t', x')$. Deoarece t' este punct interior, imaginea sa prin D^* este la fel și, x' fiind nedegenerat, rezultă că $\theta(t, x)$ este ireductibil în $M(X)$. Demonstrația unicității reprezentării o lăsăm cititorului. Apoi, dacă (t, x) este ireductibil, x este nedegenerat și deci (u, x), cu u interior unui simplex, este ireductibil.

NOTAȚIA 1. Dacă $\sigma^p = F^* \Delta^p$ este o față p-dimensională a lui Δ^n și x_n este un n-simplex, notăm celula corespunzătoare a lui (Δ^n, x_n) prin (σ^p, x_n) iar interiorul său prin $(\text{Int}\ \sigma^p, x_n)$.

COROLAR 1. *Dacă t este interior lui Δ^p și $(F^* t, x_n)$ are un reprezentant ireductibil $(\bar{t}, \bar{x}_q)$, atunci $\eta(\text{Int}\ \Delta^q, \bar{x}_q) = \eta(\text{Int}\, \sigma^p, x_n)$ și $\eta(\sigma^p, x_n) = \eta(\Delta^q, \bar{x}_q)$.*

Demonstrație. Din demonstrația Lemei 2, avem $Fx_n = D\bar{x}_q$ și $D^* t = \bar{t}$ Atunci, pentru orice $u \in \Delta^p$, $(F^* u, x_n) \sim (D^* u, \bar{x}_q)$ și deci $\eta(\sigma^p, x_n) = \eta(\Delta^q, \bar{x}_q)$. Apoi, deoarece D^* este simplicială, aceasta aplică punctele interioare în puncte interioare și deci $\eta(\text{Int}\ \Delta^p, x_n)) = \eta(\text{Int}\ \Delta^q, \bar{x}_q)$.

LEMA 3. *Relația „$\sim$" pe $M(X)$ este celulară și are graficul închis.*

Demonstrație. Fie (σ^p, x_n) o celulă arbitrară din $M(X)$. Cu Notația 1 și Cor. 1, avem $\eta^{-1}(\eta(\text{Int}\ \sigma^p, x_n)) = \eta^{-1}(\eta(\text{Int}\ \Delta^q, \bar{x}_q))$. Aplicînd încă o dată Cor. 1, obținem, din faptul că $(\Delta^q, \bar{x}_q)$ este ireductibilă *), că dacă o celulă deschisă $(\text{Int}\ \tau^r, x')$ intersectează $\eta^{-1}(\eta(\text{Int}\ \Delta^q), \bar{x}_q)$, atunci $(\text{Int}\ \tau^r, x') \subset \eta^{-1}(\eta(\text{Int}\ \Delta^q, \bar{x}_q))$. Este satisfăcută astfel condiția i) din Def. 5 § 1. Dacă (σ^p, x_n) este minimală în raport de relația „$\sim$", atunci celula ireductibilă echivalentă cu aceasta trebuie să aibă aceeași dimensiune, deci să fie $(\Delta^p, \bar{x}_p)$, încît $\bar{x}_p = Fx_n$, prin Cor. 1. Astfel, dacă $(F^* \Delta^p, x_n) = (\sigma, x)$ este o celulă minimală, aplicația sa caracteristică $\varphi_{(\sigma, x)} = \varphi$ și aplicația caracteristică $\varphi_{\bar{x}}$ a celulei sale ireductibile $(\Delta^p, Fx_n) = (\Delta^p, \bar{x}_p)$, satisfac $\varphi_{(\sigma, x)} = (\varphi_{\bar{x}_p}) F^*$, deoarece $F^* : (\Delta^p, \bar{x}_p) \to (\sigma^p, x_n)$ este o bijecție. Deci, are loc condiția iii) din Def. 5 § 1.

*) $(u, \bar{x}_q)$ cu $u \in \text{Int}\ \Delta^q$ este ireductibilă.

De asemenea, avem $\varphi(\Delta^p) = \varphi_{\bar{x}}(\Delta^p)$ şi, deoarece $\varphi | (\mathrm{Int}\sigma^p, \bar{x}_p)$ este bijecţie, deducem că $\varphi | (\mathrm{Int}\ \sigma^p, x_n)$ este bijecţie pentru orice celulă minimală (σ^p, x_n). Este satisfăcută deci condiţia ii) din Def. 5 § 1.

În sfîrşit, relaţia „ $\sim$ " are graficul închis, deoarece orbita unei perechi (t, x_n) este discretă, şi se aplică apoi Lema 2.

Aplicînd Teorema 5 § 1, obţinem rezultatul următor.

COROLAR 2. *Spaţiul topologic $|X|$ este un CW-complex, încît proiecţia canonică $\eta : M(X) \to |X|$ este o aplicaţie celulară.*

Vom preciza mai mult structura de CW-complex a lui $|X|$. Avem mai întîi, din Lemele 2 şi 3.

COROLAR 3. *Dacă x_n este n-simplex nedegenerat al lui X, atunci (Δ^n, x_n) este o celulă minimală în $M(X)$. Dacă (σ^p, x_p) este minimală în $M(X)$, atunci este echivalentă cu o celulă ireductibilă (Δ^n, x_n).*

LEMA 4. *Dacă σ^p este o faţă a unui simplex din $M(X)$ şi dacă $(\Delta^q, \bar{x}_q)$ este unicul reprezentant ireductibil şi minimal, „ $\sim$ "-echivalent cu σ^p, atunci aplicaţia caracteristică $\varphi_{\sigma^p} : \sigma^p \to |X|$ se factorizează astfel : $\sigma^p \xrightarrow{\psi} (\Delta^p, \bar{x}_q) \xrightarrow{\varphi_{\bar{x}}} |X|$, pentru ψ o aplicaţie simplicială.*

Demonstraţie. Fie $\sigma = \{(F^*t, x_n) | t \in \Delta^p, x_n \in X_n\}$, unde F^* este operatorul faţă $F^* : \Delta^p \hookrightarrow \Delta^n$. Avem

$$\mathrm{Int}\ \sigma = \{(F^*t, x_n) | t \in \mathrm{Int}\ \Delta^p\}.$$

Fie θ aplicaţia din Lema 2 şi fie, pentru $(F^*t, x_n) \in \in \mathrm{Int}\ \sigma$, $\theta(F^*t, x_n) = (u, \bar{x}_q)$, cu $Fx_n = D\bar{x}_q$, D un operator de degenerare, $\bar{x}_q$ reductibil şi $D^*t = u$.

Definim $\psi : \sigma^p \to (\Delta^q, \bar{x}_q)$, prin $\psi(F^*t, x_n) = (D^*t, \bar{x}_q)$. Aceasta este simplicială şi $\varphi_{\bar{x}}\psi = \varphi_{\sigma^p}$.

Aplicînd acum Cor. 2, 3 şi Lema 4, are loc teorema următoare.

TEOREMA 1. *Spaţiul topologic $|X|$ este un CW-complex, cu cîte o n-celulă $|x_n|$ pentru fiecare n-simplex x_n nedegenerat al lui X. Aplicaţia caracteristică a celulei $|x_n|$ este compunerea incluziunii lui (Δ^n, x_n)*) în $M(X)$ cu proiecţia canonică $\eta : M(X) \to |X|$. CW-complexul $|X|$ este numit* **realizarea geometrică** *a complexului semisimplicial X.*

*) Identificăm Δ^n cu D^n.

Dacă X este un spaţiu topologic arbitrar şi $\Sigma(X)$ este complexul semisimplicial din exemplul 2, putem considera realizarea geometrică a acestuia, $|\Sigma(X)|$. Definim aplicaţia $j_X : |\Sigma(X)| \to X$, prin $j_X([t, x]) = x(t)$.

LEMA 5. *Aplicaţia j_X este bine definită, este continuă şi dacă $f : X \to Y$ este o aplicaţie continuă arbitrară, atunci diagrama de mai jos este comutativă.*

$$\begin{array}{ccc} |\Sigma(X)| & \xrightarrow{|\Sigma(f)|} & |\Sigma(Y)| \\ \downarrow j_X & & \downarrow j_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Demonstraţie. Faptul că j_X este bine definită rezultă din Lema 2. Continuitatea rezultă din continuitatea aplicaţiei $j_X\eta : M(\Sigma(X)) \to X$ (vezi aplicaţia de evaluare, § 1 Cap. II).

În sfîrşit, $|\Sigma(f)|([t, x]) = = [t, f \circ x]$ şi $j_Y |\Sigma(f)|([t, x]) = (f \circ x)(t) = f(x(t)) = = (f \circ j_X)([t, x])$.

TEOREMA 2. *Pentru fiecare spaţiu topologic X, aplicaţia $j_X : |\Sigma(X)| \to X$ este o echivalenţă omotopică slabă* *).

Demonstraţie. Fie clasa $[f] \in \pi_n(X, x_0)$, reprezentată de aplicaţia $f : (S^n, p_0) \to (X, x_0)$. Presupunem că S^n este poliedrul complexului K, avînd un vîrf în p_0. Există atunci o aplicaţie semisimplicială, $f' : K \to \Sigma(X)$, încît $f = j_X|f'|$. Să mai presupunem că am ales punctul bază în $|\Sigma(X)|$, încît acesta să fie situat în $j_X^{-1}(x_0)$. Atunci $f(p_0) = x_0$. Prin urmare, $(j_X)_* : \pi_n(|\Sigma(X)|, *) \to \pi_n(X, x_0)$ aplică clasa $[|f'|]$ pe $[f]$ şi deci $(j_X)_*$ este epimorfism.

Fie acum $g : (S^n, p_0) \to (|\Sigma(X)|)$*), încît j_Xg este nul omotopă. Ca şi mai înainte, presupunem că S^n este triangulată avînd un vîrf în p_0. Atunci, g este omotopă cu o aplicaţie semisimplicială $g' : K \to \Sigma(X)$ şi astfel că $j_X|g'|$ este nul omotopă. Există astfel o omotopie $H : |K| \times I \to \to X$, încît $H||K| \times \{0\} = j_X|g'|H||K| \times \{1\} = x_0$ şi $H(p_0 \times \times I) = x_0$. Apoi, produsul $|K| \times I$ are o triangulare conţinînd pe K şi astfel că $\{p_0\} \times I$ este un 1-simplex. Există prin urmare o factorizare $|H| = j_X|H'|$, unde H' este o aplicaţie semisimplicială de la $K \times I$ la $\Sigma(X)$. Datorită unicităţii factorizării din Lema 5, rezultă că $|H'| \, | \, |K| \times$

*) Comparaţi cu Teorema 4 § 2.

$\times\{0\} = |g'|$. Prin urmare $|H'|$ stabilește omotopia aplicației $|g'|$ cu o aplicație constantă, ceea ce implică faptul că g este nul omotopă. Așadar, $(j_X)_*$ este injectivă.

COROLAR 4. *Aplicația $j_X: |\Sigma(X)| \to X$ este o echivalență omotopică dacă și numai dacă X are tipul omotopic al unui CW-complex.*

Demonstrație. Dacă j_X este o echivalență omotopică, deoarece $|\Sigma(X)|$ este CW-complex, rezultă că X este omotop cu un CW-complex.

Reciproc, dacă X este omotop cu un CW-complex, aplicînd Teorema 2 și Cor. 5 § 2, rezultă că j_X este o echivalență omotopică (dacă X nu este el însuși CW-complex se compune j_X cu o echivalență omotopică).

DEFINIȚIA 3. O aplicație continuă $f: X \to Z$ se numește *dominare omotopică* dacă există $g: Z \to X$, cu $fg \simeq 1_Z$. Se mai spune că X *domină omotopic spațiul* Z.

COROLAR 5. *Un spațiu topologic X are tipul omotopic al unui CW-complex dacă și numai dacă este dominat omotopic de un CW-complex.*

Demonstrație Necesitatea este evidentă.

Să presupunem că X este dominat de CW-complexul Y și fie $f: X \to Y$, $g: Y \to X$, cu $gf \simeq 1_X$. Considerăm diagramele

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{g} & X \\ \uparrow{\scriptstyle j_X} & & {\scriptstyle j_Y}\uparrow\downarrow{\scriptstyle k_Y} & & \uparrow{\scriptstyle j_X} \\ |\Sigma(X)| & \xrightarrow[|\Sigma(f)|]{} & |\Sigma(Y)| & \xrightarrow[|\Sigma(g)|]{} & |\Sigma(X)| \end{array}$$

Deoarece Y este un CW-complex, j_Y este o echivalență omotopică și fie k_Y inversa omotopică a lui j_Y. Definim $k_X = |\Sigma(g)| k_Y f$. Avem atunci $|\Sigma(g)|\,|\Sigma(f)| = |\Sigma(gf)| \simeq$ $\simeq |\Sigma(1_X)| = 1_{|\Sigma(X)|}$. Rezultă

$$j_X k_X = j_X |\Sigma(g)| k_Y f = g j_Y k_Y f \simeq gf \simeq 1_X,$$

$$k_X j_X = |\Sigma(g)| k_Y f j_X = |\Sigma(g)| k_Y j_Y |\Sigma(f)| \simeq |\Sigma(g)|\,|\Sigma(f)| \simeq 1_{|\Sigma(X)|},$$

deci j_X este echivalență omotopică și cum $|\Sigma(X)|$ este un CW-complex, avem dovedită suficiența.

LEMA 6. *Orice ANR este dominat omotopic de un spațiu triangulabil (cu topologia Whitehead).*

Demonstrație *). Fie Y un spațiu ANR și $\mathscr{D}'$ o acoperire deschisă a acestuia. După Teorema 1 § 14 Cap. I, există o acoperire $\mathscr{D}''$ mai fină decît $\mathscr{D}'$, încît două aplicații de la un spațiu X în Y, care sînt $\mathscr{D}''$-apropiate sînt de asemenea $\mathscr{D}'$-omotope. După Teorema 5 § 5, există o acoperire $\mathscr{D}'''$ mai fină decît $\mathscr{D}''$, încît fiecare realizare parțială a unui spațiu triangulabil K (avînd topologia Whitehead), în Y, relativ la $\mathscr{D}'''$, se poate extinde la o realizare plină a lui K în Y, relativ la $\mathscr{D}''$. Deoarece Y este spațiu metric, există o acoperire deschisă local finită $\mathscr{D}$, care este *star-rafinare* a lui $\mathscr{D}'''$ **).

Fie $N(\mathscr{D})$ nervul acoperirii $\mathscr{D}$ și $X = |N(\mathscr{D})|$ realizarea topologică a lui $N(\mathscr{D})$ (vezi Teorema 4 §5). Definim $\varphi_0: X^0 \to$ $\to Y$, unde X^0 este scheletul 0-dimensional al lui X, $\varphi_0(U) = y_U$, pentru $U \in \mathscr{D}$ și y_U un punct ales în U. Aplicația φ_0 este o realizare parțială a lui X în Y relativ la $\mathscr{D}'''$. În adevăr, dacă σ este un simplex închis în X, cu vîrfurile $U_0, \ldots, U_q$, deci $U_0 \cap \ldots \cap U_q \neq \emptyset$, atunci $\mathscr{D}$ fiind star-rafinare a lui $\mathscr{D}'''$, există $V_\sigma \in \mathscr{D}'''$, încît $U_i \subset V_0$, $i = 0, 1, \ldots, q$. Prin urmare, $\varphi_0(\sigma \cap X^0) \subset V_\sigma$. Putem extinde φ_0 la o realizare plină a lui X relativ la $\mathscr{D}''$, $\varphi: X \to Y$. Se poate arăta că φ este o dominare omotopică. Mai întîi, pentru un simplex închis σ al lui X, există $W_\sigma \in \mathscr{D}''$, încît $\varphi(\sigma) \subset W_\sigma$ și se poate presupune că $V_\sigma \subset W_\sigma$.

Există apoi o aplicație continuă $\psi: Y \to X$, încît dacă $y \in Y$ se află în deschisele $U_0, U_1, \ldots, U_q \in \mathscr{D}$, atunci $\psi(y)$ aparține simplexului cu vîrfurile $U_0, U_1, \ldots, U_q$. Obținem de aici $\varphi(\psi(y)) \in W_\sigma$. Cum avem și $y \in U_i \subset$ $\subset V_\sigma \subset W_\sigma$, rezultă că $\varphi \circ \psi$ și 1_Y sînt $\mathscr{D}''$-apropiate. Deducem că $\varphi \circ \psi$ și 1_Y sînt $\mathscr{D}'$-omotope. Rezultă deci că X domină omotopic pe Y.

LEMA 7. *Pentru orice complex semisimplicial X, realizarea sa geometrică $|X|$ este un spațiu infinit triangulabil.*

Indicații în legătură cu demonstrația se pot găsi în [33, pp. 100] și [35, Th.4.1].

---

*) Detalii se pot găsi în [24, p. 138].

**) Vezi semnificația noțiunii în continuarea demonstrației.

TEOREMA 4 (S. Mardešić). *Pentru un spațiu topologic X, următoarele afirmații sînt echivalente:*

i) *X are tipul omotopic al unui spațiu triangulabil, cu topologia Whitehead;*

ii) *X are tipul omotopic al unui spațiu triangulabil, cu topologia metrică;*

iii) *X are tipul omotopic al unui* ANR;

iv) *X are tipul omotopic al unui CW-complex.*

Demonstrație. Echivalența i)$\Leftrightarrow$ii) este demonstrată în exerc. 10 § 6. Apoi, după exerc. 9 § 6, ii)$\Rightarrow$iii). Implicația iii)$\Rightarrow$ii) rezultă din Lema 6 și Cor. 6.

Dacă X este echivalent omotopic cu un spațiu (infinit) triangulabil, după condiția b) din Teorema 3 § 5, X este echivalent omotopic cu un CW-complex. Deci i)$\Rightarrow$iv).

În sfîrșit, dacă X este echivalent omotopic cu un CW-complex Y, atunci X este echivalent omotopic cu $|\Sigma(Y)|$ (Cor. 4). Aplicînd Lema 7, rezultă implicația iv)$\Rightarrow$i).

EXERCIȚII

1. Pentru fiecare $n \geqslant 0$, fie $F(n)$ complexul simplicial abstract ale cărui vîrfuri sînt elementele $\{0, 1, \ldots, n\}$ iar k-simplexele sînt șiruri nedescrescătoare avînd $k+1$ elemente din $\{0, 1, \ldots, n\}$. Se definește i-operatorul față $d_i : F(n+1) \to F(n)$, omițînd cel de al $(i+1)$-lea vîrf al unui simplex și j-operatorul de degenerare $s_j : F(n) \to F(n+1)$, repetînd cel de al $(j+1)$-lea vîrf. Să se arate că se obține astfel un complex semisimplicial F.

2. Cu datele de mai sus, se definesc aplicațiile $d_j^* : F(n) \to F(n+1)$, $s_j^* : F(n) \to F(n-1)$ prin

$$d_j^*(k) = \begin{cases} k, & k < j, \\ k+1, & k \geqslant j, \end{cases} \qquad \text{și} \qquad s\,(k) = \begin{cases} k, & k \leqslant j, \\ k-1, & k > j. \end{cases}$$

Să se utilizeze aceste aplicații pentru a construi pentru o mulțime X dotată cu o relație reflexivă și simetrică*) un complex semisimplicial $F(X)$, în analogie cu exemplul 2.

3. Să se demonstreze o teoremă de aproximare simplicială pentru aplicații de la un poliedru la un spațiu triangulabil.

Indicație. Se poate consulta [43, exerc.7.12, p. 166].

4. Să se arate că pentru un CW-complex, cu o mulțime numărabilă de celule, grupurile de omotopie sînt cel mult numărabile.

Indicație. Fie CW-complexul X. Acesta este omotopic cu un spațiu triangulabil Y, avînd o mulțime numărabilă de simplexe. Avem $\pi_n(X) \cong \pi_n(Y)$. Dar $\pi_n(Y)$ este în corespondență biunivocă cu clasele de aplicații cu punct bază $S^n \to Y$. După exerc. 3, aplicațiile (fără puncte bază) $S^n \to Y$ formează o mulțime cel mult numărabilă.

---

*) X este numit *spațiu fuzzy*.

CAPITOLUL IV

GRUPURI DE OMOLOGIE

Acest capitol constituie o introducere în teoria omologiei. După o scurtă introducere în algebra omologică, urmează prezentarea grupurilor de omologie simplicială, șirul Mayer-Vietoris, izomorfismul de suspensie, homomorfismul Hurewicz, formula Euler-Poincaré și formula lui Künneth (în context simplicial). Teoria este însoțită de o serie de aplicații: grupurile de omologie ale sferelor, teorema lui Hopf, omologia suprafețelor, problema colorării hărților, omologia spațiilor proiective reale (prin metoda blocurilor simpliciale). Urmează introducerea grupurilor de omologie singulară, omologia CW-complexelor, exemplificîndu-se rezultatele teoretice prin calculul grupurilor de omologie ale spațiilor proiective complexe și cuaternionice. În ultimul paragraf se dă o introducere în teoria formei spațiilor metrice compacte, via omologia Vietoris.

§ 1. Omologia complexelor de lanțuri

DEFINIȚIA 1. Un *complex de lanțuri* este un grup graduat abelian $C = \bigoplus_{n \geqslant 0} C_n$, împreună cu o *derivare de grad* -1, adică un homomorfism $d : C \to C$, satisfăcînd condițiile $d^2 = 0$ și $d(C_n) \subseteq C_{n-1}$, $\forall n \geqslant 0$, unde pentru $n \leqslant -1$, $C_n = \{0\}$. Elementele lui C_n sînt numite *n-lanțuri*.

Un *morfism de complexe de lanțuri*, sau o *aplicație de lanțuri*, de la complexul $C = \oplus C_n$ la complexul $D = \oplus D_n$, este un homomorfism $\varphi : C \to D$ încît $\varphi d = d \varphi$ și $\varphi(C_n) \subseteq D_n$. (Am notat la fel derivările pentru cele două complexe.)

DEFINIȚIA 2. Dat un complex de lanțuri $C = \oplus C_n$, cu derivarea d, notăm $d_n = d \mid C_n$. Subgrupul $Z_n(C) = \operatorname{Ker} d_n$ al grupului C_n este numit *grupul n-ciclurilor lui C*, iar subgrupul $B_n(C) = \operatorname{Im} d_{n+1}$ al lui C_n poartă denumirea de *grupul n-frontierelor lui C*. Deoarece $d^2 = 0$, deci $d_{n+1} d_n = 0$, rezultă că $B_n(C)$ este subgrup al lui $Z_n(C)$

Putem considera grupul factor* $H_n(C) = Z_n(C)/B_n(C)$, numit *n-grupul de omologie al complexului de lanțuri C*. Clasa de omologie a unui ciclu $z \in Z_n(C)$ se notează prin $[z]$.

TEOREMA 1. *Orice aplicație de lanțuri* $\varphi : C \to D$ *induce cîte un homomorfism* $\varphi_* : H_n(C) \to H_n(D)$, *pentru orice* $n \geqslant 0$, *cu următoarele proprietăți:*

a) $(1_C)_* = 1_{H_n(C)}$;

b) $(\theta\varphi)_* = \theta_*\varphi_*$, *pentru* $\theta : D \to E$, *o altă aplicație de lanțuri;*

c) *Dacă* φ *este izomorfism, atunci* φ_* *este izomorfism,* $\forall n$.

Demonstrație. Notînd $\varphi_n = \varphi| C_n$, avem $\varphi_{n-1}d_n = d_n\varphi_n$, de unde obținem că $\varphi_n(Z_n(C)) \subseteq Z_n(D)$ și $\varphi_n(B_n(C)) \subseteq$ $\subseteq B_n(D)$. Putem defini atunci $\varphi_*[z] = [\varphi(z)]$, $\forall [z] \in H_n(C)$. Rezultă imediat că φ_* este bine definită, este un homomorfism de grupuri și satisface proprietățile a)—c). Lăsăm cititorului detaliile.

DEFINIȚIA 3. Două aplicații de lanțuri θ, $\varphi : C \to D$ se numesc *omotope*, sau *lanț-omotope*, dacă există între ele o *omotopie de lanțuri*, adică un homomorfism $h : C \to D$, încît $\varphi(l) - \theta(l) = d\,h(l) + h\,d(l)$, $\forall l \in C$. Vom scrie $h : \theta \simeq \varphi$. Ținînd seama că derivările au gradul -1, iar morfismele φ și θ gradul 0, rezultă că h are gradul $+1$, adică $h(C_n) \subseteq D_{n+1}$. Dacă există $\varphi : C \to D$ și $\varphi' : D \to C$, încît $\varphi'\varphi \simeq 1_C$ și $\varphi\varphi' \simeq 1_D$, spunem că C și D sînt *lanț-omotope* și vom scrie $C \simeq D$.

TEOREMA 2. *Dacă* θ, $\varphi : C \to D$ *sînt lanț-omotope, atunci* $\theta_* = \varphi_* : H_n(C) \to H_n(D)$, $\forall n \geqslant 0$.

Demonstrație. Fie $[z] \in H_n(C)$. Avem $dz = 0$ și deci $\varphi(z) - \theta(z) = dh(z) \Rightarrow [\varphi(z)] = [\theta(z)]$, deoarece diferența lor este o frontieră.

COROLAR 1. *Dacă* C *și* D *sînt lanț-omotope, atunci* $H_n(C) \cong H_n(D)$, $\forall n \geqslant 0$.

DEFINIȚIA 4. Fie $C = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n$ un complex de lanțuri. Fie $C^n = \mathrm{Hom}(C_n, \mathbb{Z})$ grupul abelian al homomorfismelor grupului abelian C_n în $\mathbb{Z}$, cu operația $(f+g)(l) =$ $= f(l) + g(l)$, $\forall l \in C_n$, $\forall f, g \in C^n$. Vom numi elementele lui C^n *colanțuri*.

---

* C_n sînt abeliene.

Putem defini de asemenea o *coderivare*

$$\delta : C^* = \oplus C^n \to C^*, \ \delta(f)(l) = f(dl), \ \forall f \in C^n, \ \forall l \in C_n.$$

Avem $\delta^2 = 0$ și $\delta(C^n) \subseteq C^{n+1}$. Spunem că C^* împreună cu δ este un *complex de colanțuri*, asociat lui C. Fie $\delta^n = \delta| C^n$. $Z^n(C) = \mathrm{Ker}\ \delta^n$ este numit grupul *n-cociclurilor*, iar $B^n(C) = \mathrm{Im}\ \delta^{n-1}$ grupul *n-cofrontierelor*.

Avem $B^n(C)$ subgrup al lui $Z^n(C)$ și grupul factor $H^n(C) = Z^n(C)/B^n(C)$ este numit *n-grupul de coomologie al complexului de lanțuri* C (sau al complexului de colanțuri C^*).

Lăsăm în seama cititorului demonstrația următoarelor două teoreme, cu totul analoage Teoremelor 1 și 2.

TEOREMA 3. *Orice aplicație de lanțuri* $\varphi : C \to D$ *induce cîte un homomorfism* $\varphi^* : H^n(D) \to H^n(C)$, $\forall n \geqslant 0$, *cu proprietățile următoare:*

a) $(1_C)^* = 1_{H^n(C)}$;

b) $(\theta\varphi)^* = \varphi^*\theta^*$;

c) φ *izomorfism implică* φ^* *izomorfism.*

TEOREMA 4. *Dacă* θ, $\varphi : C \to D$ *sînt lanț-omotope, atunci* $\theta^* = \varphi^* : H^n(D) \to H^n(C)$, $\forall n \geqslant 0$.

DEFINIȚIA 5. Un șir de complexe de lanțuri și aplicații de lanțuri, $0 \to C \xrightarrow{\varphi} D \xrightarrow{\theta} E \to 0$, este un *șir exact* dacă, pentru $\forall n \geqslant 0$, sînt exacte șirurile $0 \longrightarrow C_n \xrightarrow{\varphi_n}$ $\longrightarrow D_n \xrightarrow{\theta_n} E_n \longrightarrow 0$.

TEOREMA 5. *Dat un șir exact de complexe de lanțuri,* $0 \to C \xrightarrow{\varphi} D \xrightarrow{\theta} E \to 0$, *există, pentru* $\forall n \geqslant 0$, *cîte un homomorfism* $\partial_* : H_n(E) \to H_{n-1}(C)$, *încît este exact șirul*

$$\ldots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(D) \xrightarrow{\theta_*} H_n(E) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \xrightarrow{\partial_*} H_0(C) \xrightarrow{\varphi_*} H_0(D) \xrightarrow{\theta_*} H_0(E) \longrightarrow 0$$

Demonstrație. Fie $[z] \in H_n(E)$, deci $z \in Z_n(E) \subseteq E_n$ și deoarece θ este epimorfism, $z = \theta(l)$, $l \in D_n$. Atunci, $\theta d(l) = d\theta(l) = d(z) = 0$, încît din exactitate rezultă $d(l) = \varphi(l')$, $l' \in C_{n-1}$, și l' este unic. Apoi, $\varphi d(l') = d\varphi(l') = d^2(l) = 0$, astfel că $d(l') = 0$ și prin urmare $l' \in Z_{n-1}(C)$. Definim $\partial_*[z] = [l'] \in H_{n-1}(C)$.

Să verificăm acum că definiția nu depinde de alegerea elementelor z, l și l'. În adevăr, dacă acestea se înlocuiesc respectiv cu $\bar{z}$, $\bar{l}$ și $\bar{l}'$, atunci $\theta(l - \bar{l}) \in B_n(E)$, încît $\theta(l - \bar{l}) = d\theta(\bar{\bar{l}}) = \theta d(\bar{\bar{l}})$, $\bar{\bar{l}} \in D$. Deci $\theta(l - \bar{l} - d(\bar{\bar{l}})) = 0$, astfel că $l - \bar{l} - d(\bar{\bar{l}}) = \varphi(c)$, $c \in C$, și prin urmare $d(l) - d(\bar{l}) = d\varphi(c) = \varphi d(c) \Rightarrow \varphi(l') - \varphi(\bar{l}') = \varphi d(c) \Rightarrow l' - \bar{l}' = d(c) \Rightarrow [l'] = [\bar{l}']$. Se arată ușor că ∂_* este homomorfism.

Să dovedim exactitatea șirului.

Im φ_* = Ker θ_*. Avem $\theta\varphi = 0 \Rightarrow \theta_*\varphi_* = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\ \varphi_* \subseteq \mathrm{Ker}\ \theta_*$. Reciproc, dacă $[z] \in \mathrm{Ker}\ \theta_*$, $\theta(z) = d(e)$, $e \in E$ și $e = \theta(l)$, $l \in D \Rightarrow \theta(z) = d\theta(l) = \theta d(l) \Rightarrow z - d(l) = \varphi(c) \Rightarrow d\varphi(c) = 0 \Rightarrow \varphi(d(c)) = 0 \Rightarrow d(c) = 0$. Obținem $[z] = [\varphi(c)] = \varphi_*[c] \Rightarrow \mathrm{Ker}\ \theta_* \subseteq \mathrm{Im}\ \varphi_*$.

Im θ_* = Ker ∂_*. Avem $\partial_* \circ \theta_*[z] = \partial_*[\theta(z)] = [l']$, cu $\varphi(l') = d\theta(z) = \theta d(z) = 0 \Rightarrow l' = 0$, deci $\partial_*\theta_* = 0 \Rightarrow \mathrm{Im}\ \theta_* \subseteq \mathrm{Ker}\ \partial_*$. Apoi, dacă $\partial_*[z] = 0 \Rightarrow z = \theta(l)$, $d(l) = \varphi d(c) = d\varphi(c) \Rightarrow l - \varphi(c) \in Z(D)$ și $\theta_*[l - \varphi(c)] = [\theta(l) - \theta\varphi(c)] = [\theta(l)] = [z]$, deci $\mathrm{Ker}\ \partial_* \subseteq \mathrm{Im}\ \theta_*$.

Im ∂_* = Ker φ_*. Avem iarăși $\varphi_*\partial_* = 0$, încît rezultă $\mathrm{Im}\ \partial_* \subseteq \mathrm{Ker}\ \varphi_*$. Reciproc, dacă $[z] \in \mathrm{Ker}\ \varphi_* \Rightarrow (z) = d(l)$, $l \in D \Rightarrow d\theta(l) = \theta\varphi(z) = 0$ și $[\theta(l)] \in H(E)$, încît $\partial_*[\theta(l)] = [z]$. Deci $\mathrm{Ker}\ \varphi_* \subseteq \mathrm{Im}\ \partial_*$.

TEOREMA 6. *Dată o diagramă comutativă de complexe de lanțuri și aplicații de lanțuri cu liniile exacte,*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{\varphi} & D & \xrightarrow{\theta} & E & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle\alpha} & & \downarrow{\scriptstyle\beta} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma} & & \\
0 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{\varphi'} & D' & \xrightarrow{\theta'} & E' & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

are loc diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\cdots \to & H_n(C) & \xrightarrow{\varphi_*} & H_n(D) & \xrightarrow{\theta_*} & H_n(E) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{n-1}(C) & \longrightarrow \cdots \\
 & \downarrow{\scriptstyle\alpha_*} & & \downarrow{\scriptstyle\beta_*} & & \downarrow{\scriptstyle\gamma_*} & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_*} & \\
\cdots \to & H_n(C') & \xrightarrow{\varphi'_*} & H_n(D') & \xrightarrow{\theta'_*} & H_n(E') & \xrightarrow{\partial'_*} & H_{n-1}(C') & \longrightarrow \cdots
\end{array}$$

Demonstrație. După Teorema 1, avem $\beta_*\varphi_* = \varphi'_*\alpha_*$ și $\gamma_*\theta_* = \theta'_*\beta_*$. Fie apoi $[z] \in H_n(E)$ și fie $\partial_*[z] = [l']$, adică $z = \theta(l)$, $d(l) = \varphi(l')$. Atunci $\alpha_*\partial_*[z] = [\alpha(l')]$. Pe de altă parte, $\partial'_*\gamma_*[z] = \partial'_*[\gamma(z)]$. Dar $\gamma(z) = \gamma\theta(l) = \theta'(\beta(l))$ și $d(\beta(l)) = \beta d(l) = \beta\varphi(l') = \varphi'\alpha(l')$, deci $\partial'_*[\gamma(z)] = [\alpha(l')] = \alpha_*\partial_*[z]$.

DEFINIȚIA 6. Date două grupuri abeliene A și B, se definește *produsul tensorial* prin $A \otimes B = \mathrm{Ab}\{a \otimes b; a_1 \otimes (b_1 + b_2) - a_1 \otimes b_1 - a_1 \otimes b_2, (a_1 + a_2) \otimes b - a_1 \otimes b - a_2 \otimes b \mid a, a_1, a_2 \in A, b, b_1, b_2 \in B\}$.

LEMA 1. a) $A \otimes \mathbb{Z} \cong A$, *pentru orice grup abelian* A;

b) $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q \cong \mathbb{Z}_{(p,q)}$, (p, q) *fiind cel mai mare divizor comun al numerelor* p *și* q;

c) $\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Q} = 0$;

d) $A \otimes B \cong B \otimes A$.

Demonstrație. a) $f : A \otimes \mathbb{Z} \to A$, $f(a \otimes n) = na$ și deci $f(a_1 \otimes n_1 + \ldots + a_p \otimes n_p) = n_1a_1 + \ldots + n_pa_p$. Aplicația f este homomorfism și are inversul $f^{-1}(a) = a \otimes 1$;

b) $f : \mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_q \to \mathbb{Z}_{(p,q)}$, $f(r \otimes s) = rs \bmod(p, q)$. Aplicația f este un epimorfism, deoarece $t = tf(1 \otimes 1)$, $\forall t \in \mathbb{Z}_{(p,q)}$. Este și monomorfism, deoarece

$$f\left(\sum_{i=1}^{k} r_i \otimes s_i\right) = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} r_is_i = 0 \bmod(p, q) \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} r_is_i =$$

$$= ap + bq,\ a, b \in \mathbb{Z} \Rightarrow \sum_{i=1}^{k} r_i \otimes s_i = \sum_{i=1}^{k} r_is_i(1 \otimes 1) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (ap + bq)r_is_i = 0;$$

c) Pentru $r \in \mathbb{Z}_p$ și $q \in \mathbb{Q}$, $r \otimes q = (pr) \otimes (q/p) = 0$;

d) $f : A \otimes B \to B \otimes A$, $f(a \otimes b) = b \otimes a$.

LEMA 2. *Date homomorfismele $f : A \to A'$, $g : B \to B'$, se poate defini homomorfismul $f \otimes g : A \otimes B \to A' \otimes B'$, încît $(f \otimes g)(a \otimes b) = f(a) \otimes g(b)$, $\forall a \in A$, $b \in B$.*

Demonstrație. $(f \otimes g)(a_1 \otimes (b_1 + b_2) - a_1 \otimes b_1 - a_1 \otimes b_2) = (f \otimes g)(a_1 \otimes (b_1 + b_2)) - (f \otimes g)(a_1 \otimes b_1) - (f \otimes g)(a_1 \otimes b_2) = f(a_1) \otimes (g(b_1) + g(b_2)) - f(a_1) \otimes g(b_1) - f(a_1) \otimes g(b_2)$ și analog, $(f \otimes g)((a_1 + a_2) \otimes b_1 - a_1 \otimes b_1 - a_2 \otimes b_1) = (f(a_1) + f(a_2)) \otimes g(b_1) - f(a_1) \otimes g(b_1) - f(a_2) \otimes g(b_1)$.

LEMA 3. *Fie $C = \oplus C_n$, un complex de lațuri, cu derivarea $d = \oplus d_n$ și G un grup abelian. Considerăm produsul tensorial $C \otimes G$. Acesta este un complex de lanțuri. Dacă $\varphi : C \to D$ este o aplicație de lanțuri, atunci $\varphi \otimes 1 : C \otimes G \to D \otimes G$ este de asemenea o aplicație de lanțuri.*

Demonstrație. $C \otimes G = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C_n \otimes G$ (vezi exerc. 1) și se definește $d' : C \otimes G \to C \otimes G$, $d' = d \otimes 1$. Atunci, $d'^2 = (d \otimes 1)(d \otimes 1) = d^2 \otimes 1 = 0 \otimes 1 = 0$ (vezi exerc. 2). În plus $d'(C_n \otimes G) = d(C_n) \otimes G \subseteq C_{n-1} \otimes G$.

TEOREMA 7. *Pentru orice complex de lanțuri C, $H_n(C \otimes \mathbb{Q}) \cong H_n(C) \otimes \mathbb{Q}$.*

Demonstrație. Considerăm șirul exact

$$0 \to Z_n(C) \hookrightarrow C_n \xrightarrow{d} B_{n-1} \to 0.$$

Are loc atunci următorul șir exact (vezi exerc. 3)

$$0 \longrightarrow Z_n(C) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow C_n \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{d \otimes 1} B_{n-1} \otimes \mathbb{Q}.$$

și deci $Z_n(C \otimes \mathbb{Q}) = \operatorname{Ker}(d \otimes 1) = Z_n(C) \otimes \mathbb{Q}$. Prin urmare, șirul exact $0 \to Z_n(C) \to C_n \xrightarrow{d} B_{n-1}(C) \to 0$ determină șirul exact

$$0 \longrightarrow Z_n(C \otimes \mathbb{Q}) \longrightarrow C_n \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{d \otimes 1} B_{n-1}(C) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow 0,$$

încît rezultă $B_{n-1}(C \otimes \mathbb{Q}) \cong B_{n-1}(C) \otimes \mathbb{Q}$. În sfîrșit, din șirul exact $0 \to B_n(C) \to Z_n(C) \to H_n(C) \to 0$, obținem șirul exact $0 \to B_n(C) \otimes \mathbb{Q} \to Z_n(C) \otimes \mathbb{Q} \to H_n(C) \otimes \mathbb{Q} \to 0$, de unde deducem $H_n(C) \otimes \mathbb{Q} \cong H_n(C \otimes \mathbb{Q})$.

LEMA 4. *Pentru un grup abelian G și un întreg pozitiv p, fie $\alpha : G \to G$, $\alpha(x) = px$. Există atunci șirul exact*

$$0 \to \operatorname{Ker} \alpha \hookrightarrow G \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} G \otimes \mathbb{Z}_p \to 0,$$

unde $\beta(x) = x \otimes 1$.

Demonstrație. β este evident surjecție. Avem apoi $\beta\alpha(x) = \beta(px) = px \otimes 1 = x \otimes p = 0$, deci $\operatorname{Im} \alpha \subseteq \operatorname{Ker} \beta$.

Pentru a stabili incluziunea inversă, considerăm homomorfismul $\gamma : G \otimes \mathbb{Z}_p \to G | \operatorname{Im} \alpha$, încît $\gamma(g \otimes n) = [ng]$, care este bine definit deoarece $[pg] = 0$. Apoi, $\gamma\beta$ este epimorfismul canonic $G \to G | \operatorname{Im} \alpha$, încît dacă $x \in \operatorname{Ker} \beta$, $\gamma\beta(x) = 0$ în $G | \operatorname{Im} \alpha$ și deci $x \in \operatorname{Im} \alpha$.

DEFINIȚIA 7. Pentru un grup abelian G și un întreg pozitiv p, notăm $\operatorname{Tor}(G, \mathbb{Z}_p) = \operatorname{Ker} \alpha$, pentru $\alpha(x) = px$.

OBSERVAȚIA 1. *Dacă G este un grup abelian liber, atunci* $\operatorname{Tor}(G, \mathbb{Z}_p) = 0$.

TEOREMA 8. *Pentru un complex de lanțuri C, cu C_n abelian liber, finit generat și orice întreg pozitiv p, are loc un șir scindat*

$$0 \longrightarrow H_n(C) \otimes \mathbb{Z}_p \xrightarrow{\beta_*} H_n(C \otimes \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\partial_*} \operatorname{Tor}(H_{n-1}(C), \mathbb{Z}_p) \longrightarrow 0$$

și deci $H_n(C \otimes \mathbb{Z}_p) \cong H_n(C) \otimes \mathbb{Z}_p \oplus \operatorname{Tor}(H_{n-1}(C), \mathbb{Z}_p)$ *).

Demonstrație. Utilizînd Lema 4 și ținînd seama că prin ipoteză avem $\operatorname{Ker} \alpha = 0$, are loc următorul șir exact de complexe de lanțuri

$$0 \to C \xrightarrow{\alpha} C \xrightarrow{\beta} C \otimes \mathbb{Z}_p \to 0,$$

care, conform Teoremei 5, conduce la șirul exact

$$\ldots \longrightarrow H_n(C) \xrightarrow{\alpha_*} H_n(C) \xrightarrow{\beta_*} H_n(C \otimes \mathbb{Z}_p) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(C) \longrightarrow \ldots,$$

unde $\alpha_*([z]) = p[z]$, $\forall [z] \in H_n(C)$. Putem de asemenea considera șirul scurt exact

$$0 \to H_n(C)/\operatorname{Ker} \beta_* \xrightarrow{u} H_n(C \otimes \mathbb{Z}_p) \to \operatorname{Im} \partial_* \to 0,$$

*) Teoremele 7 și 8 pot fi generalizate pentru un grup arbitrar [39].

$u([y]) = \beta_*(y)$. Avem Ker $\beta_* = \text{Im } \alpha_*$, încît $H_n(C)/\text{Ker } \alpha_* \cong \cong H_n(C) \otimes \mathbb{Z}_p$ şi $\text{Im } \partial_* = \text{Ker } \alpha_* = \text{Tor}(H_{n-1}(C), \mathbb{Z}_p)$.

Omitem demonstraţia scindării şirului exact obţinut. Se poate consulta [37, p. 148].

EXERCIŢII

1. a) Să se arate că dacă $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, $B = \bigoplus_{j \in J} B_j$, atunci $A \otimes B \cong \cong \bigoplus_{i,j} A_i \otimes B_j$;

b) Pentru orice şir exact $A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0$ şi pentru orice grup abelian B, are loc şirul exact
$A' \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes 1} A \otimes B \xrightarrow{\beta \otimes 1} A'' \otimes B \longrightarrow 0$ (produsul tensorial $? \otimes B$ este *exact la dreapta*);

c) Dacă homomorfismul $\alpha : A' \to A$ are un invers la dreapta, sau dacă α este monomorfism şi A este un grup abelian liber, atunci homomorfismul $\alpha \otimes 1_B : A' \otimes B \to A \otimes B$ este monomorfism;

d) Dacă şirul $0 \to A' \xrightarrow{\alpha} A \xrightarrow{\beta} A'' \to 0$ este scindat, atunci pentru orice grup abelian B, şirul

$$0 \longrightarrow A' \otimes B \xrightarrow{\alpha \otimes 1} A \otimes B \xrightarrow{\beta \otimes 1} A'' \otimes B \longrightarrow 0$$

este de asemenea scindat.

2. a) Să se arate că dacă $f : A \to A'$, $f' : A' \to A''$, $g : B \to B'$, $g' : B' \to B''$, atunci $(f' \circ f) \otimes (g' \circ g) = (f' \otimes g') \circ (f \otimes g)$;
b) $f \otimes 0 = 0$.

3. Să se arate că dacă $F \xrightarrow{\alpha} G \xrightarrow{\beta} H$ este un şir exact de grupuri abeliene, atunci este exact şirul $F \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\alpha \otimes 1} G \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\beta \otimes 1} H \otimes \mathbb{Q}$.
Indicaţie. Se poate consulta [37, p. 146].

4. Să se arate că:
a) $\text{Tor}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}_p) = 0$;
b) $\text{Tor}(\mathbb{Z}_p, \mathbb{Z}_q) = Z_{(p,q)}$;
c) $\text{Tor}(\bigoplus_{i \in I} G_i, \mathbb{Z}_p) = \bigoplus_{i \in I} \text{Tor}(G_i, \mathbb{Z}_p)$.

5. Date grupurile abeliene A şi B, fie şirul exact $0 \to R \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} A \to 0$, cu F un grup abelian liber (un asemenea grup există totdeauna (vezi, de exemplu, [53, p. 16]). Se defineşte $\text{Tor}(A, B) = \text{Ker}(\alpha \otimes 1)$. Se numeşte *produsul torsional*, sau *periodic*, al grupului A cu grupul B şi se mai notează $A * B$. (Nu depinde de şirul exact asociat lui A.)

Să se arate că:
a) Şirul $0 \to \text{Tor}(A, B) \to R \otimes B \to F \otimes B \to A \otimes B \to 0$ este exact;
b) $\text{Tor}(\bigoplus_i A_i, \bigoplus_j B_j) \cong \bigoplus_{i,j} \text{Tor}(A_i, B_j)$;
c) $\text{Tor}(A, \mathbb{Z}_p)$ coincide cu grupul din Def. 7.
Indicaţie. Se poate consulta, dacă este cazul, [39, p. 75] sau [43, exerc. 4.15, p. 70].

§2. Grupurile de omologie simplicială. Invarianţa omotopică

Fie σ_k simplexul geometric $[v^0, v^1, \ldots, v^k]$. Din Definiţia 2 § 5 Cap. III se vede că o permutare a vîrfurilor nu schimbă simplexul. Dacă fixăm o ordine a vîrfurilor vom vorbi de un *simplex ordonat* (vezi şi § 7 Cap. III).

DEFINIŢIA 1. O *orientare* a simplexului σ_k este o mulţime formată dintr-un simplex ordonat împreună cu toate simplexele ordonate obţinute din acesta prin permutări pare ale vîrfurilor. Un *simplex orientat* este un simplex împreună cu o orientare a sa.

Vom nota $+\sigma_k = \langle v^0, v^1, \ldots, v^k \rangle$ simplexul orientat, cu orientarea dată de ordinea scrisă a vîrfurilor. Simplexul contrar orientat va fi notat $-\sigma_k$ (Un simplex 0-dimensional determină un singur simplex orientat.)

Un complex simplicial geometric este *orientat* dacă s-a atribuit o orientare fiecărui simplex al său.

DEFINIŢIA 2. Fie K un complex simplicial geometric orientat şi σ_{p+1}, σ_p două simplexe.

Numărul de incidenţă $[\sigma_{p+1}, \sigma_p]$ se defineşte astfel:
a) Dacă σ_p nu este faţă a lui σ_{p+1}, $[\sigma_{p+1}, \sigma_p] = 0$;
b) Să presupunem că σ_p este faţă a lui σ_{p+1} şi fie $+\sigma_p = \langle v^0, v^1, \ldots, v^p \rangle$. Atunci, dacă v este vîrful lui σ_p neconţinut în σ_{p+1}, avem $\varepsilon \sigma_{p+1} = \langle v^0, v^1, \ldots, v^p \rangle$, cu $\varepsilon = \pm 1$. Definim $[\sigma_{p+1}, \sigma_p] = \varepsilon$.

EXEMPLUL 1. a) Dacă $+\sigma_1 = \langle v^0, v^1 \rangle$, atunci $[\sigma_1, [v^0]] = -1$ şi $[\sigma_1, [v^1]] = +1$;
b) Dacă $+\sigma_2 = \langle v^0, v^1, v^2 \rangle$, $+\sigma_1 = \langle v^0, v^1 \rangle$, $+\tau_1 = \langle v^0, v^2 \rangle$, atunci $[\sigma_2, \sigma_1] = +1$, $[\sigma_2, \tau_1] = -1$.

LEMA 1. *Fie K un complex simplicial geometric orientat, σ_p un simplex al lui K, iar σ_{p-2} o $(p-2)$-faţă orientată a lui σ_p. Are loc relaţia*

$$\sum [\sigma_p, \sigma_{p-1}] [\sigma_{p-1}, \sigma_{p-2}] = 0,$$

suma fiind extinsă la toate $(p-1)$-simplexele σ_{p-1}.

Demonstraţie. Fie $+\sigma_{p-2} = \langle v^0, v^1, \ldots, v^{p-2} \rangle$ şi putem presupune că $+\sigma_p = \langle v, w, v^0, v^1, \ldots, v^{p-2} \rangle$. În suma de

mai sus apar termeni nenuli numai corespunzători simplexelor

$$\sigma^1_{p-1} = [v, v^0, v^1, \ldots, v^{p-2}] \text{ şi } \sigma^2_{p-1} = [w, v^0, v^1, \ldots, v^{p-2}].$$

Deosebim patru cazuri:

1) $+\sigma^1_{p-1} = \langle v, v^0, v^1, \ldots, v^{p-2}\rangle$, $+\sigma^2_{p-1} = \langle w, v^0, \ldots, v^{p-2}\rangle$.
Atunci, avem

$$[\sigma_p, \sigma^1_{p-1}]\,[\sigma^1_{p-1}, \sigma_{p-2}] = (-1)\cdot 1,$$

$$[\sigma_p, \sigma^2_{p-1}]\,[\sigma^2_{p-1}, \sigma_{p-2}] = 1\cdot 1;$$

2) $+\sigma^1_{p-1} = \langle v, v^0, \ldots, v^{p-2}\rangle$, $-\sigma^2_{p-1} = \langle w, v^0, \ldots, v^{p-2}\rangle$.
În acest caz

$$[\sigma_p, \sigma^1_{p-1}]\,[\sigma^1_{p-1}, \sigma_{p-2}] = (-1)\cdot(+1),$$

$$[\sigma_p, \sigma^2_{p-1}]\,[\sigma^2_{p-1}, \sigma_{p-2}] = (-1)\cdot(-1).$$

Celelalte două cazuri le lăsăm în seama cititorului.
Fie K un complex simplicial geometric orientat. Fie $\sigma^1_p, \sigma^2_p, \ldots, \sigma^{\alpha_p}_p$ p-simplexele lui K. Pentru a evita complicarea notaţiei, vom folosi aceleaşi simboluri pentru p-simplexele pozitive determinate de acestea. Fie

$$C_p(K) = \mathrm{Ab}\{\sigma^1_p, \sigma^2_p, \ldots, \sigma^{\alpha_p}_p\}.$$

Numim elementele lui $C_p(K)$ *p-lanţuri simpliciale*. Un p-lanţ se scrie $l = \lambda_1\sigma^1_p + \ldots + \lambda_{\alpha_p}\sigma^{\alpha_p}_p$, cu $\lambda_1, \ldots, \lambda_{\alpha_p} \in \mathbb{Z}$. Grupul $C_p(K)$ coincide cu grupul abelian generat de p-simplexele orientate supus relaţiilor $+\sigma_p + (-\sigma_p) = 0$. Considerăm suma directă $C(K) = \bigoplus_{p\geq 0} C_p(K)$. Dacă în K nu există simplexe de dimensiune m, luăm $C_m(K) = 0$.
Să definim pe $C(K)$ o derivare, $d : C(K) \to C(K)$. Pentru un p-simplex σ_p, luăm

(1) $$d(\sigma_p) = \sum [\sigma_p, \sigma_{p-1}]\sigma_{p-1},$$

suma fiind extinsă la toate $(p-1)$-simplexele lui K. Apoi,

(2) $$d(\lambda_1\sigma^1_p + \ldots + \lambda_{\alpha_p}\sigma^{\alpha_p}_p) = \lambda_1 d(\sigma^1_p) + \ldots + \lambda_{\alpha_p} d(\sigma^{\alpha_p}_p).$$

TEOREMA 1. *$C(K)$, împreună cu homomorfismul d, definit prin (1) şi (2), este un complex de lanţuri, numit* **complexul de lanţuri simpliciale ale lui** *K. Grupurile de omologie $H_n(C(K))$ se notează $H_n(K)$.*
Demonstraţie. Este evident că $d(C_p(K)) \subseteq C_{p-1}(K)$. Apoi,

$$d^2(\sigma_p) = d\left(\sum [\sigma_p, \sigma_{p-1}]\sigma_{p-1}\right) = \sum [\sigma_p, \sigma_{p-1}]\, d(\sigma_{p-1}) =$$

$$= \sum_{\sigma_{p-1}} [\sigma_p, \sigma_{p-1}] \sum_{\sigma_{p-2}} [\sigma_{p-1}, \sigma_{p-2}]\,\sigma_{p-2} =$$

$$= \sum_{\sigma_{p-2}} \Big[\sum_{\sigma_{p-1}} [\sigma_p, \sigma_{p-1}]\,[\sigma_{p-1}, \sigma_{p-2}]\Big]\sigma_{p-2} = 0, \text{ după Lema 1.}$$

OBSERVAŢIA 1. Dacă $+\sigma_p = \langle v^0, v^1, \ldots, v^p\rangle$, atunci

$$d(\sigma_p) = \sum_{i=0}^{p} (-1)^i \langle v^0, v^1, \ldots, \widehat{v^i}, \ldots, v^0\rangle,$$

unde semnul „$\wedge$" indică omiterea vîrfului v^i.

TEOREMA 2. *Grupurile de omologie ale complexului de lanţuri simpliciale $C(K)$ nu depinde de orientarea aleasă pentru K.*
Demonstraţie. Fie K_1 şi K_2 două complexe orientate asociate lui K. Definim $\varphi_p : C_p(K_1) \to C_p(K_2)$, prin $\varphi_p(\sigma_p) = \varepsilon(\sigma_p)\sigma_p$, unde $\varepsilon(\sigma_p) = \pm 1$, după cum σ_p este la fel sau contrar orientat în K_1 şi K_2. Extindem φ_p prin liniaritate

$$\varphi_p(\lambda_1\sigma^1_p + \ldots + \lambda_{\alpha_p}\sigma^{\alpha_p}_p) = \lambda_1\varphi_p(\sigma^1_p) + \ldots + \lambda_{\alpha_p}\varphi_p(\sigma^{\alpha_p}_p).$$

Familia $\varphi = (\varphi_p)$ defineşte o aplicaţie de lanţuri

$$d\varphi_p(\sigma_p) = \varepsilon(\sigma_p) \sum [\sigma_p, \sigma_{p-1}]_2\, \sigma_{p-1},$$

$$\varphi_{p-1} d(\sigma_p) = \sum [\sigma_p, \sigma_{p-1}]_1\, \varepsilon(\sigma_{p-1})\, \sigma_{p-1},$$

unde indicele asociat numărului de incidență arată în raport cu ce orientare este calculat. Este ușor de verificat relația

$$\varepsilon(\sigma_p)\,[\sigma_p,\ \sigma_{p-1}]_2 = \varepsilon(\sigma_{p-1})\cdot[\sigma_p,\ \sigma_{p-1}]_1.$$

Să presupunem că $\varepsilon(\sigma_p) = 1$ și $[\sigma_p,\ \sigma_{p-1}] = 1$. Avem deci în K_2,

$$+\sigma_{p-1} = \langle v^0,\ \ldots,\ v^{p-1}\rangle,\ +\sigma_p = \langle v,\ v^0,\ \ldots,\ v^{p-1}\rangle$$

iar în K_1, $+\sigma_p = \langle v, v^0, \ldots, v_{p-1}\rangle$. Dacă în K_1, $+\sigma_{p-1} = \langle v^0, \ldots, v^{p-1}\rangle$, atunci $[\sigma_p,\ \sigma_{p-1}]_1 = 1$ și $\varepsilon(\sigma_{p-1}) = 1$. Dacă în K_1, $-\sigma_{p-1} = \langle v^0, \ldots, v^{p-1}\rangle$, atunci $[\sigma_p,\ \sigma_{p-1}] = -1$ și $\varepsilon(\sigma_{p-1}) = -1$. Analog se verifică celelalte situații.

Este evident acum că φ_p este chiar un izomorfism, deci $C(K_1)$ și $C(K_2)$ sînt izomorfe, de unde rezultă că $H_p(K_1) \cong H_p(K_2)$, $\forall p \geqslant 0$.

EXEMPLUL 2. Fie $K = \dot{\sigma}_2$, cu orientarea din fig. 72.

$$C_0(K) = \mathrm{Ab}\{v^0,\ v^1,\ v^2\},\quad C_1(K) = \mathrm{Ab}\{\sigma_1,\ \sigma_1',\ \sigma_1''\},$$

$$C(K): 0 \to C_1(K) \xrightarrow{d} C_0(K) \to 0,$$

$$Z_0(K) = C_0(K),\ d(\sigma_1) = v^1 - v^0,\ d(\sigma_1') = v^2 - v^1,$$

$$d(\sigma_1'') = v^2 - v^0 \Rightarrow Z_1(K) = \{\lambda_1\sigma_1 + \lambda_1'\sigma_1' + \lambda_1''\sigma_1''\,|$$

$$|\,\lambda_1(v^1 - v^0) + \lambda_1'(v^2 - v^1) + \lambda_1''(v^2 - v^0) = 0\} =$$

$$= \{\lambda_1(\sigma_1 + \sigma_1' - \sigma_1'')\,|\,\lambda_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

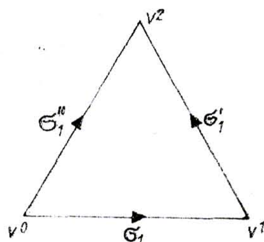


Fig. 72

Rezultă $B_1(K) = 0$ și deci $H_1(K) \cong \mathbb{Z}$. Apoi, $z \in Z_0(K)$ se scrie

$$z = \lambda_0 v^0 + \lambda_1 v^1 + \lambda_2 v^2 = \lambda_0 v^0 +$$

$$+ \lambda_1(v^1 - v^0) + \lambda_2(v^2 - v^0) +$$

$$+ (\lambda_1 + \lambda_2)v^0 = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)v^0 +$$

$$+ \lambda_1 d(\sigma_1) + \lambda_2 d(\sigma_1') \Rightarrow z = (\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)[v^0] \text{ și } [v^0] \neq 0,$$

deoarece $v^0 \neq dl$ *). Prin urmare, $H_0(K) \cong \mathbb{Z}$.

DEFINIȚIA 3. Pentru un complex simplicial geometric orientat K, definim *complexul de lanțuri simpliciale reduse* $\tilde{C}(K)$, cu $\tilde{C}_p(K) = C_p(K)$, $p \geqslant 0$, și $\tilde{C}_{-1}(K) = \mathbb{Z}$, $\tilde{C}_p(K) = 0$, $p < -1$, $\tilde{d}_p = d_p$, $p \neq 0, -1$ și $\tilde{d}_0(v) = 1$ pentru orice vîrf v. Grupurile de omologie ale lui $\tilde{C}(K)$ se notează $\tilde{H}_p(K)$ și se numesc *grupuri de omologie redusă*.

OBSERVAȚIA 1. $\tilde{H}_p(K) = H_p(K)$, $p \neq 0$, și $H_0(K) \cong \tilde{H}_0(K) \oplus \mathbb{Z}$ **).

EXEMPLUL 3. P fiind un punct, $\tilde{H}_n(P) = 0$, $\forall n \geqslant 0$ (în vreme ce $H_0(P) \cong \mathbb{Z}$).

DEFINIȚIA 4. Dat un complex simplicial geometric K și două simplexe $\sigma', \sigma'' \in K$, acestea se numesc *conexate* dacă are loc una din condițiile:

a) $\sigma' \cap \sigma'' \neq \emptyset$;

b) Există 1-simplexele $\sigma_1^1, \ldots, \sigma_1^p$, încît $\sigma' \cap \sigma_1^1 \neq \emptyset$, $\sigma_1^i \cap \sigma_1^{i+1} \neq \emptyset$ și $\sigma_1^p \cap \sigma'' \neq \emptyset$.

Se obține o relație de echivalență pe K și clasele sînt *componente simpliciale* sau *combinatorice* ale lui K. Se poate verifica imediat că dacă L este o componentă simplicială a lui K, atunci $|L|$ este o componentă liniar conexă a lui $|K|$.

TEOREMA 3. *Fie K un complex orientat, avînd r componente combinatorice. Atunci $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^r$ (și $\tilde{H}_0(K) \cong \mathbb{Z}^{r-1}$).*

Demonstrație. Fie L o componentă a lui K și $[v^0]$ un 0-simplex din L. Dat un vîrf v în L, există șirul de 1-simplexe: $[v, w^0], [w^0, w^1], \ldots, [w^p, v^0]$. Presupunînd orientarea încît aceste simplexe sînt pozitive, avem $-v = d([v, w^0] + [w^0, w^1] + \ldots + [w^p, v^0]) - v^0$, deci $[[v]] = [[v^0]]$, adică orice 0-lanț din L este *omolog* (echivalent) cu un 0-lanț $\lambda[v^0]$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Dacă $L_1, \ldots, L_r$ sînt componentele lui K, atunci un 0-lanț este o sumă de 0-lanțuri, cîte unul din fiecare componentă și termenii sumei fiind

*) Arătați de ce.
**) Stabiliți acest izomorfism.

independenţi (în raport cu derivarea). În adevăr, dacă v^0, v^1 sînt în componente diferite şi $\lambda_0[v^0] - \lambda_1[v^1] = d(l)$, l trebuie să aibă un vîrf v^0, altul v^1 şi restul 1-simplexelor să fie conexate, contrar ipotezei. Astfel, pentru orice 0-lanţ l, avem $[l] = \lambda_1[v^1] + \ldots + \lambda_r[v^r]$, cu $v^i \in L^i$ *), de unde obţinem $H_0(K) \cong \mathbb{Z}^r$.

Afirmaţia a doua rezultă din faptul că $\tilde{H}_0(K)$ este liber generat de $[v^2] - [v^1], \ldots, [v^r]) - [v^1]$.

TEOREMA 4. *Fie K şi L două complexe simpliciale geometrice orientate şi $f : |K| \to |L|$ o aplicaţie simplicială. Aceasta induce un homomorfism $f_* : H_p(K) \to H_p(L)$, $\forall p \geq 0$, cu proprietăţile următoare :*

i) $(1_{|K|})_* = 1_{H_p(K)}$;

ii) $(gf)_* = g_* f_*$, *pentru* $g : |L| \to |M|$, *în aceleaşi condiţii ca şi* f.

Demonstraţie. Dacă σ este un simplex în K, notăm prin $f(\sigma)$ imaginea sa în L, care este un simplex (eventual de dimensiune mai mică decît dim σ ; vom spune în acest caz că f *colapsează* σ. Dacă $+\sigma_p = \langle v^0, v^1, \ldots, v^p \rangle$ şi f nu colapsează σ_p, vom presupune că $+f(\sigma_p) = \langle f(v^0), f(v^1), \ldots \ldots, f(v^p)\rangle$. Definim $f = (f_p) : C(K) \to C(L)$, astfel

$$f_p(\lambda\sigma_p) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } f \text{ colapsează } \sigma_p, \\ \lambda f(\sigma_p) \text{ în caz contrar.} \end{cases}$$

Extindem apoi f_p la un homomorfism. Se obţine chiar o aplicaţie de lanţuri. În adevăr, dacă f colapsează σ_p, atunci $df_p(\sigma_p) = 0$ şi $f_{p-1}(d(\sigma_p)) = \sum[\sigma_p, \sigma_{p-1}] f_{p-1}(\sigma_{p-1})$. Să presupunem că $\sigma_p = [v^0, v^1, \ldots, v^p]$ şi că $f(v^0) = f(v^1)$. Atunci

$$f_{p-1}(d(\sigma_p)) = [\sigma_p, \sigma'_{p-1}] f_{p-1}(\sigma'_{p-1}) + [\sigma_p, \sigma''_{p-1}] f_{p-1}(\sigma''_{p-1}),$$

unde $\sigma'_{p-1} = [v^1, v^2, \ldots, v^p]$, $\sigma''_{p-1} = [v^0, v^2, \ldots, v^p]$.

Este clar că $[\sigma_p, \sigma'_{p-1}]\,[\sigma_p, \sigma''_{p-1}] = -1$ şi $f_{p-1}(\sigma'_{p-1}) = f_{p-1}(\sigma''_{p-1})$, deci $f_{p-1}(d(\sigma_p)) = 0$.

*) vîrfuri fixate.

Dacă f nu colapsează σ_p, atunci

$$df_p(\sigma_p) = \sum[f(\sigma_p), \sigma'_{p-1}]\sigma'_{p-1},$$

$$f_{p-1}d(\sigma_p) = \sum [\sigma_p, \sigma_{p-1}]\, f(\sigma_{p-1}).$$

Rezultă imediat că dacă $\sigma'_{p-1} < f(\sigma_p)$, avem $\sigma'_{p-1} = f(\sigma_{p-1})$, pentru $\sigma_{p-1} < \sigma_p$, de unde se deduce iarăşi egalitatea $df_p(\sigma_p) = f_{p-1}d(\sigma_p)$. Rezultă că avem $df_{\bullet} = f_{\bullet}d$ şi deci obţinem o aplicaţie de lanţuri. Se aplică Teorema 1 § 1. Verificarea proprietăţilor i) şi ii) o lăsăm în seama cititorului.

NOTAŢIA 1. Dacă $\sigma_p = [v^0, v^1, \ldots, v^p]$ este un p-simplex al unui complex simplicial K, iar v este un vîrf, încît $\{v^0, v^1, \ldots, v^p, v\}$ sînt afin independente, notăm simplexul $[v, v^0, \ldots, v^p]$ cu $v\sigma_p$ (considerat cu orientarea necesară, dacă complexul este orientat). Pentru un lanţ $l = \sum \lambda_i \sigma_p^i$, pentru care există toate simplexele $v\sigma_p^i$, $vl = \sum \lambda_i(v\sigma_p^i)$. Vom utiliza de asemenea notaţiile $\sigma_p v$ şi lv cu semnificaţiile analoage celor de mai sus.

LEMA 2. *Fie $\varphi, \psi : |K| \to |L|$ două aplicaţii simpliciale* **apropiate**, *adică, pentru orice simplex σ al lui K, $\varphi(\sigma)$ şi $\psi(\sigma)$ sînt feţe ale aceluiaşi simplex σ', din L. Atunci, homomorfismele $\varphi_*, \psi_* : H_n(K) \to H_n(L)$ (Teorema 4), coincid pentru $\forall n \geq 0$.*

Demonstraţie. Construim o omotopie a aplicaţiilor de lanţuri (φ_p), $(\psi_p) : C(K) \to C(L)$. Luăm $h_p = 0$, $p \leq -1$. Pentru $p = 0$, $h_0(v) = 0$ dacă $\varphi(v) = \psi(v)$ şi $h_0(v) = [\varphi(v), \psi(v)]$ dacă $\varphi(v) \neq \psi(v)$. Se verifică imediat relaţia $\varphi_0 - \psi_0 = dh_0$. Presupunem că am definit h_i, $-1 \leq i \leq p-1$, încît $\varphi_i - \psi_i = h_{i-1} \circ d + d \circ h_i$ şi astfel că $h_i(\sigma)$ este un lanţ în simplexul σ', de dimensiune minimă, care conţine vîrfurile $\varphi(\sigma)$ şi $\psi(\sigma)$. Fie $z = \varphi_p(\sigma_p) - \psi_p(\sigma_p) - h_{p-1}(d(\sigma_p))$, pentru $\sigma_p \in C_p(K)$. Avem $d(z) = d\varphi_p(\sigma_p) - d\psi_p(\sigma_p) - dh_{p-1}(d(\sigma_p)) = 0$.

Fie w un vîrf în simplexul σ' de dimensiune minimă ce conţine $\varphi(\sigma)$ şi $\psi(\sigma)$, încît putem considera σ' ca un con cu vîrful în w. Putem scrie $z = \sum \lambda_i \tau_p^i + \sum \mu_j (w\tau_{p-1}^j)$, unde τ_p^i şi τ_{p-1}^j nu au pe w ca vîrf. Din $d(z) = 0$ obţinem

$$0 = d(\sum \lambda_i \tau_p^i) + \sum \mu_j \tau_{p-1}^j - wd(\sum \mu_j \tau_{p-1}^j) \text{ *)}.$$

*) Am aplicat formula, uşor de verificat, $d(wl) = l - wdl$, pentru orice lanţ l.

Rezultă

$$d(\sum \lambda_i \tau_p^i) + \sum \mu_j \tau_{p-1}^j = 0 \text{ și } d(\sum \mu_j \tau_{p-1}^j) = 0.$$

Putem considera $c = \sum \lambda_i (w\tau_p^i)$ și avem $d(c) = z$. Definim atunci $h_p(\sigma_p) = c$ și extindem definiția prin liniaritate. Avem deci $dh_p(\sigma_p) = \varphi_p(\sigma_p) - \psi_p(\sigma_p) - h_{p-1}d(\sigma_p)$. Așadar, $h : \varphi \simeq \psi$ și aplicăm Cor. 1 § 1.

TEOREMA 5. *Fie K un complex simplicial (orientat) și K' prima sa divizare baricentrică. Atunci, complexele de lanțuri $C(K)$ și $C(K')$ sînt lanț-omotope.*

Demonstrație. Definim $\varphi = (\varphi_p) : C(K) \to C(K')$, o aplicație de lanțuri, inductiv după p. Pentru $p = 0$, $\varphi_0 : C_0(K) \to C_0(K')$ este aplicația de incluziune. Presupunem că am definit $\varphi_i : C_i(K) \to C_i(K')$, $i \leqslant p-1$, încît $d\varphi_i = \varphi_{i-1}d$; luăm $\varphi_p : C_p(K) \to C_p(K')$, $\varphi_p(\sigma_p) = \hat{\sigma}_p \varphi_{p-1}(d\sigma_p)$ *) și extindem prin liniaritate. Avem

$$d\varphi_p(\sigma_p) = \varphi_{p-1}(d\sigma_p) - \hat{\sigma}_p d\varphi_{p-1}(d\sigma_p) = \varphi_{p-1}(d\sigma_p) -$$

$$- \hat{\sigma}_p \varphi_{p-2} d^2 \sigma_p = \varphi_{p-1}(d\sigma_p).$$

Am obținut astfel o aplicație de lanțuri.

Pentru a construi o invers omotopă a acesteia, procedăm astfel: pentru fiecare vîrf $\hat{\sigma}$ al lui K' alegem un vîrf $\psi(\hat{\sigma})$ al simplexului σ din K. Se poate constata că se obține astfel o aplicație simplicială $\psi : |K'| \to |K|$. Notăm la fel aplicația de lanțuri indusă $\psi = (\psi_p) : C(K') \to C(K)$. Pentru această aplicație de lanțuri avem $\psi_p(\tau_p) = \eta\sigma_p$, unde σ_p este simplexul din K ce conține spațiul τ_p iar $\eta = \pm 1$. Anume, dacă $+\tau_p = \langle \hat{\sigma}_0, \ldots, \hat{\sigma}_p \rangle$, cu $\sigma_0 < \sigma_1 < \ldots < \sigma_p$, atunci $\eta = +1$ cînd $\langle \psi(\hat{\sigma}_0), \ldots, \psi(\hat{\sigma}_p) \rangle$ este orientat pozitiv și $\eta = -1$ în caz contrar. Pentru aplicațiile de lanțuri φ și ψ avem $\psi_0\varphi_0 = 1_{C_0(K)}$. Presupunem că $\psi_i\varphi_i = 1_{C_i(K)}$, $0 \leqslant i \leqslant p-1$. Pentru $i = p$ avem $\psi_p\varphi_p(\sigma_p) = \psi_p(\hat{\sigma}_p\varphi_{p-1}(d\sigma_p)) = m\sigma_p$, cu $m \in \mathbb{Z}$, datorită definiției lui (ψ_p). Din ultima relație obținem $d(m\sigma_p) = d\psi_p\varphi_p(\sigma_p) = \psi_{p-1}\varphi_{p-1}(d(\sigma_p)) = d(\sigma_p)$ (în baza ipotezei inductive). Deoarece pentru $p > 0$, $d(\sigma_p) \neq 0$, rezultă $m = 1$. Obținem deci $\psi\varphi \simeq 1_{C(K)}$.

---

*) Arătați că acest lanț există.

Apoi, urmînd o cale analoagă demonstrației Lemei 2, se construiește o omotopie de lanțuri $\varphi\psi \simeq 1_{C(K')}$. Astfel, $\varphi : C(K) \to C(K')$ este o echivalență omotopică de complexe de lanțuri.

COROLAR 1. *Pentru un complex simplicial K și pentru $p \geqslant 0$, $n \geqslant 1$, $H_p(K) \cong H_p(K^{(n)})$.*

Demonstrație. Din Teorema 5, rezultă inductiv că sînt lanț-omotope complexele de lanțuri $C(K)$ și $C(K^{(n)})$. Putem aplica atunci Cor. 1 § 1.

TEOREMA 6. *Fie $f : |K| \to |L|$ o aplicație continuă între două poliedre și fie $\varphi : |K^{(m)}| \to |L|$ o aproximare simplicială a aplicației f. Atunci, homomorfismul compus $H_n(K) \xrightarrow{\mu_*^{(m)}} H_n(K^{(m)}) \xrightarrow{\varphi_*} H_n(L)$, cu $\mu_*^{(m)}$ izomorfismul din Cor. 1, nu depinde de φ. Vom nota acest homomorfism prin f_* și-l vom numi* **homomorfismul indus de** *f.*

Demonstrație. Fie $\psi : |K^{(n)}| \to |L|$ o a doua aproximare simplicială a lui f. Să presupunem că $n > m$ și fie $\mu_*^{(n)} : H_*(K) \to H_*(K^{(n)})$ izomorfismul din Cor. 1. Fie apoi aplicația simplicială $\theta : |K^{(n)}| \to |K^{(m)}|$, construită repetînd construcția aplicației simpliciale ψ din demonstrația Teoremei 5. Avem atunci că $\varphi\theta : |K^{(n)}| \to |L|$ este o aproximare simplicială a lui f, ca și ψ, și prin urmare aceste două aplicații simpliciale sînt „apropiate" (vezi § 6 Cap. III). Aplicînd Lema 2, avem $(\varphi\theta)_* = \psi_*$, adică $\varphi_*\theta_* = \psi_* : H_*(K^{(n)}) \to H_*(L)$. Deducem: $\varphi_*\mu_*^{(m)} = \varphi_*\theta_*\mu_*^{(n)} = \psi_*\mu_*^{(n)}$, egalitatea $\mu_*^{(m)} = \theta_*\mu_*^{(n)}$ rezultînd din construcția inductivă a izomorfismului din Cor. 1 (vezi și demonstrația Teoremei 5).

TEOREMA 7. *Homomorfismul indus între grupurile de omologie de o aplicație continuă are următoarele proprietăți:*

i) $(1_{|K|})_* = 1_{H_n(K)}$;

ii) $(g \circ f)_* = g_* \circ f_*$, *pentru* $|K| \xrightarrow{f} |L| \xrightarrow{g} |M|$.

Demonstrație. Proprietatea i) este evidentă.

ii) Fie $\psi : |L^{(n)}| \to |M|$ o aproximare simplicială pentru g și $\varphi : |K^{(m)}| \to |L^{(n)}|$ o aproximare simplicială pentru $f : |K^{(m)}| \to |L^{(n)}|$. Putem considera o aplicație simplicială $\theta : |L^{(n)}| \to |L|$, încît $\theta\varphi : |K^{(m)}| \to |L|$ este o aproximare simplicială pentru f și $\psi\varphi : |K^{(m)}| \to |M|$ pentru gf. Avem deci $(gf)_* = \psi_*\varphi_*\mu_*^{(m)}$, $f_* = \theta_*\varphi_*\mu_*^{(m)}$ și $g_* = \psi_*\mu_*^{(n)}$.

Prin urmare, $g_* f_* = \psi_* \mu_*^{(n)} \theta_* \varphi_* \mu_*^{(m)} = \psi_* \varphi_* \mu_*^{(m)}$, deoarece θ_* este inversa lui $\mu_*^{(n)}$ (vezi demonstrația Teoremei 5).

COROLAR 2. *Dacă $f: |K| \to |L|$ este un homeomorfism, atunci $f_*: H_n(K) \to H_n(L)$ este izomorfism, pentru $\forall n \geqslant 0$.*

OBSERVAȚIA 2. În baza Cor. 2, pentru un poliedru $X = |K|$, putem nota $H_n(X)$ în loc de $H_n(K)$, grupurile de omologie depinzînd numai de spațiul topologic X și nu de triangularea sa. Astfel, din exemplul 2 deducem grupurile de omologie (simplicială) ale cercului

$$H_0(S^1) \cong \mathbb{Z},\ H_1(S^1) \cong \mathbb{Z},\ H_p(S^1) = 0,\ p \geqslant 2.$$

Grupurile $H_n(X)$ sînt numite *grupurile de omologie simplicială ale poliedrului X.*

LEMA 3. *Date două aplicații omotope $f, g: |K| \to |L|$, există o diviziune baricentrică $K^{(m)}$ și un șir de aplicații simpliciale $\varphi_0, \ldots, \varphi_n: |K^{(m)}| \to |L|$, încît φ_0 este aproximare simplicială pentru f, φ_n este aproximare simplicială pentru g și orice pereche φ_i, φ_{i+1} este* **apropiată**, *în sensul Lemei 1.*

Demonstrație. Fie $F: |K| \times I \to |L|$ o omotopie între f și g și $F_t: |K| \to L$, $F_t(x) = F(x, t)$. Fie δ un număr Lebesgue al acoperirii deschise $\{\mathrm{ost}_L v\}_{v \in L}$ a spațiului $|L|$. Datorită continuității uniforme a aplicației F, există un număr natural n, astfel încît $d(F_{\frac{i}{n+1}}(x), F_{\frac{i+1}{n+1}}(x)) < \delta$, $x \in |K|$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Atunci, mulțimea $\left\{F^{-1}_{\frac{i}{n+1}}(\mathrm{ost}_L v) \cap F^{-1}_{\frac{i}{n+1}}(\mathrm{ost}_L v)_{v \in L}\right\}$ constituie o acoperire deschisă, pentru fiecare i fixat. Există m, natural, suficient de mare, astfel încît pentru orice vîrf u din $K^{(m)}$ avem $\mathrm{ost}_{K^{(m)}} u \subset F^{-1}_{\frac{i}{n+1}}(\mathrm{ost}_L v) \cap F^{-1}_{\frac{i+1}{n+1}}(\mathrm{ost}_L v)$, pentru un vîrf $v \in L$. Aceasta implică deci că pentru fiecare vîrf u din $K^{(m)}$ să avem $F_{\frac{i}{n+1}}(\mathrm{ost}_{K^{(m)}} u) \subset \mathrm{ost}_L v$ și $F_{\frac{i+1}{n+1}}(\mathrm{ost}_{K^{(m)}} u) \subset \mathrm{ost}_L v$. Aplicînd demonstrația Teoremei 3 § 6 Cap. III, există, pentru fiecare i, o aplicație simplicială $\varphi_i: |K^{(m)}| \to |L|$ care este

aproximare simplicială comună aplicațiilor $F_{\frac{i}{n+1}}$ și $F_{\frac{i+1}{n+1}}$. φ_0 este aproximare simplicială pentru $F_0 = f$ iar φ_n pentru $F_1 = g$. Mai mult, deoarece φ_i și φ_{i+1} sînt ambele aproximări simpliciale pentru aplicația $F_{\frac{i+1}{n+1}}$ acestea sînt „apropiate".

TEOREMA 8. *Dacă $f, g: |K| \to |L|$ sînt două aplicații continue, omotope, atunci*

$$f_* = g_*: H_n(|K|) \to H_n(|L|),\ \textit{pentru } \forall n \geqslant 0.$$

Demonstrație. Conform Lemelor 2 și 3, avem

$$f_* = \varphi_{0*} \mu_*^{(m)} = \varphi_{1*} \mu_*^{(m)} = \ldots = \varphi_{n*} \mu_*^{(m)} = g_*.$$

COROLAR 3. *Dacă $f: |K| \to |L|$ este o echivalență omotopică, atunci $f_*: H_n(|K|) \to H_n(|L|)$ este izomorfism, $\forall n \geqslant 0$.*

COROLAR 4. *Pentru un poliedru contractibil $|K|$, $\widetilde{H}_p(|K|) = 0$, $\forall p \geqslant 0$.*

EXERCIȚII

1. Să se calculeze grupurile de omologie simplicială ale sferei S^2, considerînd pentru aceasta triangularea $\dot{\sigma}_3$.

Soluție:

$$H_0(S^2) \cong \mathbb{Z},\ H_2(S^2) \cong \mathbb{Z},\ H_p(S^2) = 0,\ p \neq 0,2.$$

2. Să se calculeze grupurile de omologie ale planului proiectiv real, utilizînd triangularea din exemplul 8 § 5.

Indicație. $H_0(P\mathbb{R}^2) \cong \mathbb{Z}$ (Teorema 3). $H_p(P\mathbb{R}^2) = 0$, $p \geqslant 3$. Considerăm orientarea și notațiile din fig. 73.

Deoarece nu există 3-simplexe $\Rightarrow$ $\Rightarrow C_3(K) = 0$, deci $B_2(K) = 0$. Pentru a calcula $Z_2(K)$, să observăm că orice 1-simplex $\sigma_1 = [A^i, A^j]$, $i < j$, este față a exact două 2-simplexe, σ_2^1 și σ_2^2. Dacă σ_1 este unul din simplexele $[A^0, A^1]$, $[A^0, A^2]$, $[A^1, A^2]$ ambele numere de incidență $[\sigma_2^1, \sigma_1]$ și $[\sigma_2^2, \sigma_1]$ sînt egale cu $+1$. Pentru celelalte cazuri,

$$[\sigma_2^1, \sigma_1]\,[\sigma_2^2, \sigma_1] = -1.$$

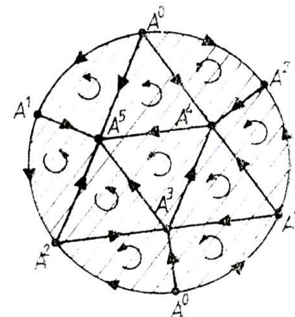


Fig. 73

Vom numi 1-simplexele $[A^0, A^1]$, $[A^0, A^2]$, $[A^1, A^2]$ de *tip I*, iar celelalte de *tip II*. Să presupunem că z este un 2-ciclu. Avem $d(z)=0$ și pentru ca în $d(z)$, care este o combinație de 1-simplexe de tip I și II, să se poată anula coeficienții 1-simplexelor de tip II, trebuie ca z să aibă toți coeficienții egali. Fie această valoare λ. Avem însă atunci, $dz = 2\lambda([A^0, A^1] + [A^0, A^2] + [A^1, A^2]) = 0 \Rightarrow \lambda = 0$. Deci $Z_2(K) = 0 \Rightarrow H_2(P\mathbb{R}^2) = 0$.

Se poate constata că un 1-ciclu care nu este o frontieră, trebuie să fie un multipu al ciclului $\zeta = [A^0A^1] + [A^1A^2] + [A^2A^0]$ (care nu este o frontieră, cum se vede ușor). Dar $2\zeta = d(\Sigma\sigma_2)$, unde suma este extinsă la toate simplexele orientate de dimensiune 2. Prin urmare, $H_1(P\mathbb{R}^2) = \text{Ab}\{\zeta : 2\zeta\}$, adică $H_1(P\mathbb{R}^2) \cong Z_2$.

3. Să se arate că $H_p(T^2) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = 0, 2, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}, & p = 1, \\ 0, & p \neq 0, 1, 2. \end{cases}$

§ 3. Șirul Mayer-Vietoris. Grupurile de omologie ale sferelor. Izomorfismul de suspensie

Fie (K, L) o pereche simplicială. Pentru orice $p \geq 0$, putem considera $C_p(L)$ ca un subgrup al grupului $C_p(K)$. Astfel, complexul de lanțuri $C(L)$ apare ca un subcomplex al lui $C(K)$. Putem de asemenea considera complexul $C(K, L) = \bigoplus_{p \geq 0} C_p(K, L)$, cu $C_p(K, L) = C_p(K)/C_p(L)$ și $\partial : C_p(K, L) \to C_{p-1}(K, L)$, homomorfismul $\partial(l + C_p(L)) = d(l) + C_{p-1}(L)$, pentru $l + C_p(L) \in C_p(K, L)$. Grupul $C_p(K, L)$ este grupul abelian liber generat de p-simplexele lui K, neconținute în L.

$C(K, L)$ este numit *complexul lanțurilor relative ale perechii simpliciale* (K, L). Grupul $H_n(C(K, L))$ se notează $H_n(K, L)$ și se numește *n-grupul de omologie relativă al perechii* (K, L). Se poate arăta că nu depinde decît de tipul omotopic al perechii topologice $(|K|, |L|)$*) și atunci este justificată și notația $H_n(|K|, |L|)$. Avem $\tilde{C}_{-1}(K, L) = \tilde{C}_{-1}(K)/\tilde{C}_{-1}(L) = \mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$, încît $\tilde{H}_n(K, L) = H_n(K, L)$, $\forall n \in \mathbb{Z}$.

TEOREMA 1. *Pentru o pereche simplicială* (K, L), *are loc* **șirul exact de omologie**

$$\ldots \longrightarrow H_n(L) \xrightarrow{i_*} H_n(K) \xrightarrow{j_*} H_n(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(L) \longrightarrow \ldots$$

*) Arătați aceasta utilizînd Teorema 8 § 2 și lema celor cinci homomorfisme (vezi exerc. 7 § 6 Cap. II).

Demonstrație. Avem șirul exact de complexe de lanțuri

$$0 \longrightarrow C(L) \xrightarrow{i_\bullet} C(K) \xrightarrow{j_\bullet} C(K, L) \longrightarrow 0,$$

cu $i_\bullet$ indus de incluziune și $j_\bullet$ de proiecția canonică. Aplicăm Teorema 5 § 1.

OBSERVAȚIA 1. Dacă în locul șirului exact de mai sus se consideră șirul exact de complexe de lanțuri reduse

$$0 \longrightarrow \tilde{C}(L) \xrightarrow{i_\bullet} \tilde{C}(K) \xrightarrow{j_\bullet} C(K, L) \longrightarrow 0$$

obținem *șirul exact de omologie redusă al perechii* (K, L)

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}_n(L) \xrightarrow{i_*} \tilde{H}_n(K) \xrightarrow{j_*} H_n(K, L) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{n-1}(L) \longrightarrow \ldots$$

Fie acum un complex simplicial K și două subcomplexe ale sale L și M, încît avem $K = L \cup M$. Notăm incluziunile

$$i_1 : |L \cap M| \to |L|, \quad i_2 : |L \cap M| \to |M|, \quad i_3 : |L| \to |K|,$$

$$i_4 : |M| \to |K|.$$

TEOREMA 2. *Există șirul exact de grupuri abeliene*

$$\ldots \longrightarrow H_n(L \cap M) \xrightarrow{\eta_*} H_n(L) \oplus H_n(M) \xrightarrow{\xi_*} H_n(K) \xrightarrow{\partial_*}$$

$$\xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(L \cap M) \longrightarrow \ldots,$$

unde

$$\eta_*([z]) = ((i_1)_*[z], \; -(i_2)_*[z]), \quad \xi_*([z_1], [z_2]) =$$

$$= (i_3)_*[z_1] + (i_4)_*[z_2],$$

numit **șirul exact de omologie Mayer-Vietoris al triadei** $(K; L, M)$.

Demonstrație. Considerăm $C(L) \oplus C(M) = \bigoplus_{n=0} C_n(L) \oplus \oplus C_n(M)$ și homomorfismul $d^+ : C(L) \oplus C(M) \to C(L) \oplus \oplus C(M)$, $d^+(\sigma', \sigma'') = (d(\sigma'), d(\sigma''))$. Se obține un complex de lanțuri. Se poate arăta (vezi exerc. 2) că are loc izomorfismul

$$(1)\quad H_n(C(L) \oplus C(M)) \cong H_n(L) \oplus H_n(M).$$

Pe de altă parte, putem considera șirul de complexe de lanțuri

$$(2)\quad 0 \longrightarrow C(L \cap M) \xrightarrow{\eta} C(L) \oplus C(M) \xrightarrow{\xi} C(K) \longrightarrow 0,$$

cu $\eta(\sigma) = ((i_1)_{\cdot}(\sigma), -(i_2)_{\cdot}(\sigma))$, $\xi(\sigma_1, \sigma_2) = (i_3)_{\cdot}(\sigma_1) + (i_4)_{\cdot}(\sigma_2)$. Rezultă ușor că acest șir este exact *). Aplicînd atunci Teorema 5 § 1 și ținînd seama și de izomorfismul (1), obținem șirul exact Mayer-Vietoris.

OBSERVAȚIA 2. Utilizînd în locul șirului (2) șirul complexelor de lanțuri reduse,

$$0 \longrightarrow \tilde{C}(L \cap M) \xrightarrow{\tilde{\eta}} C(L) \oplus \tilde{C}(M) \xrightarrow{\tilde{\xi}} \tilde{C}(K) \longrightarrow 0,$$

cu $\tilde{\eta}_{-1}(n) = (n, -n)$, $\tilde{\xi}_{-1}(m, n) = m + n$, se obține *șirul exact Mayer-Vietoris de omologie redusă*

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}_n(L \cap M) \xrightarrow{\tilde{\eta}_*} \tilde{H}_n(L) \oplus \tilde{H}_n(M) \xrightarrow{\tilde{\xi}_*} \tilde{H}_n(K) \xrightarrow{\tilde{\partial}_*}$$

$$\xrightarrow{\tilde{\partial}_*} \tilde{H}_{n-1}(L \cap M) \longrightarrow \ldots$$

TEOREMA 3. *Grupurile de omologie redusă ale sferei* S^n, $n \geq 0$, *sînt*

$$\tilde{H}_p(S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = n, \\ 0, & p \neq n. \end{cases}$$

Demonstrație. Fie L triangularea sferei S^n ca în exemplul 4 § 5, cu vîrfurile $A^1, A'^1, \ldots, A^{n+1}, A'^{n+1}$. Fie M subcomplexul obținut omițînd A'^{n+1} și N subcomplexul

*) Dovediți aceasta.

obținut omițînd A^{n+1}, astfel că $M \cap N$ este triangulare pentru S^{n-1}. Considerăm șirul Mayer-Vietoris de omologie, redusă al triadei $(L; M, N)$, obținînd șirul exact

$$\ldots \longrightarrow \tilde{H}_p(S^{n-1}) \xrightarrow{\tilde{\eta}_*} \tilde{H}_p(M) \oplus \tilde{H}_p(N) \xrightarrow{\tilde{\xi}_*} \tilde{H}_p(S^n) \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{\tilde{\partial}_*} \tilde{H}_{p-1}(S^{n-1}) \longrightarrow \ldots$$

Deoarece $|M|$ și $|N|$ sînt spații contractibile, $\tilde{H}_p(M) = 0$, $\tilde{H}_p(N) = 0 \Rightarrow \tilde{\partial}_* : \tilde{H}_p(S^n) \cong \tilde{H}_{p-1}(S^{n-1})$.

Rezultatul teoremei se obține acum prin inducție utilizînd Teorema 3 § 2.

COROLAR 1. $H_p(D^{n+1}, S^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & p = n+1, \\ 0, & p \neq n+1. \end{cases}$

Demonstrație. Se aplică Teoremele 1 și 3.

COROLAR 2 *Dacă* $m \neq n$ *sferele* S^m *și* S^n *nu sînt echivalente omotopic.*

COROLAR 3 *Dacă* $m \neq n$, $\mathbb{R}^m$ *și* $\mathbb{R}^n$ *nu sînt homeomorfe**).

Demonstrație. Dacă presupunem contrariul și dacă $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ este un homeomorfism, atunci este indus un homeomorfism $f' : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n \setminus \{f(0)\}$, deci o echivalență omotopică a sferelor S^{m-1} și S^{n-1} **), contrar Cor. 2.

COROLAR 4. S^n *nu este retractă a discului* D^{n+1}.

Demonstrație. Dacă $r : D^{n+1} \to S^n$ ar fi o retracție și $i : S^n \hookrightarrow D^{n+1}$ incluziunea, atunci relația $ri = 1$ implică $i_* : H_n(S^n) \to H_n(D^{n+1})$ monomorfism, în contradicție cu Cor. 4 § 2 și Teorema 3.

COROLAR 5 (teorema lui Brouwer de punct fix). *Orice aplicație* $f : D^n \to D^n$, $n \geq 0$, *are cel puțin un punct fix.*

Demonstrație. Dacă presupunem contrariul, atunci există dreapta determnată de x și $f(x)$, $\forall x \in D^n$, și luăm

*) Rezultatul mai general este următorul : dacă U este deschisă în $\mathbb{R}^m$ și V în $\mathbb{R}^n$, U și V nu sînt homeomorfe [37, p.122].

**) Exemplul 9 § 13 Cap. I.

$r(x)$ punctul de intersecție al acesteia cu D^n, astfel că $f(x)$ nu este între x și $r(x)$ (vezi fig. 74). Aplicația $x \mapsto r(x)$ este o retracție *) a lui D^n în S^{n-1}, contrar Cor. 4.

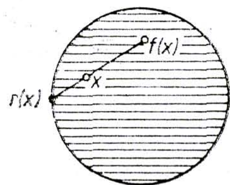


Fig. 74

DEFINIȚIA 1. Dat un complex simplicial K, se definește *suspensia* sa, SK, prin $K * L$, unde L constă din două puncte a și b. Considerînd spațiul $|K * L|$, acesta este notat $S|K|$ (vezi § 5 Cap. III). Dacă $f : |K| \to |L|$ este o aplicație continuă, aceasta induce o aplicație continuă $Sf : S|K| \to S|L|$, $Sf = f * 1$.

EXEMPLUL 1. $S(S^{n-1})$ este S^n. În adevăr, considerînd triangularea L, a sferei S^{n-1}, din exemplul 4 § 5, SL se poate identifica cu o triangulare a lui S^n, luînd punctele a și b din Def. 1 drept punctele A^{n+1} și respectiv A'^{n+1}.

TEOREMA 4. *Pentru orice $n \geqslant 0$, există un izomorfism $s_* : \tilde{H}_n(K) \cong \tilde{H}_{n+1}(SK)$, numit* **izomorfismul de suspensie.** *Dacă $f : |K| \to |L|$ este o aplicație continuă, $s_* f_* = (Sf)_* s_*$.*

Demonstrație. Definim $s : \tilde{C}(K) \to \tilde{C}(SK)$, prin $s(\sigma) = \sigma a - \sigma b$ (vezi Notația 1 § 2), $s(1) = a - b$ și extindem prin liniaritate. Avem $s(\tilde{C}_n(K)) \subset \tilde{C}_{n+1}(SK)$ **) dar, deoarece $ds = sd$, se induce $s_* : \tilde{H}_n(K) \to \tilde{H}_{n+1}(SK)$. Considerăm acum triada $(SK\,;\, K * a, K * b)$ și fie homomorfismul $\partial_* : \tilde{H}_{n+1}(SK) \to \tilde{H}_n(K)$ din șirul Mayer-Vietoris. Acesta este un izomorfism, deoarece $|K * a|$ și $|K * b|$ sînt contractibile. Apoi, pentru $[z] \in \tilde{H}_n(K)$, $s(z) = za - zb = \xi(za, -zb)$ și $d^+(za, -zb) = (-1)^{n+1}(z, -z) = (-1)^{n+1}\eta(z)$, deci $\partial_* s_* [z] = (-1)^{n+1}[z]$, adică $\partial_* s_* = (-1)^{n+1}$ Id, care arată că s_* este izomorfism.

EXERCIȚII

1. Să se completeze Teorema 1 cu consecința Teoremei 6 § 1.

2. Să se arate că dacă sînt exacte șirurile

$$0 \longrightarrow A_i \xrightarrow{\theta_i} B_i \xrightarrow{\varphi_i} C_i \longrightarrow 0, \quad \forall i \in I,$$

*) Continuitatea aplicației r se poate urmări în [43, p. 21].

**) Deci s nu este o aplicație de lanțuri!

atunci este exact șirul

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i \xrightarrow{\oplus \theta_i} \bigoplus_{i \in I} B_i \xrightarrow{\oplus \varphi_i} \bigoplus_{i \in I} C_i \longrightarrow 0.$$

Să se deducă izomorfismul $H_n(C(L) \oplus C(M)) \cong H_n(L) \oplus H_n(M)$ din Teorema 2.

3. Să se completeze Teorema 2 cu consecința Teoremei 6 § 1.

4. Să se arate că $\tilde{H}_m(S^n \vee S^n) \cong \tilde{H}_m(S^n) \oplus \tilde{H}_m(S^n)$.

Indicație. Se aplică șirul Mayer-Vietoris triadei $(S^n \vee S^n;\, S^n, S^n)$.

5. Pentru un *triplet* simplicial (K, L, M), are loc următorul șir exact de omologie

$$\ldots \longrightarrow H_n(L, M) \xrightarrow{i_*} H_n(K, M) \xrightarrow{j_*} H_n(K, L) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(L, M) \longrightarrow \ldots$$

unde i_* și j_* sînt induse de incluziuni.

Indicație. Se aplică Teorema 5 § 1 șirului exact de lanțuri

$$0 \to C(L, M) \xrightarrow{i_\cdot} C(K, M) \xrightarrow{j_\cdot} (K, L) \longrightarrow 0.$$

6. Fie L și M subcomplexe ale complexului simplicial K, încît $K = L \cup M$. Să se arate că incluziunea $i : (|M|, |L \cap M|) \to (|K|, |L|)$ induce *izomorfismele de excizie* $i_* : H_n(M, L \cap M) \to H_n(K, L)$.

Indicație. $i_\cdot : C(M, L \cap M) \to C(K, L)$ este izomorfism, deoarece un simplex este în $M \setminus (L \cap M)$ dacă și numai dacă este în $K \setminus L$.

4. Homomorfismul Hurewicz. Teorema lui Hopf (Grupul $\pi^n(S^n)$)

Presupunem $n \geqslant 1$. Atunci, $\tilde{H}_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ (Teorema 3 § 3) și fie *generatorul standard* $[z_n]$ al lui $\tilde{H}_n(S^n)$, unde $z_0 = A^1 - A'^1$, $z_1 = [A^1A^2] - [A^1A'^2] - [A'^1A^2] + [A'^1A'^2]$ și $[z_n] = s_*[z_{n-1}]$, pentru s_* izomorfismul de suspensie, $s_* : \tilde{H}_n(S^n) \to \tilde{H}_{n+1}(S^{n+1})$.

DEFINIȚIA 1. *Aplicația Hurewicz,* $h_n : \pi_n(|K|) \to H_n(K)$, $(n \geqslant 1)$, se definește astfel: dacă $[f] \in \pi_n(|K|)$ *) este reprezentată de $f : S^n \to |K|$ **), atunci $h_n[f] = f_*([z_n])$.

*) Am omis scrierea punctului bază, dar acesta se presupune.

**) f este aplicație cu punctele bază (Teorema 1 § 1 Cap. II).

TEOREMA 1. *h_n este un homomorfism, numit* **homomorfismul Hurewicz.**

Demonstrație. Fie $[f]$, $[g] \in \pi_n(|K|)$. După Observația 2 § 1 Cap. II, $[f]\,[g] = [(f \vee g)q]$. Atunci

$$h_n([f]\,[g]) = ((f \vee g)q)_*([z]) = (f \vee g)_* q_* [z_n] =$$

$$= f_*[z_n] + g_*[z_n] = h_n[f] + h_n[g].$$

TEOREMA 2. *Dacă poliedrul $|K|$ este liniar conex, homomorfismul $h_1 : \pi_1(|K|) \to H_1(K)$ este surjectiv și $Ker\, h_1$ este subgrupul comutatorilor, $[\pi_1(|K|), \pi_1(|K|)]$.*

Demonstrație. Conform Teoremei 1 § 7 Cap. III, avem $\pi_1(|K|) \cong E(K, v^0)$ și deci h_1 se poate scrie $\Phi : E(K, v^0) \to H_1(K)$, încît dacă $\alpha = [v^0 v^1 \ldots v^k v^0]$ rezultă

$$\Phi([\alpha]) = [z(\alpha)] = [[v^0 v^1] + [v^1 v^2] + \ldots + [v^k v^0]],$$

unde vîrfurile ce se repetă se omit.

Dacă luăm un ciclu $z \in Z_1(K)$, acesta este de forma $z = [w^1 w^2] + [w^2 w^3] + \ldots + [w^p w^1]$. Unim v^0 cu w^1 printr-un ep γ și luînd $\alpha = \gamma w^1 w^2 \ldots w^p w^1 \gamma^{-1}$, avem $\Phi([\alpha]) = [z]$. Prin urmare, Φ (deci h_1) este epimorfism. Apoi, deoarece $H_1(K)$ este abelian, Ker h_1 trebuie să conțină subgrupul comutatorilor lui $\pi_1(|K|)$.

Reciproc, fie α un el în (K, v^0), încît $z(\alpha) = d(\lambda_1 \sigma_2^1 + \ldots + \lambda_p \sigma_2^p)$, cu $+\sigma_2^i = \langle a^i, b^i, c^i \rangle$ și pentru $\forall i = \overline{1, p}$, alegem cîte un ep, γ_i, unind v^0 cu a^i. Drumul închis de muchii $\gamma_i a^i b^i c^i a^i \gamma_i^{-1}$ este echivalent cu drumul constant deoarece $[a^i b^i c^i]$ este un 2-simplex, încît $\beta = \prod (\gamma_i a^i b^i c^i \gamma_i^{-1})^{\lambda_i}$ are aceeași proprietate, deci $[\alpha\beta^{-1}] = [\alpha]$, în $E(K, v^0)$. Avem, de asemenea, $z(\gamma_i a^i b^i c^i a^i \gamma_i^{-1}) = d[a^i b^i c^i]$ și deci $z[\alpha\beta^{-1}] = 0$. Aceasta însă se poate întîmpla numai dacă o muchie orientată $[a, b]$ apărînd de n ori în $\alpha\beta^{-1}$, apare în acest ep și $[b, a]$ de același număr n de ori. Ținînd seama de izomorfismul $\theta : G(K, L) \to E(K, v^0)$ (Teorema 2 § 7 Cap. III), dacă aplicăm θ^{-1} elementului $[\alpha\beta^{-1}]$ și luăm apoi imaginea sa în $G(K, L)/[G(K, L), G(K, L)]$, obținem elementul nul *). Homomorfismul θ^{-1} fiind izo-

*) Vezi demonstrația Teoremei 4 § 8.

morfism, rezultă că $[\alpha\beta^{-1}] \in [G(K, L), G(K, L)]$. Cum $[\alpha\beta^{-1}] = [\alpha]$, obținem $[\alpha] \in [G(K, L), G(K, L)]$, ceea ce încheie demonstrația teoremei.

OBSERVAȚIA 1. Pentru demonstrația teoremei generale de izomorfism a lui Hurewicz se poate consulta [37, p. 326].

În încheierea acestui paragraf, vom arăta că $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$. Pentru aceasta, să considerăm homomorfismul Hurewicz $h_n : \pi^n(S^n) \to H_n(S^n)$, $n \geqslant 1$, adică $h_n : \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$. Acest homomorfism se notează în mod obișnuit prin $d : \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$.

DEFINIȚIA 2. Dacă $f : S^n \to S^n$ este o aplicație continuă, *gradul* acesteia este numărul întreg $d([f])$, notat grad f. Avem $f_*([z_n]) = d([f])\,[z_n]$. Dacă $[z_n]$ se înlocuiește cu $[z_n'] = m[z_n]$, $m \in \mathbb{Z}$, atunci $f_*([z_n']) = mf_*[z_n] = md([f])\,[z_n] = d([f])\,[z_n']$, deci grad $[f]$ nu depinde de alegerea lui $[z_n]$.

TEOREMA 3 (teorema lui Hopf). *Homomorfismul $d : \pi_n(S^n) \to \mathbb{Z}$, $d([f]) =$ grad f, este un izomorfism de grupuri* $(n \geqslant 1)$.

Demonstrație. Din definiția homomorfismului Hurewicz, rezultă că aplicația d este corect definită și este homomorfism. Apoi, gradul aplicației f satisface relația $f_*([z_n]) = (\text{grad}\, f)[z_n]$. Dacă luăm $f = 1_{S^n}$, atunci grad $f = 1$ și deci d este epimorfism, $m = d(m[1_{S^n}])$, $\forall m \in \mathbb{Z}$.

Vom arăta, prin inducție după n, că d este monomorfism. Pentru $n = 1$, avem $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$ și d fiind epimorfism, rezultă imediat că d este izomorfism *).

Presupunem afirmația pentru $n - 1$ și fie $[f] \in \pi_n(S^n)$, $(n \geqslant 2)$, cu grad $f = 0$. După Corolarul 3 § 3 Cap. II, este suficient să arătăm că $f : S^n \to S^n$ este omotopă cu o aplicație constantă. Acest lucru se stabilește arătînd că există $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$, de grad zero și încît $f \simeq Sg$ (ca aplicații fără puncte bază), unde considerăm $S^n = S(S^{n-1})$.

Fie polii sferei S^n, $N = (0, 0, \ldots 0, 1)$ și $S = (0, 0 \ldots \ldots 0, -1)$ cu emisferele deschise $\mathring{S}^n_+$ și $\mathring{S}^n_-$. Triangulăm S^n încît N și S să fie în interioarele unor n-simplexe. După

*) Se poate arăta că pentru $n = 1$, d coincide cu aplicația grad din Prop. 1 § 4 Cap. II.

Teorema de aproximare simplicială, putem presupune că f este o aplicație simplicială de la o subdivizare a triangulării de mai sus la aceasta și atunci $f^{-1}(N)$ și $f^{-1}(S)$ sînt finite. Fie $f^{-1}(N) = \{p_1, \ldots, p_r\}$, $f^{-1}(S) = \{q_1, \ldots, q_s\}$. Se poate presupune, eventual luînd o aplicație omotopă cu f, că $p_i \in \mathring{S}^n_+$, $i = 1, \ldots, r$ și $q_j \in \mathring{S}^n_-$, $j = 1, \ldots, s$. (Pentru amănunte vezi exerc. 11.)

Definim acum $f' : S^n \to S^n$, prin $f'|S^n_- = f|S^n_-$ și $f'(\lambda N + (1 - \lambda)x) = \lambda N + (1 - \lambda)f(x)$, $x \in S^{n-1}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. (Am „decurbat'' deci S^n_+.) Deoarece S^n_+ este compact, $f(S^n_+)$ este închisă și $S \notin f(S^n_+)$. Există deci o deschisă U ce conține S și $f^{-1}(U) \subset \mathring{S}^n_-$. Rezultă că mulțimile $f^{-1}(x)$ și $f'^{-1}(x)$ coincid, $\forall x \in U$. Fie V o deschisă nevidă încît $\overline{V} \subset U$ și fie $W = f^{-1}(V) = f'^{-1}(V)$. Deoarece $S^n \setminus V \subset S^n \setminus \{\text{pct.}\}$ și $S^n \setminus \{\text{pct.}\}$ este homeomorf cu D^n, rezultă că avem $f|(S^n \setminus W) \simeq f'|(S^n \setminus W)$, printr-o omotopie ce corespunde prin homeomorfismul $S^n \setminus \{\text{pct.}\} \equiv D^n$ unei omotopii liniare. În particular, această omotopie pe $(S^n \setminus W) \cap f^{-1}(U)$ este constantă încît „lipind''-o cu omotopia constată pe $\overline{W} \subset f^{-1}(U)$, obținem $f \simeq f'$. Definim acum $f'' : S^n \to S^n$, prin $f''|S^n_+ = f'|S^n_+$ și $f''(\lambda S + (1 - \lambda)x) = \lambda S + (1 - \lambda)f'(x)$, $x \in S^{n-1}$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Cu același procedeu ca mai sus, obținem $f'' \simeq f' \simeq f$. Avem $f''(S) = S$ și $f''(N) = f'(N) = N$, $f''(S^{n-1}) \subset S^n \setminus \{N, S\}$. Putem mișca imaginea $f''(S^{n-1})$ într-un sens sau altul al meridianelor lui S^n, încît această imagine să fie în S^{n-1}. Cu alte cuvinte, putem lua $f''' : S^n \to S^n$ omotopă cu f'', și deci cu f, încît $f'''(N) = N$, $f'''(S) = S$, $f'''(S^{n-1}) \subset S^{n-1}$. Este clar că $f''' = Sg$, unde $g = f'''|S^{n-1}$. Am obținut așadar $g : S^{n-1} \to S^{n-1}$, încît $f \simeq Sg$. Deoarece prin ipoteză $d(f) = 0 \Rightarrow d(Sg) = 0$, deci $(Sg)_*[z_n] = 0$, rezultă $(Sg)_* s_*[z_{n-1}] = 0 \Rightarrow s_* g_*[z_{n-1}] = 0 \Rightarrow g_*[z_{n-1}] = 0 \Rightarrow d(g) = 0$. (Am aplicat Teorema 4 § 3.) Datorită ipotezei inductive, rezultă $g \simeq$ const. Este clar atunci că $Sg \simeq$ const implică $f \simeq$ const și prin urmare d este și monomorfism.

OBSERVAȚIA 1. Teorema lui Hopf se mai enunță astfel:

Două aplicații sferice $f, g : S^n \to S^n$ sînt omotope dacă și numai dacă au același grad.

OBSERVAȚIA 2. Cu Teorema 3 de mai sus am încheiat considerațiile din această carte asupra grupurilor

de omotopie ale sferelor, de care ne-am ocupat în mai multe etape. Problema este însă cu mult mai complicată cînd este vorba de $\pi_m(S^n)$, cu $m > n$, și depășește posibilitățile elementare de abordare.

Unele cazuri particulare pot fi obținute din rezultatele precedente (Prop. 1 § 8 Cap. II, Cor. 2 § 8 Cap. II, Teorema 3). Așa, de exemplu, are loc următorul rezultat.

COROLAR 1. $\pi_3(S^2) \cong \mathbb{Z}$.

EXERCIȚII

1. Să se arate că $\pi_5(S^4) \cong \pi_4(S^3) \cong \pi_4(S^2)$.

Indicație. Se aplică rezultatele necesare demonstrării Cor. 1 și exerc. 8 § 8 Cap. II.

2. Să se arate că dacă $f, g : S^n \to S^n$, atunci grad$(g \circ f) =$ (grad f)(grad g).

3. Fie $r_i : S^n \to S^n$, simetria față de planul x_i, $i = 1, \ldots, n + 1$, $r_i(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_{n+1}) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_{n+1})$. Să se arate că grad $r_i = -1$.

Indicație. Prin r_i generatorul standard își schimbă orientarea.

4. Fie $r : S^n \to S^n$ aplicația *antipodală* (simetria față de origine), $r(x) = -x$. Să se arate că grad $r = (-1)^{n+1}$.

Indicație $r = r_1 \circ r_2 \circ \ldots \circ r_{n+1}$ și se aplică exerc. 2 și 3.

5. Dacă $f : S^n \to S^n$ nu are puncte fixe, atunci grad $f = (-1)^{n+1}$.

Indicație. Dacă f nu are puncte fixe, se poate construi $F(x, t) = \dfrac{(1 - t)f(x) - tx}{\|(1 - t)f(x) - tx\|}$, care este o omotopie a lui f cu aplicația antipodală.

6. Să se arate că dacă n este par și dacă $f : S^n \to S^n$ este omotopă cu 1_{S^n}, atunci f are un punct fix.

7. O aplicație continuă $f : S^n \to S^n$, încît $\langle f(x), x \rangle = 0$ se numește *cîmp continuu de vectori unitari pe* S^n. Să se arate că un asemenea cîmp există dacă și numai dacă n este impar.

Soluție. Dacă $n = 2m - 1$, $f(x_1, \ldots, x_{2m}) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3, \ldots, x_{2m}, -x_{2m-1})$. Fie acum $f : S^n \to S^n$ un cîmp de vectori unitari pe S^n. Definim

$$F : S^n \times I \to S^n,\ F(x, t) = \cos(t\pi) + f(x)\sin(t\pi).$$

Avem $F : 1_{S^n} \simeq r$ și deci grad $r = 1$. Prin urmare, $(-1)^{n+1} = 1$, adică $n + 1 =$ par.

8. Fie $f : S^n \to S^n$ continuă, K o triangulare a lui S^n și $g : |K^{(m)}| \to |K|$ o aproximare simplicială a lui f. Alegem o orientare a lui K și una a lui $K^{(m)}$. Pentru un simplex pozitiv $\sigma \in K^{(m)}$, $g(\sigma)$ poate fi orientat pozitiv sau negativ. Fie p numărul simplexelor σ pentru care are loc prima situație, iar q numărul celor pentru care $g(\sigma)$ este un simplex negativ. Să se arate că grad $f = p - q$.

Indicație. Se utilizează Def. 2 și Teorema 6 § 2.

9. Fie X un spațiu topologic arbitrar și $f, g : X \to S^n$ două aplicații continue. Presupunem că există o deschisă nevidă $D \subset S^n$ astfel încît $f^{-1}(s) = g^{-1}(x)$, $\forall s \in D$. Să se arate că $f \simeq g$.

■ *Soluție*. Fie V deschisă în S^n, $V \neq \emptyset$, încît $\overline{V} \subset D$. Fie $W = f^{-1}(V) = g^{-1}(V)$. Deoarece $S^n \setminus V \subset S^n \setminus \{\text{pct.}\}$, ultimul spațiu fiind contractibil, rezultă $f|(X\setminus W) \simeq g|(X\setminus W)$, printr-o omotopie provenind din cea liniară pe $\overset{\circ}{D}{}^n \equiv S^n\setminus\{\text{pct}\}$. În particular, pe $(X\setminus W)\cap f^{-1}(D)$ omotopia este constantă. Putem „lipi" deci această omotopie cu omotopia constantă pe $\overline{W}\subset f^{-1}(D)$ și obținem $f\simeq g$.

10. Fie L un segment de dreaptă, cu capetele x și y, din spațiul $\mathbb{R}^n$. Pentru un $\varepsilon > 0$, fie $M = \{z \in \mathbb{R}^n | d(z, L) \leqslant \varepsilon\}$ și $N = \{z\in\mathbb{R}^n | d(z, L) = \varepsilon\}$. ($M$ este numită o *ε-vecinătate închisă* a lui L.) Să se arate că există un homeomorfism $h: M \to M$, încît $h(x) = y$ și $h(z) = z$, $\forall z \in N$.

Soluție. Putem reprezenta punctele din M sub forma $\lambda x + (1-\lambda)z$ sau $\lambda' y + (1-\lambda')z'$, cu z, $z' \in N$ și λ, $\lambda' \in [0, 1]$ (vezi fig. 75). Definim atunci $h: M\to M$, prin $h(\lambda x + (1-\lambda)z) = \lambda y + (1-\lambda)z$.

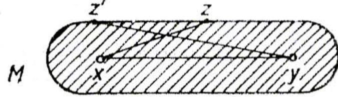


Fig. 75

11. Fie $\overset{\circ}{S}{}^n_+$, $\overset{\circ}{S}{}^n_-$ emisferele deschise ale sferei S^n și $N = (0, \ldots, 0, 1)$, $S = (0, \ldots, 0, -1)$ polii acesteia. Fie $f: S^n \to S^n$ o aplicație continuă. Să se arate că:

a) Există $g: S^n \to S^n$, omotopă cu f, astfel încît $g^{-1}(N)$ și $g^{-1}(S)$ să fie mulțimi finite;

b) Dacă $f^{-1}(N) = \{p_1, \ldots, p_r\}$ și $f^{-1}(S) = \{q_1, \ldots, q_s\}$, atunci există g omotopă cu f, încît $g(p_i)\in \overset{\circ}{S}{}^n_+$ și $g(q_j) \in \overset{\circ}{S}{}^n_-$, $i = 1, \ldots, r$; $j = 1, \ldots, s$.

Soluție. Fie K o triangulare a sferei S^n, încît N și S să fie în interioarele unor n-simplexe. Considerăm o aproximare $g: |K^{(m)}| \to |K|$ a lui f. Nu putem avea $g(x) = g(y)$, pentru x și y în interiorul unui aceluiași n-simplex. Prin urmare, $f^{-1}(N)$ (resp $f^{-1}(S)$) nu poate conține mai multe puncte decît simplexele lui $K^{(m)}$;

b) Fie homeomorfismul $\varphi: S^n\setminus\{S\}\to \overset{\circ}{D}{}^n$. Presupunem că toate punctele p_i, q_j sînt distincte de S. Considerăm punctele $p_{i'}$ și $q_{j'}$ care nu sînt în $\overset{\circ}{S}{}^n$ și respectiv în $\overset{\circ}{S}{}^n_-$. Atunci, $\varphi(p_{i'}) \notin \varphi(\overset{\circ}{S}{}^n_+)$, $\varphi(q_{j'}) \notin \varphi(\overset{\circ}{S}{}^n_-)$. Unim punctul $\varphi(p_{i'})$, cu un punct $r_{i'}\in\varphi(\overset{\circ}{S}{}^n_+)$ și $\varphi(q_{j'})$ cu un punct $s_{j'}\in\varphi(\overset{\circ}{S}{}^n_-)$. Fie $L_{i'}$, $L_{j'}$, segmentele de dreaptă ce se obțin. Este ușor de văzut că putem presupune toate aceste segmente dijuncte. Mai mult, aceste segmente fiind compacte, există $\varepsilon > 0$ astfel încît ε-vecinătățile închise (vezi exerc. 10) $M_{i'}$ și $M_{j'}$ ale acestora să fie toate disjuncte. Prin aplicarea repetată a exerc. 10, obținem un homeomorfism $h: \overset{\circ}{D}{}^n \to \overset{\circ}{D}{}^n$, încît $h\varphi(p_{i'}) = r_{i'}$, $h\varphi(q_{j'}) = s_{j'}$ și care este identitatea în afara vecinătăților $M_{i'}$ și $M_{j'}$. Acum, utilizînd homeomorfismul φ^{-1}, obținem un homeomorfism $h': S^n\to S^n$, încît $h'(p_{i'}) = \varphi^{-1}(r_{i'}) \in \overset{\circ}{S}{}^n_+$ și $h'(q_{j'}) = \varphi^{-1}(r_{j'})\in\overset{\circ}{S}{}^n_-$. Dup exercițiul 9, avem $h'\simeq 1_{S^n}$. Luînd deci $g = fh'^{-1}$, avem $g\simeq f$ și $g(p_i)\in\overset{\circ}{S}{}^n_+$, $g(q_j)\in\overset{\circ}{S}{}^n_-$, $\forall\, i, j$. Dacă există puncte p_i sau q_j care coincid cu S, atunci prin aceeași tehnică se modifică f, încît $S\in f^{-1}(N)$ și $S \notin f^{-1}S)$.

§ 5. Omologia suprafețelor

TEOREMA 1. i) $H_p(M_g) \cong \begin{cases} 0, & p > 2, \\ \mathbb{Z}, & p = 0,\ 2, \\ 2g\mathbb{Z}, & p = 1; \end{cases}$

ii) $H_p(N_h) \cong \begin{cases} 0, & p \geqslant 2, \\ (h-1)\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, & p = 1, \\ \mathbb{Z}, & p = 0; \end{cases}$

iii) $H_p(M_g^r) \cong \begin{cases} 0, & p \neq 0,\ 1, \\ \mathbb{Z}, & p = 0, \\ (2g+r-1)\mathbb{Z}, & p = 1; \end{cases}$ $(r \geqslant 1)$

iv) $H_p(N_h^r) \cong \begin{cases} 0, & p \neq 0,\ 1, \\ \mathbb{Z}, & p = 0, \\ (h+r-1)\mathbb{Z}, & p = 1. \end{cases}$ $(r\geqslant 1)$

Demonstrație. Toate suprafețele (cu sau fără bord) sînt liniar conexe și deci, pentru o suprafață $|K|$, $H_0(|K|)\cong\mathbb{Z}$.

Structura grupului $H_1(|K|)$ rezultă din Teorema 2 § 4: $H_1(|K|) \cong \pi_1(|K|)/[\pi_1(|K|), \pi_1(|K|)]$.

Putem aplica Teorema 2 § 8 Cap. III (vezi și demonstrația Teoremei 3 § 8 Cap. III) pentru $|K| = M_g$, N_h și Cor. 3 § 8 Cap. III, pentru suprafețele cu bord.

Datorită Teoremei 8 § 8 Cap. III și Cor. 3 § 2, rezultă $H_p(|K|) = 0$, cînd $p \geqslant 2$, pentru $|K| = M_g^r$ sau $|K| = N_h^r$, $r \geqslant 1$. Sînt complet demonstrate deci izomorfismele iii) și iv).

A mai rămas de calculat $H_2(M_g)$ și $H_2(N_h)$. Pentru $g = 0$, avem $H_2(S^2)\cong\mathbb{Z}$ (Teorema 3 § 3), iar pentru $h = 1$, $H_2(P\mathbb{R}^2) = 0$ (exerc. 2 § 2).

Presupunem $g \geqslant 1$ și considerăm triangularea spațiului M_g, cu orientarea din fig. 76.

Deoarece fiecare 1-simplex este față pentru exact două 2-simplexe, un 2-lanț nu poate fi ciclu decît dacă conține toate 2-simplexele și coeficienții acestora sînt egali. Cum nu există simplexe de dimensiune 3, deci nu există 2-simplexe care să fie frontiere, rezultă $H_2(M_g) \cong \mathbb{Z}$.

Pentru $h \geqslant 2$ avem poliedrul din fig. 77.

Ca și mai înainte, un 2-ciclu trebuie să conțină toate 2-simplexele cu coeficienți egali, deoarece pentru un 2-simplex σ_2 există un altul σ_2', încît acestea au în comun o față σ_1, pentru care $[\sigma_2, \sigma_1]\cdot[\sigma_2', \sigma_1] = -1$. Însă, pe de altă parte, dacă $l = \lambda \sum \sigma_2^i$ este un asemenea lanț, $dl = 2\lambda \sum \sigma_1'^j$, unde $\sigma_1'^j$ sînt 1-simplexele ce provin din cele situate pe frontiera poligonului regulat. Rezultă $\lambda = 0$ și deci $H_2(N_h) = 0$. Cu aceasta, teorema este complet demonstrată.

Fig. 76

Fig. 77

EXERCIȚII

1. Care sînt grupurile de omologie ale trompetei lui Klein?

2. Să se calculeze grupurile de omologie ale suprafeței din exerc. 5 § 8 Cap. III.

3. *Grupurile de omologie cu coeficienți într-un grup abelian G,* ale unui poliedru $|K|$, se definesc prin $H_p(|K|; G) = H_p(C(K) \otimes G)$. Să se arate

că avem:

$$\text{i)}\ H_p(M_g; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} 0, & p > 2, \\ \mathbb{Q}, & p = 0, 2, \\ 2g\mathbb{Q}, & p = 1; \end{cases}$$

$$\text{ii)}\ H_p(N_h; \mathbb{Q}) \cong \begin{cases} 0, & p \geqslant 2 \\ (h-1)\mathbb{Q}, & p = 1, \\ \mathbb{Q}, & p = 0. \end{cases}$$

Indicație. Se aplică Teorema 7 § 1, Lema 1 § 1 și Teorema 1.

4. Să se calculeze $H_p(M_g^r; \mathbb{Q})$ și $H_p(N_h^r, \mathbb{Q})$.

5. Să se arate că avem:

$$\text{i)}\ H_p(M_g; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} 0, & p > 2, \\ \mathbb{Z}_2, & p = 0, 2, \\ 2g\mathbb{Z}_2, & p = 1; \end{cases}$$

$$\text{ii)}\ H_p(N_h; \mathbb{Z}_2) \cong \begin{cases} 0, & p > 2, \\ \mathbb{Z}_2, & p = 0, 2, \\ h\mathbb{Z}_2, & p = 1. \end{cases}$$

Indicație. Se aplică Teorema 8 § 1, Lema 1 § 1 și Teorema 1.

6. Să se calculeze $H_p(M_g^r; \mathbb{Z}_2)$ și $H_p(N_h^r; \mathbb{Z}_2)$.

7. Să se calculeze grupurile de coomologie ale suprafețelor. *Indicație.* Se poate consulta [37, p. 170]. Se obține

$$H^0(M_g) \cong H^2(M_g) \cong \mathbb{Z},\ H^1(M_g) \cong 2g\mathbb{Z},\ H^p(M_g) = 0,\ p \neq 0, 1, 2,$$

$$H^0(N_h) \cong \mathbb{Z},\ H^1(N_h) \cong (h-1)\mathbb{Z},\ H^2(N_h) \cong \mathbb{Z}_2,\ H^p(N_h) = 0,\ p \neq 0, 1, 2.$$

8. Fie K o n-pseudovarietate și un, $n-1$)-simplex σ_{n-1}. Fie n-simplexele σ_n', σ_n'' pentru care σ_{n-1} este față. O orientare a lui K, pentru care $[\sigma_n', \sigma_{n-1}] = -[\sigma_n'', \sigma_{n-1}]$, $\forall\, \sigma_{n-1}$, se numește *orientare coerentă.* O *n-pseudovarietate* avînd o orientare coerentă se numește *orientabilă.* În caz contrar este *neorientabilă.* Să se arate că triangulările uzuale pentru sferă și tor sînt orientabile iar pentru banda lui Möbius și trompeta lui Klein sînt neorientabile.

9. Să se arate că o n-pseudovarietate este orientabilă dacă și numai dacă $H_n(K) \neq 0$.

Rezultă că putem vorbi de orientabilitatea spațiului $|K|$. Să se arate că suprafețele M_g sînt orientabile iar suprafețele N_h sînt neorientabile.

Indicație. Pentru K orientabilă, alegem orientarea coerentă și atunci $z = \sum_{\sigma_n \in K} \sigma_n$ este un n-ciclu, încît avem $H_n(K) \neq 0$.

Reciproc, dacă $H_n(K) \neq 0$, fie $z = \sum \lambda_i \sigma_n^i$ un ciclu nenul. Deoarece orice pereche de n-simplexe se poate uni printr-un șir de n-simplexe, rezultă că toți coeficienții λ_i sînt egali, exceptînd semnul, deci $\lambda_i = \pm \lambda_0$. Reorientînd σ_n^i, dacă $\lambda_i = -\lambda_0$, obținem un n-ciclu $\lambda_0 \sum \sigma_n^i$, deci $\sum \sigma_n^i$ este n-ciclu. Aceasta arată că orientarea este coerentă.

§ 6. Formula Euler-Poincaré. Problema colorării hărților

Din teorema de structură a grupurilor abeliene finit generate (vezi, de exemplu, [51, p. 25]), pentru orice poliedru $|K|$ și orice $p \geq 0$, putem scrie $H_p(|K|) \cong \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{\beta_p \text{ ori}} \oplus \mathbb{Z}_{\rho_1^p} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{\rho_{s}^p}$, unde $\mathbb{Z}_{\rho_i^p}$, $i = 1, \ldots, s_p$, sînt grupuri ciclice finite, de ordin respectiv ρ_i^p *). (β_p este *rangul grupului* $H_p(|K|)$.)

DEFINIȚIA 1. Numărul (întreg, nenegativ) β_p se numește *p-numărul Betti al poliedrului* $|K|$, iar numerele ρ_i^p se numesc *p-coeficienți de torsiune ai lui* $|K|$.

Ținînd seama de Teorema 7 § 1 și de Lema 1 § 1, obținem $H_p(|K|, \mathbb{Q}) \cong \underbrace{\mathbb{Q} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Q}}_{\beta_p \text{ ori}}$, astfel că $\beta_p = \dim_{\mathbb{Q}} H_p(|K|, \mathbb{Q})$ **).

Fie K un complex simplicial de dimensiune n, pentru care notăm prin α_p numărul p-simplexelor sale.

TEOREMA 1 (formula Euler-Poincaré).

$$\sum_{p=0}^{n} (-1)^p \beta_p = \sum_{p=0}^{n} (-1)^p \alpha_p.$$

Demonstrație. Pentru complexul simplicial K, alegem o orientare și notăm

$$C_p(K) \otimes \mathbb{Q} = C_p, \quad Z_p(K) \otimes \mathbb{Q} = Z_p(C(K) \otimes \mathbb{Q}) = Z_p,$$

*) ρ_i^p divide ρ_{i+1}^p.

**) $\dim_k V$ notează dimensiunea k-spațiului vectorial V.

$B_p(K) \otimes \mathbb{Q} = B_p(C(K) \otimes \mathbb{Q}) = B_p$ (vezi demonstrația Teoremei 7 § 1). Acestea sînt $\mathbb{Q}$-spații vectoriale. Avem, prin Lema 1 § 1, $\dim_{\mathbb{Q}} C_p = \alpha_p$.

Deoarece $\dim K = n \Rightarrow B_n = 0$ și deci $H_n(|K|, \mathbb{Q}) \cong Z_n$ rezultă $\dim_{\mathbb{Q}} Z_n = \beta_n$. Fie acum $L' = \{z_n^1, \ldots, z_n^{\beta_n}\}$ o bază în Z_n. Deoarece acesta este subspațiu vectorial al lui C_n, putem completa L' la o bază $L = \{z_n^1, \ldots, z_n^{\beta_n}, c_n^1, \ldots, c_n^{\gamma_n}\}$ în C_n. Atunci, considerînd epimorfismul $d: C_n \to B_{n-1}$, obținem o bază $L'' = \{d(c_n^1), \ldots, d(c_n^{\gamma_n})\}$ în B_{n-1} *). Avem deci $\underline{\beta_n + \gamma_n = \alpha_n}$. În continuare, deoarece, B_{n-1} este subspațiu vectorial al lui Z_{n-1}, putem completa sistemul L'' la o bază în Z_{n-1}. Mai precis, din șirul exact

$$0 \to B_{n-1} \to Z_{n-1} \to H_{n-1}(|K|, \mathbb{Q}) \to 0$$

și din exerc. 3 § 6 Cap. II, deducem că

$$\dim_{\mathbb{Q}} Z_{n-1} = \dim_{\mathbb{Q}} B_{n-1} + \dim_{\mathbb{Q}} H_{n-1}(|K|, \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} B_{n-1} + \beta_{n-1}.$$

Prin urmare, pentru a obține o bază în Z_{n-1} adăugăm sistemului L'' ciclurile $z_{n-1}^1, \ldots, z_{n-1}^{\beta_{n-1}}$. Extindem baza obținută în Z_{n-1} la o bază în C_{n-1}, adăugînd lanțurile $c_{n-1}^1, \ldots, c_{n-1}^{\gamma_{n-1}}$. Avem deci $\underline{\alpha_{n-1} = \gamma_n + \beta_{n-1} + \gamma_{n-1}}$. Continuăm în acest mod. Pasul general este de a folosi $\{d(c_{p+1}^1), \ldots, d(c_{p+1}^{\gamma_{p+1}})\}$ ca bază în B_p și de a o extinde cu $z_p^1, \ldots, z_p^{\beta_p}$ la o bază în Z_p și apoi cu $c_p^1, \ldots, c_p^{\gamma_p}$ la o bază în C_p. Avem deci $\underline{\alpha_p = \gamma_{p+1} + \beta_p + \gamma_p}$. Operația se încheie odată cu construirea bazei $\{d(c_1^1), \ldots, d(c_1^{\gamma_1}), z_0^1, \ldots, z_0^{\beta_0}\}$, pentru $Z_0 = C_0$, și cînd putem scrie $\underline{\alpha_0 = \gamma_1 + \beta_0}$. Considerînd acum suma alternată a relațiilor subliniate obținem

$$\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + (-1)^n \alpha_n = \gamma_1 + \beta_0 - \gamma_1 - \beta_1 - \gamma_2 + \gamma_2 + \beta_2 - \gamma_3 + \ldots + (-1)^{n-1}[\gamma_n + \beta_{n-1} + \gamma_{n-1}] + (-1)^n[\beta_n + \gamma_n] = \beta_0 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_3 + \ldots + (-1)^n \beta_n.$$

***) Arătați acest lucru.**

Cu aceasta formula este stabilită.

COROLAR 1. *Numărul* $\sum_{p=0} (-1)^p \alpha_p$, *asociat unei triangulări* K *a unui poliedru, nu depinde decît de tipul omotopic al spațiului* $|K|$. *Se notează* $\chi(|K|)$ *și se numește* **caracteristica Euler a poliedrului** $|K|$.

EXEMPLE. 1. $\chi(S^2) = 1 - 0 + 1 = 2$.

2. $\chi(M_g) = 1 - 2g + 1 = 2(1 - g)$.

3. $\chi(N_h) = 1 - (h - 1) = 2 - h$.

4. $\chi(M_g^r) = 1 - 2g - r + 1 = 2(1 - g) - r = \chi(M_g) - r$.

5. $\chi(N_h^r) = 1 - (h + r - 1) = 2 - h - r = \chi(N_h) - r$.

COROLAR 2. *Două suprafețe *) sînt homeomorfe dacă și numai dacă au aceeași caracteristică Euler și sînt ambele orientabile sau ambele neorientabile.*

Demonstrație. După exercițiul 9 §5, suprafețele orientabile sînt cele de tip M_g iar cele de tip N_h sînt neorientabile. Avem

$$\chi(M_g) = \chi(M_{g'}) \Leftrightarrow g = g' \quad \text{și} \quad \chi(N_h) = \chi(N_{h'}) \Leftrightarrow h = h'.$$

DEFINIȚIA 2. Un poliedru mărginit de fețe plane, care sînt poligoane convexe, avînd frontiera homeomorfă cu S^2, se numește *poliedru simplu*. Dacă în plus fețele sînt poligoane regulate și unghiurile diedre sînt congruente, avem un *poliedru simplu regulat*.

Printr-o *hartă* vom înțelege o suprafață fără bord, împărțită în poligoane (curbilinii) numite *fețe* sau *țări*. *Vîrfurile* și muchiile unei hărți sînt vîrfurile și muchiile fețelor acesteia.

TEOREMA 2. *Dacă* $\mathscr{H}$ *este o hartă, avînd* V *vîrfuri,* M *muchii și* F *fețe, atunci* $\chi(\mathscr{H}) = V - M + F$ **).

Demonstrație. Triangulăm suprafața, unind cîte un punct din interiorul fiecărei fețe cu vîrfurile acesteia (vezi fig. 78).

---

*) fără bord.

**) Dacă harta este sferică obținem *formula lui Euler*.

Notînd cu α_p, $p = 0, 1, 2$, numărul p-simplexelor acestei triangulări avem, după Teorema 1, $\alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(\mathscr{H})$. Apoi, dacă $m_1, \ldots, m_F$ sînt respectiv numerele de vîrfuri (egale cu cele ale laturilor) celor F fețe, atunci $\alpha_0 = V + F$, $\alpha_1 = M + m_1 + \ldots + m_F$. Prin urmare, $V - M + F = \alpha_0 - M = \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 = \chi(\mathscr{H})$.

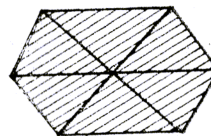


Fig. 78

Dată o hartă, se pune problema de a determina numărul minim de culori suficiente pentru a o colora, încît țări vecine să fie colorate diferit.

Dacă $\mathscr{H}$ este o hartă, o *subhartă* a lui $\mathscr{H}$ se obține prin strîngerea la un punct a uneia sau mai multor țări ale hărții $\mathscr{H}$. Vom nota prin $n_{\mathscr{H}}$ numărul minim de culori suficient colorării hărții $\mathscr{H}$, și-l vom numi *numărul cromatic al hărții* $\mathscr{H}$. O hartă $\mathscr{H}$ se numește *hartă critică* dacă pentru orice subhartă $\mathscr{H}'$ a lui $\mathscr{H}$ avem $n_{\mathscr{H}'} < n_{\mathscr{H}}$.

LEMA 1. *Orice hartă* $\mathscr{H}$ *conține o subhartă critică* $\mathscr{H}'$, *cu* $n_{\mathscr{H}'} = n_{\mathscr{H}}$.

Demonstrație. Dacă $\mathscr{H}$ nu este critică, există o subhartă proprie $\mathscr{H}'$ a lui $\mathscr{H}$, încît $n_{\mathscr{H}'} = n_{\mathscr{H}}$. Dacă nici $\mathscr{H}'$ nu este critică există o subhartă $\mathscr{H}''$ a acesteia care este proprie și pentru care $n_{\mathscr{H}''} = n_{\mathscr{H}'} = n_{\mathscr{H}}$. Este evident că după un număr finit de pași obținem o subhartă critică a lui $\mathscr{H}$ care are același număr cromatic cu harta inițială.

Dacă σ este o față a unei hărți $\mathscr{H}$, atunci *valența feței* σ *în* $\mathscr{H}$ este numărul de fețe cu care σ este vecină (adică cu care are muchii comune).

LEMA 2. *Dacă* $\mathscr{H}$ *este o hartă critică, atunci valența oricărei fețe a lui* $\mathscr{H}$ *este* $\geq n_{\mathscr{H}} - 1$.

Demonstrație. Să presupunem că există o față σ a lui $\mathscr{H}$ avînd valența $m < n_{\mathscr{H}} - 1$. Considerăm subharta $\mathscr{H} \setminus \sigma$ (vezi fig. 79). Deoarece $\mathscr{H}$ este critică și $\mathscr{H} \setminus \sigma$ o subhartă proprie a acesteia, avem $n_{\mathscr{H} \setminus \sigma} < n_{\mathscr{H}}$ și deci subharta $\mathscr{H} \setminus \sigma$ se poate colora cu $n_{\mathscr{H}} - 1$ culori. Considerăm o asemenea colorare. Atunci, pentru cele m țări vecine cu σ, sînt suficiente $m \leqslant n_{\mathscr{H}} - 2$ culori. Rezultă atunci în mod evident că $\mathscr{H}$ se poate colora cu $n_{\mathscr{H}} - 1$ culori, în contradicție cu definiția numărului $n_{\mathscr{H}}$.

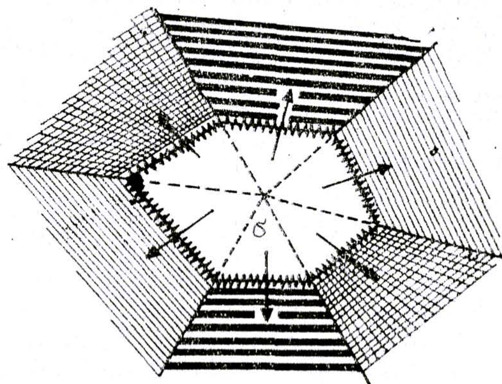


Fig. 79

LEMA 3. *Fie $\mathscr{H}$ o hartă critică, cu M muchii și F fețe, avînd numărul cromatic $n_{\mathscr{H}}$. Atunci, are loc inegalitatea* $n_{\mathscr{H}} \leqslant \frac{2M}{F} + 1$.

Demonstrație. Fie σ_i, $i = 1, \ldots, F$, fețele hărții $\mathscr{H}$. După Lema 2, avem valența $\sigma_i \geqslant n_{\mathscr{H}} - 1$. Dar, $\sum_{i=1}^{F}$ (valența σ_i) $= 2M$. Avem deci $F(n_{\mathscr{H}} - 1) \leqslant 2M$, care implică $n_{\mathscr{H}} - 1 \leqslant \frac{2M}{F}$.

TEOREMA 3. i) *Șase culori sînt suficiente pentru a colora orice hartă sferică sau pe planul proiectiv.*

ii) *Șapte culori sînt suficiente pentru a colora orice hartă pe tor sau pe trompeta lui Klein.*

Demonstrație. După Lema 1, putem considera numai hărți critice. Fie $\mathscr{H}$ o asemenea hartă, pentru care presupunem că în fiecare vîrf se intersectează cel puțin trei muchii. Evident, această presupunere nu este restrictivă. Avem atunci $3V \leqslant 2M$ și, din Teorema 2, obținem $\chi(\mathscr{H}) - F + M = V \leqslant \frac{2M}{3}$. Rezultă inegalitatea $M \leqslant 3(F - \chi(\mathscr{H}))$. Deducem din Lema 3 inegalitățile

$$(1) \qquad n_{\mathscr{H}} \leqslant \frac{2M}{F} + 1 \leqslant 6\left(1 - \frac{\chi(\mathscr{H})}{F}\right) + 1,$$

care dau o mărginire superioară pentru $n_{\mathscr{H}}$, în funcție de $\chi(\mathscr{H})$.

i) Pentru sferă, avem $\chi(S^2) = 2$ și deci

$$n_{\mathscr{H}} \leqslant 6\left(1 - \frac{2}{F}\right) + 1 < 7.$$

ii) Pentru tor și trompeta lui Klein, avem $\chi(T^2) = \chi(K) = 0$. Prin urmare, $n_{\mathscr{H}} \leqslant 6 + 1 = 7$.

OBSERVAȚIA 1. *Problema celor patru culori* a fost formulată în anul 1850 de către Francis Guthrie *), și constă în a se răspunde dacă este posibilă colorarea oricărei hărți geografice (deci sferice sau plane) cu numai patru culori. Răspunsul afirmativ a fost dat în anul 1976 de către matematicienii K. Appel și W. Haken de la Universitatea Illinois din SUA ** care au utilizat un calculator IBM (circa 1200 ore!).

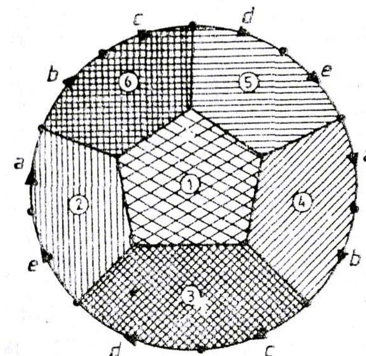


Fig. 80

Dacă se ține seama de aceasta, rezultatul Teoremei 3 este slab pentru sferă. Pentru planul proiectiv însă, se poate lua harta din fig. 80 a cărei colorare necesită șase culori, încît, pentru planul proiectiv, Teorema 3 rezolvă bine problema colorării hărților.

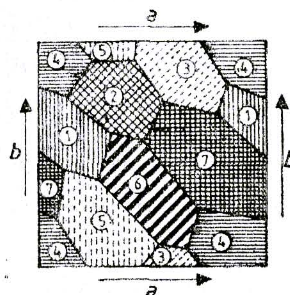


Fig. 81

Și pentru tor, Teorema 3 rezolvă problema colorării hărților, așa cum arată harta din fig. 81.

Pentru trompeta lui Klein s-a arătat că sînt suficiente șase culori.

TEOREMA 4. *Dacă pentru harta $\mathscr{H}$, avem $\chi(\mathscr{H}) \leqslant 0$, atunci aceasta se poate colora cu $N_{\chi(\mathscr{H})} =$*

*) Vezi Proc. of London Math. Soc. (1850–1852).
**) Vezi Bull. Amer. Math. Soc. 82 (1976), 711–712.

$= \left[\frac{7+\sqrt{49-24\chi(\mathscr{H})}}{2}\right]$ *culori, unde* [ ] *indică luarea părţii întregi.*

Demonstraţie. Fie $N = N_{\chi(\mathscr{H})}$ şi $\chi(\mathscr{H}) = \chi$. *Avem* $N \leqslant \frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2}$ şi $N+1 > \frac{7+\sqrt{49-24\chi}}{2} \Rightarrow N > \frac{5+\sqrt{49-24\chi}}{2}$. Este verificată atunci inegalitatea $N^2-5N+(6\chi-6)>0$, de unde deducem $6\left(1-\frac{\chi}{N+1}\right)<N$ şi, cum putem presupune $F \geqslant N+1$ (altfel afirmaţia teoremei este evidentă), rezultă $N > 6\left(1-\frac{\chi}{N+1}\right) \geqslant 6\left(1-\frac{\chi}{F}\right) \geqslant n_{\mathscr{H}}-1$, deci $N \geqslant n_{\mathscr{H}}$.

OBSERVAŢIA 2. P.J. Heawood a conjecturat în 1890 *) că $N_{\chi(\mathscr{H})}$ este numărul minim de culori cu care se poate colora $\mathscr{H}$, în ipoteza $\chi(\mathscr{H}) \leqslant 0$. Conjectura a fost verificată **) cu excepţia trompetei lui Klein, pentru care sînt suficiente şase culori, dar $N_{\chi(K)} = 7$.

De remarcat că dacă am calcula $N_{\chi(\mathscr{H})}$ pentru sferă, obţinem $N_{\chi(\mathscr{H})} = 4$ dar, atenţie, Teorema 4 s-a demonstrat în ipoteza $\chi(\mathscr{H}) \leqslant 0$!

EXERCIŢII

1. Să se arate că pentru o 2-pseudovarietate K, au loc relaţiile:

a) $3\alpha_2 = 2\alpha_1$; b) $\alpha_1 = 3(\alpha_0 - \chi(K))$; c) $\alpha_0 \geqslant \frac{1}{2}(7+\sqrt{49-24\chi(K)})$.

2. Să se discute problema colorării hărţilor situate pe suprafeţe cu bord.

---

*) P.J. Heawood, *Map-Colour Theorem*, Quart, J. Math. **24** (1890), 332–338.

) Ringel, G., Youngs, J.W.T., *Solution of the Heawood Map-Coloring, Problem.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., **60 (1968), 438–445.

3. Să se arate că tetraedrul, cubul, octaedrul, dodecaedrul şi icosaedrul sînt singurele poliedre simple regulate.

Indicaţie. Dacă se notează numărul muchiilor într-un vîrf cu m şi cu n numărul muchiilor unei feţe, atunci $n \geqslant 3$, $mV = 2M = nF$, $V - M + F = 2 \Rightarrow \frac{nF}{2} + F = 2 \Rightarrow F(2n - mn + 2m) = 4m \Rightarrow 2n - mn + 2m > 0 \Rightarrow 2m > n(m-2) \geqslant 3(m-2) = 3m - 6 \Rightarrow m < 6$.

§ 7. Blocuri simpliciale. Omologia spaţiilor proiective reale

DEFINIŢIA 1. Fie K un complex simplicial geometric şi $(B, \dot{B})$ o pereche simplicială formată din subcomplexe ale lui K. Vom spune că această pereche este un *n-bloc simplicial*, al lui K, dacă $H_r(B, \dot{B}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & r = n, \\ 0, & r \neq n. \end{cases}$

Subcomplexul $\dot{B}$ este numit *frontiera* sau *bordul n-blocului* iar $B - \dot{B}$ *interiorul acestuia.*

Pentru a pune în evidenţă *dimensiunea n* a blocului, vom scrie şi $(B^n, \dot{B}^n)$.

EXEMPLUL 1. Pentru un n-simplex σ al lui K, perechea $(K(\sigma), \dot{\sigma})$ este un n-bloc simplicial, cum rezultă din Cor. 1 § 3.

DEFINIŢIA 2. *O descompunere în blocuri simpliciale* a unui complex simplicial geometric K, constă dintr-o mulţime de blocuri ale lui K, fiind satisfăcute următoarele condiţii:

i) Orice simplex al lui K se află în interiorul unui bloc şi numai al unuia;

ii) Bordul oricărui n-bloc se află în reuniunea m-blocurilor lui K, pentru care $m < n$.

Un subcomplex L al lui K este un *bloc-subcomplex* dacă este o reuniune de blocuri. În particular, *bloc-n-scheletul* lui K este bloc-subcomplexul K_n, constînd din toate m-blocurile cu $m \leqslant n$.

EXEMPLE. 2. Pentru un complex simplicial K, perechile $\{(K(\sigma), \dot{\sigma})\}_{\sigma \in K}$ constituie o descompunere în blocuri simpliciale, K_n constînd din blocurile $(K(\sigma), \dot{\sigma})$, pentru fiecare $\sigma \in K^n$.

3. $\{(K(\sigma)', (\dot{\sigma})')\}_{\sigma \in K}$ constituie o descompunere în blocuri simpliciale pentru K'.

LEMA 1. *Fie (M, N) o triangulare a perechii topologice (D^n, S^{n-1}) și $f : |M| \to |K|$ o aplicație simplicială într-un poliedru $|K|$, încît $f| \, |M| \setminus |N|$ este injectivă. Atunci, perechea $(f(M), f(N))$ este un n-bloc simplicial în K* *).

Demonstrație. f este injectivă pe orice simplex din $M \setminus N$ și deci induce un izomorfism de lanțuri $f_{.} : C(M, N) \to C(f(M), f(N))$ și prin urmare un izomorfism între grupurile de omologie $f_* : H_r(M, N) \xrightarrow{\sim} H_r(f(M), f(N))$. Putem aplica exemplul 1.

EXEMPLE. 4. Fie triangularea K a suprafeței M_g, $g \geqslant 1$, dată în fig. 75. O descompunere în blocuri simpliciale a lui K este următoarea:

$B^0 = [v^0]$, vîrful obținut identificînd toate vîrfurile poligonului regulat;

B_r^1 = triangularea muchiei x_r, $r = 1, \ldots, g$;

$B_r'^1$ = triangularea muchiei y_r, $r = 1, \ldots, g$;

$$B^2 = K \text{ și } \dot{B}^0 = \emptyset,\ \dot{B}_r^1 = \dot{B}_r'^1 = B^0,\ \dot{B}^2 = \bigcup_{r=1}^{g} B_r^1 \cup B_r'^1.$$

Aplicînd Lema 1, rezultă că B^0, B_r^1, $B_r'^1$ și B^2 sînt blocuri simpliciale.

5. Considerăm N_h, $h \geqslant 2$, triangulat ca în fig. 76. O descompunere în blocuri simpliciale este următoarea:

$B^0 = [v^0]$, B_r^1 = triangularea muchiei x_r, $r = 1, \ldots, h$, $B^2 = K$, $\dot{B}^0 = \emptyset$, $\dot{B}_r^1 = B^0$, $\dot{B}^2 = \bigcup_{r=1}^{h} B_r^1$.

6. Considerăm triangularea P_n a spațiului proiectiv $P\mathbb{R}^n$, descrisă în exerc. 11 § 6 Cap. III. Această tri-

---

*) $f(M) = \{f(\sigma) | \sigma \in M\}$ și, pentru $n=0$, (D^n, S^{n-1}) este interpretat ca perechea $(D^0, \emptyset)$.

angulare se poate de asemenea obține identificînd punctel[e] antipodale ale lui L'_{n-1} în $(L_n^+)'$, unde L_n^+ este subcomplex[ul] lui L_n ale cărui simplexe sînt situate în semispațiu[l] $x_{n+1} \geqslant 0$. Deoarece L_n^+ este o triangulare a lui D^n, prin Lema 1 există o descompunere în blocuri a lui P_n, astfel

$$B^n = P_n,\ \dot{B}^n = P_{n-1} = B^{n-1}, \ldots, B^0 = P_0 = [A^1].$$

TEOREMA 1. *Fie K un complex simplicial geometri[c] cu o descompunere în blocuri simpliciale. Atunci, $H_r(K_n, K_{n-1}) = 0$, $r \neq n$, și $H_n(K_n, K_{n-1})$ este grupul abelian libe[r] generat de n-blocurile lui K.*

Demonstrație. $K_n \setminus K_{n-1}$ constă din reuniunea interioare[lor] n-blocurilor B_i^n. Datorită condiției ii) din Def. 2 $C_r(K_n, K_{n-1}) = \bigoplus_i C_r(B_i^n, \dot{B}_i^n)$. Rezultă de aici imedia[t] că avem $H_r(K_n, K_{n-1}) \cong \bigoplus_i H_r(B_i^n, \dot{B}_i^n)$, de unde deducem afirmația teoremei.

Dat un complex simplicial K, avînd o descompu[-] nere în blocuri simpliciale, considerăm grupul gradu[-] at $C^b = \bigoplus_n H_n(K_n, K_{n-1})$. Definim și homomorfismu[l]

$$d^b : H_n(K_n, K_{n-1}) \to H_{n-1}(K_{n-1}, K_{n-2}),$$

ca fiind homomorfismul ∂_* din șirul exact al tripletulu[i] (K_n, K_{n-1}, K_{n-2})(vezi exerc. 5 § 3).

LEMA 2. *Perechea (C^b, d^b) este un complex de lanțur[i].*

Demonstrație. Homomorfismul d^b este compusul

$$H_n(K_n, K_{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} \tilde{H}_{n-1}(K_{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(K_{n-1}, K_{n-2}).$$

Avem $d^b d^b = j_* \partial_* j_* \partial_* = 0$, deoarece este exact șiru[l]

$$H_{n-1}(K_{n-1}) \xrightarrow{j_*} H_{n-1}(K_{n-1}, K_{n-2}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-2}(K_{n-2}),$$

ca fiind șirul de omologie al perechii (K_{n-1}, K_{n-2}).

TEOREMA 2. *Complexul de lanțuri (C^b, d^b) poate [fi] interpretat ca un subcomplex al complexului de lanțuri $C(K$*

în așa fel încît incluziunea $\theta : C^b \to C(K)$ *induce izomorfismele* $\theta_* : H_n(C^b) \cong H_n(K)$, $\forall\, n \geq 0$.

Demonstrație. Deoarece $K_n \setminus K_{n-1}$ nu conține simplexe de dimensiune mai mare decît n, avem $B_n(C(K_n, K_{n-1})) = 0$ și deci $H_n(K_n, K_{n-1})$ se identifică cu $Z_n(C(K_n, K_{n-1})) \subset C_n(K_n, K_{n-1}) \subset C_n(K)$. Fie aplicația injectivă astfel definită, $\theta_n : H_n(K_n, K_{n-1}) \to C_n(K)$. Putem arăta că $\theta = (\theta_n)_n$ constituie o aplicație de lanțuri.

Dacă $z \in H_n(K_n, K_{n-1}) = Z_n(C(K_n, K_{n-1}))$, atunci $d^b(z) = j_* \partial_*(z) = j_* d(z) \in Z_{n-1}(C(K_{n-1}, K_{n-2})) = H_{n-1}(K_{n-1}, K_{n-2})$, pentru $d : C_n(K_n) \to C_{n-1}(K_n)$. Avem, $\theta d^b(z) = \theta\, j_* d(z) = i_* d(z) = d\theta(z)$, unde am utilizat, ca intermediar, incluziunea $i_* : C(K_{n-1}) \to C(K)$. Așadar, $\theta d^b = d\theta$, care arată că putem identifica derivarea d^b ca fiind restricția derivării d a lui $C(K)$ la $Z_n(C(K_m, K_{n-1}))$.

Să arătăm acum că $\theta_* : H_n(C^b) \to H_n(K)$ sînt izomorfisme, $\forall n$. Mai întîi, din șirul exact al perechii (K_n, K_{n-1}), deducem imediat că avem un izomorfism, indus de incluziune, $H_r(K_{n-1}) \cong H_r(K_n)$, $\forall\, r \neq n-1, n$. Astfel, pentru $r > n$, deducem $H_r(K_n) \cong H_r(K_{n-1}) \cong \ldots \cong H_r(K_{-1}) = 0$ și avem monomorfismul $H_n(K_n) \xrightarrow{j_*} H_n(K_n, K_{n-1})$. Pentru complexul de lanțuri $C^b = \oplus\, C_n$, avem diagramele comutative

$$\begin{array}{ccccccccc} C_{n+1} & & \xrightarrow{\quad d^b \quad} & & C_n & & \xrightarrow{\quad d^b \quad} & & C_{n-1} \\ \| & & & & \| & & & & \| \\ H_{n+1}(K_{n+1}, K_n) & \xrightarrow{\partial^1_*} & H_n(K_n) & \xrightarrow{j^1_*} & H_n(K_n, K_{n-1}) & \xrightarrow{\partial^2_*} & H_{n-1}(K_{n-1}) & \xrightarrow{j^2_*} & H_{n-1}(K_{n-1}, K_{n-2}) \end{array}$$

Avem $Z_n(C^b) = \operatorname{Ker} \partial^2_*$ (deoarece j^2_* este monomorfism), deci $Z_n(C^b) = \operatorname{Im} j^1_* \cong H_n(K_n)$ (deoarece j^1_* este monomorfism). Rezultă $H_n(C^b) = Z_n(C^b)/B_n(C^b) \cong H_n(K_n)/\operatorname{Im} \partial^1_*$. Dar $\operatorname{Im} \partial^1_* = \operatorname{Ker}[H_n(K_n) \to H_n(K_{n+1})]$, astfel că $H_n(C^b) \cong \operatorname{Im}[H_n(K_n) \to H_n(K_{n+1})] = H_n(K_{n+1})$, deoarece $H_n(K_{n+1}, K_n) = 0$. Avem deci $H_n(C^b) \cong H_n(K_{n+1}) \cong H_n(K_{n+2}) \cong \ldots \cong H_n(K)$. Am obținut deci un izomorfism $\varphi_n : H_n(C^b) \cong H_n(K)$, anume, dacă $z \in Z_n(C(K_n, K_{n-1})) = H_n(K_n, K_{n-1})$, luăm $\varphi_n(z) = i_*(z) \in H_n(K)$. Cum $j_* \partial_*(z) = 0 \Rightarrow d\theta(z) = 0$ în $C(K)$, deci $\theta(z) \in Z(C(K_n))$ și $\varphi_n(z) = \theta_*(z)$.

OBSERVAȚIA 1. Elementele grupului C_n sînt cicluri relative în $C(K_n, K_{n-1})$, dar nu rezultă că în mod necesar acestea sînt cicluri în $C_n(K)$. De aceea, dacă $z_n \in C_n = Z_n(C(K_n, K_{n-1}))$ nu rezultă neapărat că $d^b(z_n) = d(z_n) = 0$.

OBSERVAȚIA 2. Teorema 2 poate fi utilizată pentru calculul grupurilor de omologie ale unor spații, calculînd grupurile de omologie ale complexului de lanțuri C^b. Aceasta simplifică lucrurile, cînd numărul simplexelor lui K este mare, sau în alte situații.

EXEMPLUL 7. Considerăm triangularea K a benzii lui Möbius (vezi fig. 82). Fie descompunerea în blocuri simpliciale:

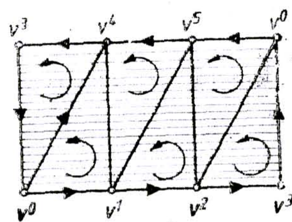


Fig. 82

$B^0 = [v^0]$, $B^1 = \{[v^0 v^1], [v^1 v^2], [v^2, v^3], [v^3, v^0], [v^0, v^5], [v^5, v^4], [v^4, v^3], [v^0], [v^1], [v^2], [v^3], [v^4], [v^5]\}$, $B^2 = K$.

Complexul C^b asociat este următorul:

$$C_2 = H_2(K_2, K_1) = Z_2(C(K_2, K_1)) = Z_2(B^2, B^1) \subset C_2(K)$$

este grupul abelian liber generat de $z_2 = [v^0v^4v^3] + [v^0v^1v^4] + \ldots + [v^2v^3v^0]$, deoarece $z_2 \in C_2(B^2)$, $z_2 \notin C_2(B^1)$, $d(z_2) \in C(B^1)$ și z_2 nu poate fi multiplu al altui ciclu;

$$C_1 = H_1(K_1, K_0) = Z_1(C(K_1, K_0)) = Z_1(B^1, B^0) \subset C_1(K)$$

este grupul abelian liber generat de $z_1 = [v^0v^1] + [v^1v^2] + [v^2v^3] - [v^4v^3] - [v^5v^4] - [v^0v^5]$, pentru care avem $d(z_1) = 0$ și z_1 nu este multiplu al altui 1-ciclu;

$C_0(K)$ este grupul abelian liber generat de $z_0 = [v^0]$. Avem deci complexul de lanțuri

$$0 \longrightarrow C_2 \xrightarrow{d^b_2} C_1 \xrightarrow{d^b_1} C_0 \longrightarrow 0.$$

Pentru $l = \lambda z_2$, avem

$$d^b_2(l) = \lambda d(z_2) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0 \Rightarrow \operatorname{Ker} d^b_2 = 0 \Rightarrow H_2(C^b) = 0,$$

deci $H_2(M) = 0$.

$\operatorname{Ker} d_1^b = C_1$, $z_1 = -d_2^b(z_2) + 2([v^0v^1] + [v^1v^2] + [v^2v^3] + [v^3v^0]) \Rightarrow [z_1] = 2[z_1']$, cu $z_1' = [v^0v^1] + [v^1v^2] + [v^2v^3] + [v^3v^0] \Rightarrow H_1(M) \cong H_1(C^b) \cong Z$.

În sfîrșit, $\operatorname{Im} d_1^b = 0 \Rightarrow H_0(C^b) \cong C_0 \cong \mathbb{Z}$.

TEOREMA 3. *Grupurile de omologie ale spațiului proiectiv real $P\mathbb{R}^n (n \geq 0)$ sînt:*

$$H_0(P\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z};$$

$$H_n(P\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{dacă } n \text{ este par, } n > 0, \\ \mathbb{Z} & \text{dacă } n \text{ este impar,} \end{cases}$$

$$H_r(P\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} 0 & \text{dacă } r < 0 \text{ sau } r > n, \text{ sau } r \text{ par } (\neq 0), \\ \mathbb{Z}_2 & \text{dacă } r \text{ este impar și } 0 < r < n. \end{cases}$$

Demonstrație. Complexul de lanțuri C^b, corespunzător descompunerii în blocuri descrisă în exemplul 6, are $C_r = 0$, pentru $r > n$ sau $r < 0$ și C_r este grupul abelian liber cu un generator, pentru $0 \leq r \leq n$. Vom determina acești generatori și homomorfismele de derivare.

Fie z_r ciclul generator standard pentru $Z_r(L_r)$, ca în § 4. Atunci, $z_{r-1}A^{r+1}$ este un ciclu generator al grupului $Z_r(L_r^+, L_{r-1})$. Prin aplicația de lanțuri $\varphi: C(L_r^+) \to C((L_r^+)')$, din Teorema 5 § 2, $\varphi(z_{r-1}, A^{r+1})$ este un ciclu generator pentru grupul $Z_r(C((L_r^+), L_{r-1}'))$ și deci, dacă $p: |L_n^+| \to |P_r|$ este aplicația de identificare, atunci $p_\bullet\varphi(z_{r-1}A^{r+1})$ este un ciclu generator pentru grupul $Z_r(C(P_r, P_{r-1})) = C_r$. În plus, în $C(P_n)$ avem

$$d^b[p_\bullet\varphi(z_{r-1}A^{r+1})] = p_\bullet\varphi d(z_{r-1}A^{r+1}) = (-1)^r p_\bullet\varphi(z_{r-1}) =$$
$$= (-1)^r[p_\bullet\varphi(z_{r-2}A^r - z_{r-2}A'^r)].$$

Să notăm prin z_{r-2}' lanțul obținut din z_{r-2} schimbînd între ele vîrfurile A^r și A'^r. Avem atunci $z_{r-2} = (-1)^{r-1}z_{r-2}'$ și $p_\bullet\varphi(z_{r-2}'A'^r) = p_\bullet\varphi(z_{r-2}A^r)$. Prin urmare

$$d_r^b[p_\bullet\varphi(z_{r-1}A^{r+1})] = [(-1)^r\, [p_\bullet\varphi(z_{r-2}A^r)] +$$
$$+ p_\bullet\varphi\, (z_{r-2}A^r) = [1 + (-1)^r]\, p_\bullet\varphi(z_{r-2}A^r).$$

Putem calcula acum $H_r(P\mathbb{R}^n)$. Pentru $r = 0$, avem $H_0(P\mathbb{R}^n) \cong C_0/\operatorname{Im} d_1^b = C_0 \cong \mathbb{Z}$. Pentru $r = n$,

$$H_n(P\mathbb{R}^n) \cong \operatorname{Ker} d_n^b = \begin{cases} C_n, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par} \end{cases} \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & n \text{ impar} \\ 0, & n \text{ par}. \end{cases}$$

Pentru $r < 0$ sau $r > n$, este evident că avem $H_r(P\mathbb{R}^n) = 0$. Dacă $0 < r < n$ și r este par, atunci $\operatorname{Ker} d_r^b = 0$, deci $H_r(P\mathbb{R}^n) = 0$. Dacă r este impar, $\operatorname{Ker} d_r^b = C_r \cong \mathbb{Z}$, iar $\operatorname{Im} d_{r+1}^b \cong 2\mathbb{Z} \Rightarrow H_r(P\mathbb{R}^n) \cong \mathbb{Z}_2$.

EXERCIȚII

1. Să se utilizeze descompunerile în blocuri simpliciale ale suprafețelor (exemplele 4 și 5) pentru a regăsi grupurile de omologie ale acestora (vezi Teorema 1 § 5)

2. Să se arate că $H_r(P\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$ dacă $0 \leq r \leq n$ și $H_r(P\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}_2) = 0$ dacă $r < 0$ sau $r > n$.

Indicație. Se utilizează pentru prima parte Teorema 8 § 1, Lema 1 § 1 și exerc. 4 § 1 iar pentru a doua Teorema 8 § 1 și Lema 1 § 1.

3. Să se arate că $H_r(P\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ dacă $r = 0$ sau $r = n = 2p + 1$ și $H_r(P\mathbb{R}^n, \mathbb{Q}) = 0$ în rest.

Indicație. Se aplică Teorema 7 § 1 și Lema 1 § 1.

4. Să se arate că $H_1(L^3(p, q)) \cong \mathbb{Z}_p$, $H_2(L^3(p, q)) = 0$, $H_3(L^3(p, q)) \cong \mathbb{Z}$ (vezi exerc. 5 § 11 Cap. I).

Indicație. Se poate consulta, de exemplu, [43, p. 63].

5. Să se arate că

$$H_r(P\mathbb{C}^n) \cong \begin{cases} 0, & r < 0 \text{ sau } r > 2n, \text{ sau } r \text{ impar}, \\ \mathbb{Z} & \text{dacă } r \text{ este par și } 0 \leq r \leq 2n \text{ (vezi și § 10).} \end{cases}$$

Soluție. După Teorema 4 § 9 Cap. III, $P^n\mathbb{C}$ este un poliedru (este satisfăcută condiția de a fi spațiu compact). Fie P_n^c o triangulare a lui $P\mathbb{C}^n$. Atunci, perechea (P_n^c, P_{n-1}^c) este un $2n$-bloc simplicial. Avem

$H_r(P_n^c, P_{n-1}^c) \cong H_r(P_n^c \setminus P_{n-1}^c, (P_n^c \setminus P_{n-1}^c) \cap P_{n-1}^c$ (vezi exerc. 6 § 3), deci

$$H_r(P_n^c, P_{n-1}^c) \cong H_r(D^{2n}, S^{2n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & r = 2n, \\ 0, & r \neq 2n \end{cases} \text{ (Cor. 4 § 11 Cap. I).}$$

Sistemul de blocuri $B^{2n} = P_n^c$, $B^{2n} = P_{n-1}^c = B^{2n-2}, \ldots, B^2 = P_1^c$, $B^2 = P_0^c = B^0$ determină în mod evident o descompunere a lui P_n^c. Complexul de lanțuri C^b are grupurile $C_r \cong \mathbb{Z}$, $r = 2n, 2(n-1), \ldots, 0$ și $C_r = 0$ în celelalte cazuri.

6. Să se arate că

$$H_r(P\mathbb{H}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & r = 0, 4, \ldots, 4n, \\ 0, & r \neq 0, 4, \ldots, 4n. \end{cases}$$

Indicație. Se procedează ca mai sus.

§ 8. Formula lui Künneth

Fie (C, d) şi (C', d') două complexe de lanţuri. Definim *produsul tensorial* al acestora ca fiind complexul de lanţuri $(C \otimes C' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} C''_n, d'')$, unde $C''_n = \bigoplus_{q+r=n} C_q \otimes C'_r$ şi $d'' : C \otimes C' \to C \otimes C'$ fiind homomorfismul ce satisface relaţia $d''(x \otimes x') = dx \otimes x' + (-1)^q x \otimes d'x'$, pentru $x \in C_q$ şi $x' \in C'_r$ *).

Fie $B = \operatorname{Im} d$, $Z = \operatorname{Ker} d$, $H = \operatorname{Ker} d/\operatorname{Im} d$, $B' = \operatorname{Im} d'$, $Z' = \operatorname{Ker} d'$, $H' = \operatorname{Ker} d'/\operatorname{Im} d'$. Au loc atunci şirurile exacte de grupuri abeliene

$$0 \longrightarrow B \xrightarrow{\lambda} Z \xrightarrow{\mu} H \longrightarrow 0,$$

$$0 \longrightarrow B' \xrightarrow{\lambda'} Z' \xrightarrow{\mu'} H' \longrightarrow 0,$$

cu λ şi λ' incluziunile iar μ şi μ' proiecţiile canonice.

LEMA 1. $\operatorname{Ker}(\mu \otimes \mu') = \operatorname{Im}(\lambda \otimes 1_{Z'}) + \operatorname{Im}(1_Z \otimes \lambda')$.

Demonstraţie. Este evident că $\operatorname{Ker}(\mu \otimes \mu')$ conţine subgrupul $\operatorname{Im}(\lambda \otimes 1_{Z'}) + \operatorname{Im}(1_Z \otimes \lambda')$. Apoi, din exactitatea la dreapta a produsului tensorial (exerc. 6 § 1), avem următoarea diagramă comutativă, cu liniile şi coloanele exacte

$$\begin{array}{ccccccc}
B\otimes B' & \xrightarrow{\lambda\otimes 1} & Z\otimes B' & \xrightarrow{\mu\otimes 1} & H\otimes B' & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle 1\otimes\lambda'} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\lambda'} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\lambda'} & & \\
B\otimes Z' & \xrightarrow{\lambda\otimes 1} & Z\otimes Z' & \xrightarrow{\mu\otimes 1} & H\otimes Z' & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow{\scriptstyle 1\otimes\mu'} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\mu'} & & \downarrow{\scriptstyle 1\otimes\mu'} & & \\
B\otimes H' & \xrightarrow{\lambda\otimes 1} & Z\otimes H' & \xrightarrow{\mu\otimes 1} & H\otimes H' & \longrightarrow & 0 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & & 0 & & 0 & &
\end{array}$$

După exerc. 2 § 1 avem $\mu \otimes \mu' = (\mu \otimes 1_Z)\circ(1_Z \otimes \mu')$. Atunci, dacă $x \in Z \otimes Z'$, încît $(\mu \otimes 1_{Z'})(1_Z \otimes \mu')(x) = 0$,

* Verificaţi că, în adevăr, d'' este o derivare.

avem $(1_Z \otimes \mu')(x) = (\lambda \otimes 1_{H'})(y) = (\lambda \otimes 1)(1 \otimes \mu')(u) = (1_Z \otimes \mu')(\lambda \otimes 1)(u)$. Prin urmare, $x = (\lambda \otimes 1_{Z'})(u) + (1_Z \otimes \lambda')(v)$, pentru $u \in B \otimes Z'$ şi $v \in Z \otimes B'$.

Din definiţia complexului $C \otimes C'$, se vede că dacă $z \in Z$, $z' \in Z'$, atunci $z \otimes z' \in Z(C \otimes C') = \operatorname{Ker} d''$, iar dacă $b \in B$ şi $b' \in B'$, atunci $b \otimes z'$, $z \otimes b' \in B(C \otimes C') = \operatorname{Im} d''$. Aplicînd Lema 1, obţinem rezultatul următor.

COROLAR 1. *Există un homomorfism de grupuri* $\eta : H \otimes H' \to H(C \otimes C')$, *definit prin* $\eta([z] \otimes [z']) = [z \otimes z']$.

Vom considera acum graduarea produsului tensorial $H \otimes H'$ prin $(H \otimes H')_n = \bigoplus_{q+r=n} H_q \otimes H'_r$. Prin aceasta, η este un homomorfism de grupuri graduate, de grad zero. Fie n-componenta acestuia notată prin $\eta_n : (H \otimes H')_n \to H_n(C \otimes C')$.

TEOREMA 1. *Dacă unul din complexele de lanţuri C sau C' este de grupuri abeliene libere, atunci, pentru orice n, are loc un şir exact*

$$0 \longrightarrow \bigoplus_{q+r=n} H_q \otimes H'_r \xrightarrow{\eta_n} H_n(C \otimes C') \xrightarrow{\theta_n} \bigoplus_{q+r=n-1} H_q * H'_r \longrightarrow 0.$$

Dacă ambele complexe sînt de grupuri abeliene libere, atunci acest şir este scindat. Aici $H_q = H_q(C)$ şi $H'_r = H_r(C')$.

Demonstraţie. Să presupunem că grupurile C_n ale complexului C sînt grupuri abeliene libere. Atunci, Z este un subgrup liber al lui C şi este scindat şirul $0 \to Z \xrightarrow{i} C \xrightarrow{d} B \to 0$. Aceasta implică, conform exerc. 1 c) § 1, exactitatea şirului

$$0 \longrightarrow Z \otimes C' \xrightarrow{i\otimes 1} C \otimes C' \xrightarrow{d\otimes 1} B \otimes C' \longrightarrow 0.$$

Considerăm acest şir ca un şir exact de complexe de lanţuri, unde $Z \otimes C'$ este produsul tensorial rezultat luîndu-l pe Z cu derivarea nulă, iar $B \otimes C'$ avînd graduarea uzuală a produsului tensorial, dar cu derivarea $\varepsilon \otimes d' : B \otimes C' \to B \otimes C'$, satisfăcînd relaţia $(\varepsilon \otimes d')(x \otimes x') = (-1)^{q+1} x \otimes d'x'$, pentru $x \in B_q(C)$. Aplicînd Teorema 5 § 1 acestui şir exact de complexe de lanţuri şi

ţinînd seama că d are gradul egal cu -1, obţinem şirul exact

$$\dots \longrightarrow H_n(Z\otimes C') \xrightarrow{(i\otimes 1)_*} H_n(C\otimes C') \xrightarrow{(d\otimes 1)_*}$$

$$\xrightarrow{(d\otimes 1)_*} H_{n-1}(B\otimes C') \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(Z\otimes C') \longrightarrow \dots$$

Aplicînd exerc. 1 § 1, avem $Z_n(Z\otimes C') = \bigoplus_{q+r=n} Z_q\otimes Z'_r$ şi $B_n(Z\otimes C') = \bigoplus_{q+r=n} Z_q\otimes B'_r$, ceea ce implică $H_n(Z\otimes C') = \bigoplus_{q+r=n} Z_q\otimes H'_r$, pentru $Z_q = Z_q(C)$, $Z'_r = Z_r(C')$ şi $B'_r = B_r(C')$. În mod analog se deduce relaţia $H_n(B\otimes C') = \bigoplus_{q+r=n} B_q\otimes H'_r$, cu $B_q = B_q(C)$.

Să considerăm acum homomorfismul

$$\partial_*: \bigoplus_{q+r=n-1} B_q\otimes H'_r \to \bigoplus_{q+r=n-1} Z_q\otimes H'_r.$$

Fie $\sum_i dc_q^i\otimes [z_r'^i] \in B_q\otimes H'_r$. Avem atunci relaţia

$$(d\otimes 1)(\sum_i c_q^i\otimes z_r'^i) = \sum_i dc_q^i\otimes z_r'^i,$$

iar în $C\otimes C'$ putem scrie

$$d''(\sum_i c_q^i\otimes z_r'^i) = \sum_i dc_q^i\otimes z_r'^i.$$

Ultima sumă însă este imaginea prin $(i\otimes 1)$ a sumei respective, privită ca element al produsului $Z\otimes C'$. Astfel, ∂_* este homomorfismul indus de incluziunea $B\subseteq Z$. Obţinem în felul acesta următorul şir exact de grupuri

$$\dots\longrightarrow \bigoplus_{q+r=n} Z_q\otimes H'_r \xrightarrow{(i\otimes 1)_*} H_n(C\otimes C') \xrightarrow{(d\otimes 1)_*}$$

$$\xrightarrow{(d\otimes 1)_*} \bigoplus_{q+r=n-1} B_q\otimes H'_r \xrightarrow{\partial_*} \bigoplus_{q+r=n-1} Z_q\otimes H'_r \longrightarrow \dots$$

Este clar atunci că Coker ∂_* este $\bigoplus_{q+r=n-1} H_q\otimes H'_r$ şi că $(i\otimes 1)_*$ induce aplicaţia η_n: Coker $\partial_* \to H_n(C\otimes C')$. Apoi, din definiţia produsului torsionat (exerc. 5 § 1) avem că $H_q * H'_r$

este $\mathrm{Ker}(B_q\otimes H'_r \xrightarrow{\partial_*} Z_q\otimes H'_r)$. Putem considera şirul exact de grupuri abeliene

$$0\longrightarrow \mathrm{Coker}\ \partial_* \xrightarrow{\eta_n} H_n(C\otimes C') \xrightarrow{\vartheta_n} \mathrm{Ker}\ \partial_* \longrightarrow 0,$$

care, în baza celor de mai sus, poate fi scris sub forma celui din enunţul teoremei.

Să presupunem acum că şi grupurile C'_r sînt grupuri abeliene libere. Atunci, putem considera proiecţiile canonice $k: C\to Z$ şi $k': C'\to Z'$, adică inversele la dreapta ale incluziunilor $i: Z\to C$ şi respectiv $i': Z'\to C'$ *). Are loc atunci relaţia:

$$(k\otimes k')d''(c\otimes c') = dc\otimes k'c' - k\varepsilon c\otimes d'c',$$

unde dc şi $d'c'$ sînt privite ca elemente ale lui Z şi respectiv Z'. Folosind Lema 1, rezultă că homomorfismul $k\otimes k'$, aplică $B(C\otimes C')$ în $\mathrm{Ker}(\mu\otimes\mu')$ şi astfel induce aplicaţia $\zeta: H(C\otimes C')\to H\otimes H'$, încît $\eta\zeta = 1$. Prin urmare η_n are un invers la dreapta, ceea ce implică faptul că şirul studiat este scindat.

COROLAR 2. *Dacă C şi C' sînt două complexe de lanţuri, de grupuri abeliene libere, atunci pentru orice n există un izomorfism*

$$H_n(C\otimes C') \cong$$

$$\cong (\bigoplus_{q+r=n} H_q(C)\otimes H_r(C'))(\bigoplus_{q+r=n-1} H_q(C) * H_r(C')).$$

Această relaţie poartă denumirea de *formula lui Künneth*.

Vom aplica acum formula lui Künneth pentru calculul grupurilor de omologie ale unui produs de poliedre.

Fie $X = |\mathbf{K}|$, $Y = |L|$ două poliedre simpliciale. Conform Teoremei 6 § 5 Cap. III, produsul topologic $X\times Y$ este un poliedru. Există deci un complex simplicial, să-l notăm prin $K\times L$, astfel încît $X\times Y = |K\times L|$.

*) Z este sumand direct al lui C iar Z' al lui C'.

Considerăm complexele simpliciale K și L cu orientări fixate. Fie σ și τ simplexele din demonstrația Lemei 1 § 5. Cap. II și să presupunem că orientările complexelor K și L sînt astfel încît $+\sigma = \langle a^0, a^1, \ldots, a^r \rangle$ și $+\tau = \langle b^0, b^1, \ldots, b^r \rangle$. Alegem orientarea complexului $K \times L$ astfel încît, pentru fiecare $\varphi \in M_{qr}$, simplexul $(\sigma \times \tau)(\varphi)$ și fețele acestuia să aibă orientările date de ordinea vîrfurilor din tabloul (1) din demonstrația lemei menționate.

LEMA 2. *Fie σ un q-simplex orientat al complexului simplicial orientat K și τ un r-simplex al complexului orientat L. Fie σ' o $(q-1)$-față a lui σ, astfel încît $(\sigma' \times \tau)(\varphi')$ este față a simplexului $(\sigma \times \tau)(\varphi)$, și fie τ' o față a lui τ, încît $(\sigma \times \tau')(\varphi'')$ este de asemenea față a lui $(\sigma \times \tau)(\varphi)$. Au loc atunci relațiile:*

i) $(-1)^{\varphi} \cdot [(\sigma \times \tau)(\varphi), (\sigma' \times \tau)(\varphi')] = (-1)^{\varphi'}[\sigma, \sigma']$;

ii) $(-1)^{\varphi} \cdot [(\sigma \times \tau)(\varphi), (\sigma, \tau')(\varphi'') = (-1)^q \cdot (-1)^{\varphi''}[\tau, \tau']$, *unde notația* $(-1)_{\varphi}$, *pentru* $\varphi = \{j_1, \ldots, j_q\}$, *înseamnă* $(-1)^{j_1 + \ldots + j_q}$, *iar pentru* $\varphi = \emptyset$, $(-1)^{\varphi} = -1$.

Demonstrație. Utilizăm notațiile din demonstrația Lemei 1 § 5 Cap. II. Fie $+\sigma = \langle a^0, \ldots, a^q \rangle$, $+\sigma' = \langle a^0, \ldots, \widehat{a^h} \ldots, a^q \rangle$, $+\tau = \langle b^0, \ldots, b^r \rangle$, $+\tau' = \langle b^0, \ldots, \widehat{b^k}, \ldots, b^q \rangle$. Cazurile $q = 1$ pentru *i)* și $q = 0$ pentru ii) se verifică direct. Presupunem în continuare $q \geqslant 2$ pentru i) și $q \geqslant 1$ pentru ii).

Să presupunem că $\varphi' = \{j'_1, \ldots, j'_{q-1}\}$. Atunci, în mod necesar, $\varphi = \{j'_1, \ldots, j'_h, j'_h - h, j'_{h+1}, \ldots, j'_{q-1}\}$ și avem

$$(-1)^{\varphi'}[\sigma, \sigma'] = (-1)^{h + j'_1 + j'_2 + \ldots + j'_{q-1}},$$

$$(-1)^{\varphi}[(\sigma \times \tau)(\varphi), (\sigma' \times \tau)(\varphi')] =$$

$$= (-1)^{j'_1 + \ldots + j'_h + (j'_h - h) + j'_{h+1} + \ldots + j'_{q-1}} \cdot$$

$$\cdot (-1)^{j'_1 + (j'_2 - j'_1) + \ldots + (j'_h - j'_{h-1})} =$$

$$= (-1)^{j'_1 + \ldots + j'_{q-1} + 2j'_h - h} = (-1)^{\varphi'}[\sigma, \sigma'].$$

Are loc deci i).

Fie acum $\varphi'' = \{j''_1, \ldots, j''_q\} \subset \{1, 2, \ldots, q + r - 1\}$ și să presupunem că avem $j''_h - h \leqslant k < j''_{h+1} - (h+1)$. Atunci, $\varphi = \{j'', \ldots, j''_1, j''_{h+1} + 1, \ldots, j''_q + 1\}$ și avem

$$(-1)^q \cdot (-1)^{\varphi''}[\tau, \tau'] = (-1)^{q + j''_1 + \ldots + j''_q + k},$$

$$(-1)^{\varphi}[(\sigma \times \tau)(\varphi), (\sigma + \tau')(\varphi'')] =$$

$$= (-1)^{j''_1 + \ldots + j''_h + (j''_{h+1} + 1) + \ldots + (j''_q + 1)} \cdot$$

$$\cdot (-1)^{j''_1 + (j''_2 - j''_1) + \ldots + (j''_h - j''_{h-1}) + (k - (j''_h - h))} =$$

$$= (-1)^{j''_1 + \ldots + j''_q + (q-h)} \cdot (-1)^{k-h} = (-1)^{j''_1 + \ldots + j'_q + q + k} =$$

$$= (-1)^{q + \varphi''}[\tau, \tau'],$$

adică este verificată și relația ii).

LEMA 3. *Dacă θ este o $(q + r - 1)$-față a simplexului $(\sigma \times \tau)(\varphi)$, nefiind însă de forma $(\sigma' \times \tau)(\varphi')$ sau $(\sigma \times \tau')(\varphi'')$, atunci există $\psi \in M_{qr}$, $\psi \neq \varphi$, încît θ este de asemenea față a simplexului $(\sigma \times \tau)(\psi)$ și în plus are loc relația*

iii) $(-1)^{\varphi}[(\sigma \times \tau)(\varphi), \theta] + (-1)^{\psi}[(\sigma \times \tau)(\psi), \theta] = 0$.

Demonstrație. Este clar că simplexul θ se poate obține din $(\sigma \times \tau)(\varphi)$, ale cărui vîrfuri le presupunem cele din tabelul (1) din demonstrația Lemei 1 § 5, Cap. II dacă și numai dacă se omite un vîrf de forma $(a^{h-1}, b^{j_h - h})$ sau de forma $(a^h, b^{j_h - h})$, condiționat de inegalitatea $j_h - j_{h-1} > 1$, respectiv $j_{h+1} - j_h > 1$. Să presupunem că θ se obține omițînd vîrful $(a_{h-1}, b^{j_h - h})$. Atunci, putem considera mulțimea $\psi = \{j_1, \ldots, j_{h-1}, j_h - 1, j_{h+1}, \ldots, j_q\}$ și se constată imediat că simplexul $(\sigma \times \tau)(\psi)$ are de asemenea pe θ ca față. În plus, $[(\sigma \times \tau)(\psi), \theta] = [(\sigma \times \tau)(\varphi), \theta]$, în vreme ce $(-1)^{\varphi} = -(-1)^{\psi}$. În mod analog, dacă θ se obține omițînd vîrful $(a^h, b^{j_h - h})$, atunci $\psi = \{j_1, \ldots, j_{h-1}, j_h + 1, j_{h+1}, \ldots, j_q\}$ și se mențin relațiile precedente.

LEMA 4. *Dacă* $\sigma \in K$ *şi* $\tau \in L$ *şi notăm prin* $\dot{\overline{(\sigma \times \tau)}}$ *frontiera produsului* $\sigma \times \tau$, *cu triangularea indusă, atunci perechea* $(\sigma \times \tau, \dot{\overline{(\sigma \times \tau)}})$ *este un bloc simplicial al complexului* $K \times L$.

Cînd σ *şi* τ *parcurg complexele* K *şi respectiv* L, *se obţine o descompunere în blocuri simpliciale a complexului* $K \times L$.

Demonstraţie. Este clar că $\sigma \times \tau$ este un subcomplex al lui $K \times L$ şi $\dot{\overline{(\sigma \times \tau)}}$ este un subcomplex al lui $\sigma \times \times \tau$. Apoi, după Cor. 1 § 5. Cap. III şi Lema 1 § 7, rezultă că $(\sigma \times \tau, \dot{\overline{(\sigma \times \tau)}})$ este un $(q + r)$-bloc simplicial dacă $\dim \sigma = q$ şi $\dim \tau = r$.

Fie acum θ un simplex al produsului $K \times L$. Dacă $\theta = (\sigma \times \tau)(\varphi)$, atunci $\dim \theta = \dim \sigma + \dim \tau$ şi $\theta \in \in (\sigma \times \tau) \setminus \dot{\overline{(\sigma \times \tau)}}$. Dacă presupunem că θ nu este această formă, atunci (Lema 3) θ este faţă comună a două simplexe de forma $(\sigma \times \tau)(\varphi)$, $(\sigma \times \tau)(\psi)$. Astfel, fiecare simplex din $K \times L$ se află în interiorul unui bloc (şi numai a unuia). Este clar apoi că $\dot{\overline{(\sigma \times \tau)}} = \dot{\sigma} \times \tau \cup \sigma \times \dot{\tau}$ este inclus în reuniunea blocurilor de dimensiune $< \dim (\sigma + + \tau)$. Sînt verificate astfel condiţiile Def. 2 § 7.

Fie M_n bloc-n-scheletul complexului $K \times L$, în descompunerea dată de Lema 4, deci $M_n = \bigcup_{\dim\sigma + \dim\tau \leq n} \sigma \times \tau$. Conform Lemei 2 § 7 putem asocia acestei descompuneri în blocuri a lui $K \times L$ un complex de lanţuri (C^b, d^b), cu $C^b = \bigotimes_n H_n(M_n, M_{n-1})$ şi

$$d^b = j_* \partial_* : H_n(M_n, M_{n-1}) \xrightarrow{\partial_*} H_{n-1}(M_{n-1}) \xrightarrow{j_*}$$

$$\longrightarrow H_{n-1}(M_{n-1}\ M_{n-2}).$$

LEMA 5. *Complexele de lanţuri* (C^b, d^b) *şi* $(C(K) \otimes C(L), d'')$ *sînt izomorfe.*

Demonstraţie. Conform Teoremei 2 § 7, $H_n(M_n, M_{n-1})$ este grupul abelian liber generat de n-blocurile $\sigma \times \tau$, $\sigma \in K$, $\tau \in L$. Este clar atunci că putem defini izomorfismul $\varphi_n : H_n(M_n, M_{n-1}) \to \bigoplus_{q+r=n} C_q(K) \otimes C_r(L)$ prin $\varphi_n(\sigma \times \times \tau) = \sigma \otimes \tau$. Vom arăta că $\bigoplus_n \varphi_n$ este o aplicaţie de lan-

ţuri. Avem de dovedit comutativitatea următoarei diagrame

$$\begin{array}{ccc} H_n(M_n, M_{n-1}) & \xrightarrow{\varphi_n} & \bigoplus_{q+r=n} C_q(K) \otimes C_r(L) \\ \downarrow d^b & & \downarrow d'' \\ H_{n-1}(M_{n-1}, M_{n-2}) & \xrightarrow{\varphi_{n-1}} & \bigoplus_{q+r=n-1} C_q(K) \otimes C_r(L) \end{array}$$

Pentru $\sigma \in K$ şi $\tau \in L$, cu $\dim \sigma = q$, avem

$$\underline{d''\varphi_n(\sigma \times \tau)} = d''(\sigma \otimes \tau) = \underline{d\sigma \otimes \tau + (-1)^q \sigma \otimes d\tau}.$$

Pe de altă parte, conform demonstraţiei Teoremei 2 § 7, $H_n(M_n, M_{n-1})$ se poate identifica cu $Z_n(C(M_n, M_{n-1})) \subset \subset C_n(M_n, M_{n-1}) \subset C_n(K \times L)$. Dacă pentru σ, τ ca mai sus, considerăm lanţul $z = \sum_\varphi (-1)^\varphi (\sigma \times \tau)(\varphi)$, atunci, după Lema 3, acesta este un ciclu relativ în $Z_n(C(M_n, M_{n-1}))$, pe care-l putem identifica deci cu $\sigma \times \tau$. Tot din demonstraţia Teoremei 2 § 7 putem scrie

$$d^b(\sigma \times \tau) = dz = d(\sum_\varphi (-1)^\varphi (\sigma \times \tau)(\varphi)) =$$

$$= \sum_\varphi (-1)^\varphi \{ \sum_{\sigma', \varphi'} [(\sigma \times \tau)(\varphi), (\sigma' \times \tau)(\varphi')](\sigma' \times \tau)(\varphi') +$$

$$+ \sum_{\sigma', \varphi''} [(\sigma \times \tau)(\varphi), (\sigma \times \tau')(\varphi'')](\sigma \times \tau')(\varphi'') +$$

$$+ \sum_\theta [(\sigma \times \tau)(\varphi), \theta]\theta\},$$

unde θ nu este de forma $(\sigma' \times \tau)(\varphi')$ şi nici de forma $(\sigma \times \tau')(\varphi'')$. Aplicînd Lemele 2 şi 3 deducem

$$d^b(\sigma \times \tau) = \sum_{\sigma', \varphi'} (-1)^{\varphi'} [\sigma, \sigma'](\sigma' \times \tau)(\varphi') +$$

$$+ \sum_{\varphi'', \tau'} (-1)^q (-1)^{\varphi''} [\tau, \tau'](\sigma \times \tau')(\varphi'') = \sum_{\sigma'} [\sigma, \sigma'](\sigma' \times \tau) +$$

$$+(-1)^q\sum_{\tau'}[\tau,\tau'](\sigma\times\tau')=(\sum_{\sigma'}[\sigma,\sigma']\sigma')\times\tau+$$

$$+(-1)^q\sigma\times(\sum_{\tau'}[\tau,\tau']\tau')=d\sigma\times\tau+(-1)^q\sigma\times d\tau.$$

Prin urmare

$$\underline{\varphi_{n-1}d^b(\sigma\times\tau)}=\underline{d\sigma\otimes\tau+(-1)^q\sigma\otimes d\tau}.$$

Comparînd relațiile subliniate de mai sus, deducem egalitatea $d''\varphi_n=\varphi_{n-1}d^b$, ceea ce încheie demonstrația lemei.

COROLAR 2. *K și L fiind două complexe simpliciale, are loc, pentru orice* $n\geqslant 0$, **izomorfismul lui Künneth**

$$H_n(K\times L)\cong(\bigoplus_{q+r=n}H_q(K)\otimes H_r(L))\oplus(\bigoplus_{q+r=n-1}H_q(K)*H_r(L))$$

Demonstrație. Utilizînd Teorema 2 § 7 și Lema 5, avem $H_n(K\times L)\cong H_n(C^b)\cong H_n(C(K)\otimes C(L))$ și aplicăm Cor. 1*)

EXERCIȚII

1. Să se calculeze grupurile de omologie ale produsului $S^m\times S^n$, $m\geqslant 1$, $n\geqslant 1$.

Indicație. Aplicînd Corolarul 2 și Teorema 3 § 3, se obține:

$$H_r(S^m\times S^n)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & r=0,\ m,\ n,\ m+n,\\ 0 & \text{în rest}\end{cases}\quad \text{dacă } m\neq n \text{ și}$$

$$H_r(S^m\times S^m)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & r=0,\ 2m,\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}, & r=m,\\ 0, & \text{în rest.}\end{cases}$$

2. Fie $1<p<q$. Să se calculeze grupurile de omologie ale produselor $S^p\times P\mathbb{R}^q$ și $S^q\times P\mathbb{R}^p$, deducîndu-se faptul că aceste spații nu sînt echivalente omotopic.

Soluție. Aplicînd Corolarul 2, Teorema 3 § 3 și Teorema 3 § 7, avem $H_n(S^p\times P\mathbb{R}^q)\cong H_n(P\mathbb{R}^q)\oplus H_{n-p}(P\mathbb{R}^q)$, după care deosebim cazurile:

*) Pentru simplitatea demonstrației, izomorfismul lui Künneth este prezentat în diverse cărți fie în cadru *celular*, fie *singular*. Autorul datorează dr. Ștefan Papadima îndemnul de a căuta o demonstrație simplicială.

1) $H_0(S^p\times P\mathbb{R}^q)\cong\mathbb{Z}$;

2) $1\leqslant n<p\Rightarrow H_n(S^p\times P\mathbb{R}^q)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & n \text{ impar},\\ 0, & n \text{ par};\end{cases}$

3) $H_p(S^p\times P\mathbb{R}^q)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & p \text{ par},\\ \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}_2, & p \text{ impar};\end{cases}$

4) $p<n<q\Rightarrow H_n(S^p\times P\mathbb{R}^q)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & n \text{ și } p \text{ impare},\\ \mathbb{Z}_2\oplus\mathbb{Z}_2, & n \text{ impar, } p \text{ par},\\ \mathbb{Z}_2, & n \text{ par, } p \text{ impar},\\ 0, & n \text{ și } p \text{ pare};\end{cases}$

5) $H_q(S^p\times P\mathbb{R}^q)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}\oplus Z_2, & q \text{ impar și } p \text{ par},\\ \mathbb{Z}, & q \text{ și } p \text{ impare},\\ \mathbb{Z}_2, & q \text{ par, } p \text{ impar},\\ 0, & q \text{ și } p \text{ pare};\end{cases}$

6) $q<n<p+q\Rightarrow H_n(S^p\times P\mathbb{R}^q)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}_2, & n-p \text{ impar},\\ 0, & n-p \text{ par};\end{cases}$

7) $H_{p+q}(S^p\times P\mathbb{R}^q)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & q \text{ impar},\\ 0, & q \text{ par};\end{cases}$

8) $H_n(S^p\times P\mathbb{R}^q)=0$ dacă $n>p+q$.

Pentru produsul $S^q\times P\mathbb{R}^p$, avem

$$H_n(S^q\times P\mathbb{R}^p)\cong H_n(P\mathbb{R}^p)\oplus H_{n-q}(P\mathbb{R}^p).$$

De aici se obține, de exemplu,

$$H_p(S^q\times P\mathbb{R}^p)\cong\begin{cases}\mathbb{Z}, & p \text{ impar}\\ 0, & p \text{ par}\end{cases}\ncong H_p(S^p\times P\mathbb{R}^q).$$

3. Să se calculeze grupurile de omologie ale torului T^n, $n>1$.

§ 9. Omologia singulară

Este evident că grupurile de omologie simplicială nu sînt aplicabile unor spații topologice arbitrare (care nu sînt poliedre).

În acest paragraf vom defini grupurile de omologie singulară ale unui spațiu topologic oarecare.

Pentru o parte din noțiunile ce urmează se poate revedea § 9 Cap. III.

DEFINIŢIA 1. Un *n-simplex singular*, al unui spaţiu topologic X, este o aplicaţie continuă $s : \Delta^n \to X$ (vom scrie uneori şi s_n în loc de s).

Fie $\Sigma_n(X)$ mulţimea n-simplexelor singulare ale lui X şi $S_n(X) = \mathrm{Ab}\{\Sigma_n(X)\}$, pe care-l numim *grupul n-lanţurilor singulare ale lui X*. Considerăm grupul graduat $S(X) = \bigoplus_{n\geqslant 0} S_n(X)$ şi definim o derivare $d : S(X) \to S(X)$, astfel: $d : S_n(X) \to S_{n-1}(X)$ *) este dată prin $d(s) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i(s)$, pentru $s \in \Sigma_n(X)$ şi extinsă prin Z-liniaritate la întreg grupul $S_n(X)$. Avem atunci

$$d_{n-1}(d_n(s)) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_{n-1}(d_i(s)) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i \sum_{j=0}^{n-1}(-1)^j d_j d_i(s) =$$

$$= \sum_{j<i} (-1)^{i+j} d_{i-1} d_j(s) + \sum_{0\leqslant i\leqslant j} (-1)^{i+j} d_j d_i(s) =$$

$$= \sum_{0\leqslant h<k} (-1)^{h+k-1} d_k d_h(s) + \sum_{0\leqslant i\leqslant j} (-1)^{i+j} d_j d_i(s) = 0.$$

Prin urmare, $d^2 = 0$, adică perechea $(S(X), d)$ este un complex de lanţuri, numit *complexul lanţurilor singulare ale lui X*.

DEFINIŢIA 2. Grupurile de omologie $\{H_n(S(X))\}_{n\geqslant 0}$ se notează cu $\{H_n(X)\}_{n\geqslant 0}$ şi se numesc *grupurile de omologie singulară (simplicială, cu coeficienţi întregi) ale spaţiului X*.

Este evidentă următoarea teoremă:

TEOREMA 1. *Dacă $(X_k)_k$ este familia componentelor liniar conexe ale spaţiului topologic X, atunci $H_n(X) \cong \bigoplus_k H_n(X_k)$, $\forall\, n \geqslant 0$.*

TEOREMA 2. *$H_0(X)$ este grupul abelian liber generat de componentele liniar conexe ale lui X.*

Demonstraţie. După Teorema 1, este suficient să arătăm că dacă X este liniar conex, atunci $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$. Fie $x_0 \in X$, fixat şi x un punct oarecare în X. Alegînd un drum de la x_0 la x, este evident că acesta defineşte un 1-simplex singular $s_x : \Delta^1 \to X$. Atunci, dat un 0-lanţ singular, acesta

---

*) Scriem uneori şi $d_n : S_n(X) \Rightarrow S_{n-1}(X)$, dar cu atenţie, pentru a face distincţie de notaţia $d_n : \Sigma_n(X) \Rightarrow \Sigma_{n-1}(X)$ din exemplul 2 § 9 Cap. III

se poate scrie sub forma $c = \Sigma\lambda_x x$ *). Dacă c este o frontieră, atunci $\Sigma\lambda_x = 0$. Reciproc, dacă aceasta are loc, atunci $c = \Sigma\lambda_x x - (\Sigma\lambda_x)x_0 = d(\Sigma\lambda_x s_x)$. Aplicaţia $c \mapsto \Sigma\lambda_x$ induce izomorfismul $H_0(X) \cong \mathbb{Z}$.

Înlocuind complexul de lanţuri $S(X)$ cu complexul redus $\tilde{S}(X)$, unde $\tilde{S}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$ şi $\tilde{d}_0(\Sigma\lambda_x x) = \Sigma\lambda_x$, obţinem *omologia singulară redusă* a spaţiului topologic X.

COROLAR 1. *Dacă X este liniar conex, $\tilde{H}_0(X) = 0$.*

Pentru o aplicaţie continuă $f : X \to Y$, se induce în mod evident o aplicaţie de lanţuri $S(f) : S(X) \to S(Y)$, $S(f)(s) = f \circ s$ şi aceasta induce homomorfismele $f_* : H_n(X) \to H_n(Y)$, $\forall\, n \geqslant 0$.

Următoarea teoremă rezultă imediat.

TEOREMA 3. *Dacă $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ sînt aplicaţii continue, atunci:*

a) $(g \circ f)_* = g_* f_* : H_n(X) \to H_n(Z)$, $\forall\, n \geqslant 0$;

b) $(1_X)_* = 1_{H_n(X)}$, $\forall n \geqslant 0$;

c) *Dacă f este homeomorfism, atunci f_* este izomorfism*, $\forall n \geqslant 0$.

Pentru a stabili invarianţa omotopică a grupurilor de omologie singulară, dăm mai întîi următoarele leme.

LEMA 1. *Dacă A este o mulţime convexă din $\mathbb{R}^n$, atunci* $H_q(A) = \begin{cases} 0, & q \neq 0, \\ \mathbb{Z}, & q = 0. \end{cases}$

Demonstraţie. Fie $s : \Delta^q \to A$ un simplex singular. Definim $h_q s : \Delta^{q+1} \to A$, prin egalitatea

$$(h_q s)(t_0, t_1, \ldots, t_{q+1}) =$$

$$= \begin{cases} t_0 a + (1 - t_0)s\left(\dfrac{t_1}{1-t_0}, \ldots, \dfrac{t_{q+1}}{1-t_0}\right) & \text{dacă } t_0 \neq 1; \\ a \text{ dacă } t_0 = 1, \end{cases}$$

unde a este un punct fixat din A, iar punctele lui Δ^{q+1} sînt date prin coordonatele lor baricentrice. Se prelungeşte $h_q s$ prin liniaritate şi se obţine o omotopie de lanţuri, $h_q : S_q(A) \to S_{q+1}(A)$, încît avem $dh_q = \mathrm{id} - h_{q-1}d$, $q \geqslant 1$ şi $d_1 h_0 s^0 = s^0 - \sigma^0$, unde $\sigma^0(\Delta^0) = a$. Dacă $z \in Z_q(S(A))$, $q \geqslant 1 \Rightarrow z = dh_q(z) \Rightarrow H_q(A) = 0$, $q \geqslant 1$. Pentru $q = 0$, A fiind liniar conex, rezultă $H_0(A) \cong \mathbb{Z}$.

---

*) Suma fiind finită.

LEMA 2. *Fie X un spațiu topologic și $f_0^X, f_1^X : X \to X \times I$, aplicațiile $f_0^X(x) = (x, 0)$, $f_1^X(x) = (x, 1)$. Atunci, aplicațiile de lanțuri $S(f_0^X)$ și $S(f_1^X)$ sînt omotope.*

Demonstrație. Construim $h_q^X : S_q(X) \to S_{q+1}(X \times I)$, prin inducție după q. Pentru $q = 0$ luăm $h_0^X s = s \times 1_I$.

Presupunem definite homomorfismele h_m^X, $m < q$, $\forall X$, și *functorial*, adică, dacă $f \in \mathrm{Top}\,(X, Y)$, atunci $S_{m+1}(f \times 1_I)h_m^X = h_m^Y S_m(f)$. Fie

$$c = (S(f_1^{\Delta^q}) - S(f_0^{\Delta^q}) - h_{q-1}^{\Delta^q} d)(1_{\Delta^q}).$$

Obținem, în baza ipotezei inductive, $dc = 0$, adică $c \in Z_q(S(\Delta^q \times I))$. Cum însă $\Delta^q \times I$ este o mulțime convexă, rezultă din Lema 1 că $c \in B_q(S(\Delta^q \times I))$, adică există $u \in S(\Delta^q \times I)$, încît $du = c$. Luăm $h_q^{\Delta^q}(1_{\Delta^q}) = u$. Fie acum $s : \Delta^q \to X$, un simplex singular în X. Definim $h_q^X s = S(s \times 1_I)\, h_q^{\Delta^q}(1_{\Delta^q}) = S(s \times 1_I)u$. Se verifică imediat relația $dh_q^X s = f_1^X s - f_0^X s - h_{q-1}^X ds$.

TEOREMA 4. *Dacă aplicațiile $f, g : X \to Y$ sînt omotope, atunci $f_* = g_* : H_n(X) \to H_n(Y)$, $\forall n \geq 0$.*

Demonstrație. După Teorema 2 §1, este suficient să arătăm că $S(f)$ și $S(g)$ sînt lanț omotope.

Fie $H : X \times I \to Y$, cu $H : f \simeq g$. Cu notațiile din Lema 2, $H \circ f_0^X = f$, $H \circ f_1^X = g \Rightarrow S(f) = S(H) \circ S(f_0^X)$ și $S(g) = S(H) \circ S(f_1^X)$. Deoarece $S(f_0^X)$ și $S(f_1^X)$ sînt omotope, rezultă în mod evident că $S(f)$ și $S(g)$ sînt lanț omotope.

COROLAR 2. *Dacă $f : X \to Y$ este o echivalență omotopică, atunci $f_* : H_n(X) \cong H_n(Y)$, $\forall n \geq 0$.*

Pentru o pereche topologică (X, A), avem $S(A) \subseteq S(X)$ și definim *complexul de lanțuri singulare relative* $S(X, A) = S(X)/S(A)$, cu derivarea $\hat{d} : S_n(X, A) = S_n(X)/S_n(A) \to S_{n-1}(X)/S_{n-1}(A)$, indusă de către d, $\hat{d}(c + S_n(A)) = dc + S_{n-1}(A)$. Se obțin șirurile exacte de complexe de lanțuri:

$$0 \longrightarrow S(A) \xrightarrow{i.} S(X) \xrightarrow{j.} S(X, A) \longrightarrow 0 \text{ și } 0 \longrightarrow \tilde{S}(A) \longrightarrow$$
$$\longrightarrow \tilde{S}(X) \longrightarrow S(X, A) \longrightarrow 0,$$

și aplicînd Teoremele 5, 6 §1, deducem teorema următoare.

TEOREMA 5. a) *Pentru orice pereche topologică (X, A), există șirul exact de omologie*

$$\ldots \to H_q(A) \xrightarrow{i_*} H_q(X) \xrightarrow{j_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\partial_*} H_{q-1}(A) \to \ldots$$

și șirul exact de omologie redusă

$$\ldots \to \tilde{H}_q(A) \xrightarrow{\tilde{i}_*} \tilde{H}_q(X) \xrightarrow{\tilde{j}_*} H_q(X, A) \xrightarrow{\tilde{\partial}_*} \tilde{H}_{q-1}(A) \to$$

unde $H_q(X, A) = H_q(S(X, A))$ este **q-grupul de omologie singulară relativă al perechii** *(X, A);*

b) *Dacă $f \in \mathrm{Top}((X, A), (Y, B))$, atunci se induce un homomorfism $f_* : H_q(X, A) \to H_q(Y, B)$ și este comutativă diagrama*

$$\begin{array}{ccccccccc}
\cdots \to & H_q(A) & \xrightarrow{i_*} & H_q(X) & \xrightarrow{j_*} & H_q(X, A) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(A) & \to \cdots \\
& \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & & \downarrow f_* & \\
\cdots \to & H_q(B) & \xrightarrow{i_*} & H_q(Y) & \xrightarrow{j_*} & H_q(Y, B) & \xrightarrow{\partial_*} & H_{q-1}(B) & \to \cdots
\end{array}$$

Demonstrația următoarei teoreme, numită *teorema exciziei*, se poate urmări, de exemplu, în [39, p. 167].

TEOREMA 6. *Fie (X, A) o pereche topologică și U deschisă în X, încît $\bar{U} \subset \mathrm{Int}\, A$. Atunci, incluziunea $e : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ induce izomorfismul $e_* : H_q(X \setminus U, A \setminus U) \xrightarrow{\simeq} H_q(X, A)$.*

TEOREMA 7. *Grupurile de omologie simplicială și singulară ale unui poliedru, într-o dimensiune dată, sînt izomorfe.*

Demonstrație. Fie $|K|$ un poliedru. Definim o aplicație de lanțuri $\alpha : C(K) \to S(|K|)$ astfel: dacă $+\sigma_n = \langle v^0, v^1, \ldots, v^n \rangle$, vom lua $s_n : \Delta^n \to |K|$, $s_n(A^i) = v^i$, $i = 0, 1, \ldots, n$, extindem prin liniaritate și punem $\alpha(+\sigma_n) = s_n$, extinzînd apoi α prin $\mathbb{Z}$-liniaritate la întreg grupul $C(K)$. Este ușor de văzut că α este în adevăr o aplicație de lanțuri. (Pentru detalii, vezi [37, pp.114—117]).

Invers, pentru a defini o aplicaţie de lanţuri $\beta : S(|K|) \to C(K)$, încît să fie invers lanţ-omotopă cu α, se procedează astfel: pentru un simplex singular $s : \Delta^n \to |K|$, există o aproximare simplicială $g_s : |M_s| = \Delta^n \to |K|$, se ia $g_s : C(M_s) \to C(K)$ şi se defineşte $\beta(s) = (g_s)_n(x_s)$, unde x_s este un n-simplex convenabil din $C_n(M_s)$. Anume, dacă $M_s = K(\Delta^n)$ (triangularea lui Δ^n), atunci luăm $x_s = 1_{\Delta^n}$. Dacă nu este aşa, să presupunem că am ales $x_{d_i(s)}$, $\forall i$, şi deci $\sum(-1)^i(d_i) . x_{d_i(s)} \in C_{n-1}(N)$, unde $|N| = |\dot{\Delta}^n|$. Putem considera lanţul $a\sum(-1)^i(d_i) . x_{d_i(s)}$, unde a este baricentrul lui Δ^n. Dacă $M_s = M^{(m)}$, pentru $M = N \cup \{a\sigma\} \cup (a)$, σ parcurgînd simplexele lui N, fie $\varphi^m : C(M) \to C(M_s)$ obţinută prin iterarea echivalenţei de lanţuri din Teorema 5 § 2. Luăm $x_s = \varphi^m[a\sum(-1)^i(d_i)\cdot x_{d_i(s)}]$. Se extinde β la o aplicaţie de lanţuri. Rezultă evident $\alpha\beta = 1$ şi se arată apoi [37, p.117] că $\beta\alpha \simeq 1$, după care se poate aplica Teorema 2 § 1.

EXERCIŢII

1. Să se arate că pentru un triplet (X, A, B), are loc un şir exact de omologie singulară

$$\ldots \to H_q(A, B) \to H_q(X, B) \to H_q(X, A) \to H_{q-1}(A, B) \to \ldots$$

2. Fie $X = X_1 \cup X_2$ şi $A = X_1 \cap X_2$. Să se arate că dacă incluziunea $(X_1, A) \hookrightarrow (X, X_2)$ induce un izomorfism în omologie, atunci acelaşi lucru are loc pentru incluziunea $(X_2, A) \hookrightarrow (X, X_1)$.

3. Fie I homeomorf cu $[0, 1]$, $I \subset S^2$ şi $x \in I$*). Să se verifice dacă incluziunea $(S^2 \setminus \{x\}, I \setminus \{x\}) \hookrightarrow (S^2, I)$ induce izomorfismul grupurilor de omologie. Comparaţie cu Teorema 6.

4. Să se arate că pentru o pereche poliedrală, grupurile de omologie relativă singulară şi simplicială, într-o dimensiune dată, sînt izomorfe

Indicaţie. Se utilizează Teorema 7, şirurile exacte de omologie ale unei perechi şi Lema celor cinci homomorfisme.

5. Homomorfismul Hurewicz poate fi definit şi pentru omologia singulară, iar pentru un spaţiu liniar conex are loc Teorema 2 § 4.

Soluţie. Definim $h : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$, asociind unui drum închis u, în (X, x_0), simplexul singular $u : \Delta^1 \to X$. În adevăr, identificînd I cu Δ^1, putem arăta că u este ciclu. Avem $d(u) = u \circ d_0^* - u \circ d_1^*$, cu $d_0^*, d_1^* : \Delta^0 \to \Delta^1$, date prin $d_0^*(\Delta^0) = 1$ şi $d_1^*(\Delta^0) = 0$. Atunci $(u \circ d_0^*)(\Delta^0) = u(1) = x$.

*) Se vor deosebi cazurile $x \in \operatorname{Int} I$ şi $x \in \operatorname{Fr} I$.

şi $(u \circ d_1^*)(\Delta^0) = u(0) = x_0$, care arată că $u \circ d_0^* = u \circ d_1^*$ şi deci $d(u) = 0$. Prin urmare, $u \in Z_1(X)$.

Putem arăta că este bine definită aplicaţia $h : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X)$, prin $h([u]) = \{u\}$ (utilizăm notaţii diferite pentru elementele celor două grupuri). Fie $\{v\} = [u] \in \pi_1(X, x_0)$, cu $F : u \simeq v \text{ rel } \partial I$. Definim aplicaţia $\lambda : \Delta^2 \to X$ astfel: $\lambda(A^0) = x_0$, iar dacă $A \neq A^0$, considerăm A' ca în fig 83. Avem $A = sA' + (1-s)A^0$ şi $A' = tA^2 + (1-t)A^1$, $s, t \in I$. Luăm atunci $\lambda(A) = F(s, t)$. Aplicaţia λ este continuă datorită continuităţii aplicaţiei F şi λ este un 2-simplex singular în X, avînd frontiera $d(\lambda) = \lambda \circ d_0^* - \lambda \circ d_1^* + \lambda \circ d_2^*$. Dar

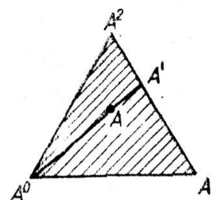


Fig. 83

$$(\lambda \circ d_0^*)(sB^0 + (1-s)B^1) = \lambda(sA^1 + (1-s)A^2) =$$

$$= F(1, s) = x_0,$$

$$(\lambda \circ d_1^*)(sB^0 + (1-s)B^1) = \lambda(sA^0 + (1-s)A^2) = F(s, 1) = v(s),$$

$$(\lambda \circ d_2^*)(sB^0 + (1-s)B^1) = \lambda(sA^0 + (1-s)A^1) = F(s, 0) = u(s).$$

Prin urmare, $d(\lambda) = c_{x_0} - v + u$. Considerînd simplexul singular constant $\lambda_0 : \Delta^2 \to X$, $\lambda_0(\Delta^2) = x_0$, avem $c_{x_0} = d(\lambda_0)$, astfel încît am obţinut $u - v = d(\lambda - \lambda_0)$, care arată că $\{u\} = \{v\}$ în $H_1(X)$.

Putem arăta acum că h este un homomorfism de grupuri, adică avem de dovedit că $\{u * v\} = \{u + v\}$, sau, echivalent, că $u + v - u * v = d(\mu)$, pentru un 2-lanţ singular μ pe X. Mai precis, putem construi chiar un 2-simplex singular μ care să satisfacă relaţia. Anume, definim $\mu : \Delta^2 \to X$ prin

$$\mu((1-t)A^0 + tA^1) = u(t), \quad \mu((1-t)A^0 + tA^2) = (u * v)(t),$$

$$\mu((1-t)A^1 + tA^2) = v(t) \text{ (vezi fig. 84).}$$

Dacă $B_1 = (1-t)A^0 + tA'$, $\mu(B_1) = u(t)$, iar dacă $B_2 = (1-t)A' + tA^2$, atunci $\mu(B_2) = v(t)$. Aplicaţia μ este continuă şi frontiera sa este $d(\mu) = \mu \circ d_0^* - \mu \circ d_1^* + \mu \circ d_2^* = v - (u * v) + u$, cum se constată imediat. Prin urmare, h este un homomorfism de grupuri.

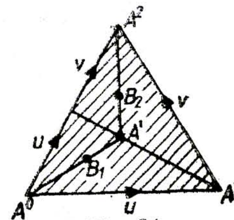


Fig. 84

Să arătăm că h este un epimorfism. Fie $\{z\} \in H_1(X)$, cu $z = \sum_i n_i \lambda_i$ un 1-ciclu, λ_i fiind simplexe singulare, iar $n_i \in \mathbb{Z}$. Avem

$$0 = d(z) = \sum_i n_i d(\lambda_i), \quad \text{cu } d(\lambda_i) = \lambda_i \circ d_0^* - \lambda_i \circ d_1^* = \lambda_i(1) - \lambda_i(0).$$

Prin urmare, $\sum_i n_i(\lambda_i(1) - \lambda_i(0)) = 0$, deci, după reducerea termenilor asemenea, coeficienţii sînt nuli. Deoarece X este liniar conex, putem alege drumurile în X : η_{i0} de la x_0 la $\lambda_i(0)$ şi η_{i1} de la x_0 la $\lambda_i(1)$, care să nu depindă de indice (adică, de exemplu, dacă $\lambda_i(0) = \lambda_j(1)$, atunci $\eta_{i0} = \eta_{j1}$) (vezi fig. 85). Rezultă că avem $\sum_i n_i(\eta_{i1} - \eta_{i0}) = 0$.

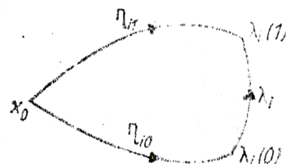


Fig. 85

Considerăm acum 1-lanţurile $\beta_i = \eta_{i0} + \lambda_i - \eta_{i1}$. Avem atunci $z = \sum_i n_i\lambda_i - \sum_i n_i(\beta_i - \eta_{i0} + \eta_{i1})$ şi, ţinînd seama de relaţia de mai sus, deducem că $z = \sum_i n_i\beta_i$.

Corespunzător 1-ciclurilor β_i, putem considera drumurile închise $\gamma_i = \eta_{i0}\lambda_i\eta_{i1}^{-1}$ şi deoarece h este homomorfism, avem $h([\gamma_i]) = \{\beta_i\}$, care implică faptul că luînd $u = \prod_i [\gamma_i]^{n_i}$, avem $h(u) = \{z\}$ şi deci h este epimorfism.

Vom arăta că avem $\mathrm{Ker}\, h = [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$. Mai întîi, dacă $[u], [v] \in \pi_1(X, x_0)$, atunci $h([u][v][u]^{-1}[v]^{-1}) = \{u\} + \{v\} - \{u\} - \{v\} = 0$, care arată că avem $[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] \subseteq \mathrm{Ker}\, h$. Considerăm homomorfismul $\bar{h} : \pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, X_0)] \to H_1(X)$, definit prin $\bar{h}([u] + [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]) = \{u\}$, în baza observaţiei de mai sus. Arătăm că $\bar{h}$ este monomorfism. Fie pentru aceasta $\{u\} = 0$, adică $u = d(\sum_i n_i\mu_i)$, cu $\mu_i : \Delta^2 \to X$ simplexe singulare. Avem atunci $u = \sum_i n_i d(\mu_i) = \sum_i n_i(\mu_i \circ d_0^* - \mu_i \circ d_1^* + \mu_i \circ d_2^*)$, pe care o scriem $u = \sum_i n_i(\mu_{i0} - \mu_{i1} + \mu_{i2})$, cu $\mu_{i0}, \mu_{i1}, \mu_{i2}$ drumuri (sau 1-simplexe singulare) în X. Alegem drumurile η_{ij}, $j = 0, 1, 2$, în X, de la x_0 respectiv la $\mu_{i2}(0)$, $\mu_{i0}(0)$ şi $\mu_{i1}(0)$ (vezi fig. 86). Ca şi anterior, drumurile η_{ij} depind numai de puncte şi nu de indici. Putem considera acum drumurile $\beta_{i0} = \eta_{i1}\mu_{i0}\eta_{i2}^{-1}$, $\beta_{i1} = \eta_{i0}\mu_{i1}\eta_{i2}^{-1}$ şi $\beta_{i2} = \eta_{i0}\mu_{i2}\eta_{i1}^{-1}$. Luînd atunci $\beta_i = \beta_{i0}\beta_{i1}^{-1}\beta_{i2}$, deducem $\beta_i \simeq e_{x_0}$ rel ∂I. Prin urmare, $\prod_i [\beta_i]^{n_i} = 1$, care implică

$$\prod_i([\beta_i] + [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]^{n_i}) = 0.$$

Fig. 86

Dar, grupul $\pi_1(X, x_0)/[\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ fiind abelian, avem, ţinînd seama că $\beta_i \simeq \eta_{i1}\mu_{i0}\mu_{i1}^{-1}\mu_{i2}\eta_{i1}^{-1}$,

$$\prod_i([\mu_{i0}\mu_{i1}^{-1}\mu_{i2}] + [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)])^{n_i} = 0.$$

Pe de altă parte, din ultima exprimare dată 1-simplexului singular u, avem că $[u] = \prod_i [\mu_{i0}\mu_{i1}^{-1}\mu_{i2}]^{n_i}$.

Am obţinut prin urmare că $[u] + [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)] = 0$, care arată că $[u] \in [\pi_1(X, x_0), \pi_1(X, x_0)]$ şi deci, deoarece $\bar{h}$ este epimorfism ($\bar{h}$ fiind astfel) şi $\mathrm{Ker}\, \bar{h} = 0$, deducem că $\bar{h}$ este izomorfism.

§10. Omologia CW-complexelor. Grupurile de omologie ale spaţiilor proiective complexe şi cuaternionice

În acest paragraf dăm o metodă de calcul al grupurilor de omologie singulară ale CW-complexelor, analoagă metodei blocurilor simpliciale pentru poliedre.

Fie (X, A) o CW-pereche, încît $X \setminus A$ constă din interiorul a $m > 0$ celule de dimensiune n, $X \setminus A = \mathrm{Int}\, e_1^n \cup \ldots \cup \mathrm{Int}\, e_m^n$.

În baza Cor. 1 § 5 Cap. III, putem presupune că aplicaţiile caracteristice ale acestor celule sînt de forma $\varphi_i : (\Delta^n, \partial\Delta^n) \to (X, A)$.

TEOREMA 1. *Pentru orice întreg* $r \geqslant 0$, *homomorfismele* $(\varphi_i)_* : H_r(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_r(X, A)$ *sînt monomorfisme, iar homomorfismul* $\varphi = \oplus_i (\varphi_i)_* : \oplus_i H_r(\Delta^n, \partial\Delta^n) \to H_r(X, A)$ *este un izomorfism.*

Demonstraţie. Fie $E = \left\{A = (t_0, \ldots, t_n) \in \Delta^n \,\middle|\, t_i \geqslant \frac{1}{n+1}\right\}$,

$$\partial E = \left\{A = (t_0, \ldots, t_n) \in E \,\middle|\, \exists i \text{ cu } t_i = \frac{1}{n+1}\right\}$$

$$\text{şi } F = (\Delta^n \setminus E) \cup \partial E.$$

Notăm prin K subspaţiul lui X definit prin $K = A \cup \bigcup_{i=1}^m \varphi_i(F)$. Este uşor de văzut că A este retractă tare de deformare a lui K. Prin Corolarul 2 § 9 şi Teorema 5 § 9 rezultă că incluziunea $j : (X, A) \to (X, K)$ induce izomorfismul $j_* : H_r(X, A) \cong H_r(X, K)$.

Considerăm acum următoarele subspaţii ale lui X : $P = \bigcup_{i=1}^m \varphi_i(E)$ şi $C = \bigcup_{i=1}^m \varphi_i(\partial E)$. Aplicînd atunci Teore-

ma 6 § 9 incluziunii $e:(P, C)\to(X, K)$, care poate fi scrisă $e:(X\setminus U, K\setminus U)\to(X, K)$, pentru $U = A\cup\bigcup_{i=1}^{m}\varphi_i(\Delta^n\setminus E)$, obținem izomorfismul $e_*: H_r(P, C)\cong H_r(X, K)$. Dar P este reuniunea disjunctă a submulțimilor deschise și închise $P_i=\varphi_i(E)$ ale lui P. Fie $C_i = P_i\cap C=\varphi_i(\partial E)(i=1,\ldots,m)$. Atunci, incluziunile $q_i:(P_i, C_i)\to(P, C)(i=1,\ldots,m)$ induc monomorfismele $q_{i*}: H_r(P_i, C_i)\to H_r(P, C)$ iar homomorfismul $q=\overset{m}{\underset{i=1}{\oplus}} q_{i*}:\underset{i}{\oplus} H_r(P_i, C_i)\to H_r(P, C)$ este izomorfism.

Considerăm acum deformarea $D_t:\Delta^n\to\Delta^n$, $t\in I$, definită prin

$$D_t(t_0,\ldots,t_n)=\left(1-\frac{t}{2}\right)(t_0,\ldots,t_n)+\frac{t}{2n+2}(1,\ldots,1).$$

Atunci

$$D_t(\partial\Delta^n)\subset F,\ \forall t\in I \text{ și } D_0(\Delta^n)=E,\ D_1(\partial\Delta^n)=\partial E.$$

Mai avem că pentru orice $i=1,\ldots,m$ aplicația $\psi_i:(\Delta^n, \partial\Delta^n)\to(P_i, C_i)$, definită prin $\psi_i(t_0,\ldots,t_n)=\varphi_i(D_1(t_0,\ldots,t_n))$, este un homeomorfism și urmează deci izomorfismele $\psi_{i*}: H_r(\Delta^n, \partial\Delta^n)\to H_r(P_i, C_i)$, $i=1,\ldots,m$.

În sfîrșit, să considerăm diagrama de aplicații de perechi

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\psi_i}{\nearrow} & (P_i, C_i) & \xrightarrow{q_i} & (P, C)\\ (\Delta^n, \partial\Delta^n) & & & & \downarrow e\\ & \underset{\varphi_i}{\searrow} & (X, A) & \xrightarrow{j} & (X, K)\end{array}$$

Această diagramă este omotopic comutativă. În adevăr, deoarece $D_t(\partial\Delta^n)\subset F$, $\forall t\in I$, putem defini omotopia $H_t=j\varphi_i D_t:(\Delta^n, \partial\Delta^n)\to(X, K)$, $t\in I$. Avem $H_0 = j\varphi_i$ și $H_1=eq_i\psi_i$. Deducem astfel diagrama comutativă

$$\begin{array}{ccccc} & \overset{\psi_{i*}}{\nearrow} & H_r(P_i, C_i) & \xrightarrow{q_{i*}} & H_r(P, C)\\ H_r(\Delta^n, \partial\Delta^n) & & & & \downarrow e_*\\ & \underset{\varphi_{i*}}{\searrow} & H_r(X, A) & \xrightarrow{j_*} & H_r(X, K)\end{array}$$

Deoarece j_*, e_*, ψ_{i*} sînt izomorfisme și q_{i*} este monomorfism, rezultă că $\varphi_{i*}=j_*^{-1}e_*q_{i*}\psi_{i*}: H_r(\Delta^n, \partial\Delta^n)\to H_r(X, A)$ este de asemenea un monomorfism $i=1,\ldots,m$. Pe de altă parte, deoarece $q=\underset{i}{\oplus} q_{i*}$ este izomorfism, la fel este și homomorfismul $\varphi=\underset{i}{\oplus}\varphi_{i*}=j_*^{-1}e_*q_*\circ(\oplus\psi_{i*})$.

Aceasta încheie demonstrația teoremei.

COROLAR 1. *Dacă (X, A) este o CW-pereche finită, încît $X\setminus A$ constă din interiorul a m celule de dimensiune n, atunci $H_r(X, A)=0$, pentru $r\neq n$, și $H_n(X, A)$ este grupul abelian liber cu m generatori.*

COROLAR 2. *Fie (X, A) o CW-pereche. Fie $X_n = X^n\cup A$. Atunci, $H_r(X_n, X_{n-1})=0$, pentru $r\neq n$, și $H_n(X_n, X_{n-1})$ este grupul abelian liber cu generatorii în corespondență biunivocă cu n-celulele deschise din $X\setminus A$.*

Pentru o CW-pereche (X, A), fie grupul graduat $C(X, A)=\underset{n\geqslant 0}{\oplus} H_n(X_n, X_{n-1})$, unde $X_n = A$ dacă $n<0$. Definim și homomorfismul $\delta: H_n(X_n, X_{n-1})\to H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$, ca fiind homomorfismul ∂_* din șirul exact de omologie al tripletului (X_n, X_{n-1}, X_{n-2}) exerc. 1 § 9) și coincizînd cu compunerea $H_n(X_n, X_{n-1})\xrightarrow{\partial_*}\tilde H_{n-1}(X_{n-1})\xrightarrow{j_*}H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})$. Avem $\delta\delta=j_*(\partial_*j_*)\partial_*=0$, deoarece este exact șirul

$$\tilde H_{n-1}(X_{n-1})\xrightarrow{j_*}H_{n-1}(X_{n-1}, X_{n-2})\xrightarrow{\partial_*}\tilde H_{n-2}(X_{n-2})$$

ca fiind șirul exact de omologie redusă al perechii (X_{n-1}, X_{n-2}).

Am obținut astfel un complex de lanțuri $(C(X, A), \delta)$.

TEOREMA 2. $H_n(C(X, A))\cong H_n(X, A)$, $\forall n\geqslant 0$

Demonstrație. Într-un mod cu totul analog cu demonstrația Teoremei 2 § 8, se stabilește că $H_n(X_p, A)\cong H_n(C(X, A))$, pentru orice întreg $p>n$. Rămîne să stabilim doar că $H_n(X, A)\cong H_n(X_\nu, A)$. Un element din $H_n(X, A)$ este reprezentat de un ciclu z, care este o combinație liniară finită de n-simplexe singulare ale lui X. Oricare dintre aceste simplexe singulare este o aplicație $s:\Delta^n\to X$, a cărui imagine este compactă și deci, în baza Cor. 1 § 1, Cap. III, este conținută într-un subcom-

plex finit. Astfel, z este de fapt un ciclu al lui $S_n(X_p, A)$, pentru un anumit p. Deoarece $i_*: H_n(X_{n+1}, A) \to H_n(X_p, A)$ este izomorfism pentru $p > n$, rezultă că $H_n(X_{n+1}, A) \to H_n(X, A)$ este epimorfism. Printr-un raționament analog, deducem că dacă $[z'] \in H_n(X_{n+1}, A)$ se aplică pe zero în $H_n(X, A)$, atunci trebuie să se aplice pe zero într-un $H_n(X_p, A)$ și deci $[z'] = 0$. Obținem astfel că $H_n(X_{n+1}, A) \to H_n(X, A)$ este un izomorfism, ceea ce încheie demonstrația teoremei.

COROLAR 3. *Dacă (X, A) este o CW-pereche de dimensiune relativă n, atunci $H_r(X, A) = 0$ pentru $r > n$.*

TEOREMA 3. *Grupurile de omologie singulară ale spațiului proiectiv complex $P\mathbb{C}^n (n \geq 0)$ sînt:*

$$H_r(P\mathbb{C}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & r = 0, 2, 4, \ldots, 2n, \\ 0, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

Demonstrație. După Teorema 2, avem $H_r(P\mathbb{C}^n) \cong H_r(C(P\mathbb{C}^n))$, unde $C(P\mathbb{C}^n)$ este complexul de lanțuri

$$0 \to C_{2n} \to 0 \to C_{2n-2} \to \ldots \to C_4 \to 0 \to C_2 \to 0,$$

cu $C_{2k} \cong \mathbb{Z}$, deoarece $P\mathbb{C}^n$ este un CW-complex avînd cîte o celulă în fiecare din dimensiunile $0, 2, 4, \ldots, 2n$ (exemplul 7 § 1 Cap. III). Rezultă acum în mod evident enunțul teoremei.

Cu totul analog se demonstrează teorema următoare.

TEOREMA 4. *Grupurile de omologie ale spațiului proiectiv cuaternionic $P\mathbb{H}^n (n \geq 0)$ sînt*

$$H_r(P\mathbb{H}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & r = 0, 4, 8, \ldots, 4n, \\ 0, & \text{în celelalte cazuri.} \end{cases}$$

EXERCIȚII

1. Să se calculeze $\chi(P\mathbb{C}^n)$ și $\chi(P\mathbb{H}^n)$.

2. Să se utilizeze Teorema 2 pentru a regăsi grupurile de omologie ale produsului $S^m \times S^n$, $m \geq 1$, $n \geq 1$.

Indicație. $S^m \times S^n$ este un CW-complex avînd cîte o celulă în dimensiunile $0, m, n, m+n$ dacă $m \neq n$ și cîte o celulă în dimensiunile $0,$

$2m$ și două celule de dimensiune m dacă $n = m$. Se regăsesc rezultatele exerc. 1 § 8.

3. Să se calculeze grupurile de omologie ale unui buchet arbitrar de n-sfere $\bigvee_{j \in J} S_j^n$.

Indicație. Spațiul $S = \bigvee_{j \in J} S_j^n$ este un CW-complex avînd o celulă de dimensiune zero și cîte o celulă de dimensiune n pentru fiecare $j \in J$. Aplicînd Teorema 2 se obține:

$$H_r(S) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}, & r = 0, \\ \mathrm{Ab}\{J\}, & r = n, \\ 0, & r \neq 0, n. \end{cases}$$

4. Să se arate că pentru un spațiu Moore avem

$$H_r(M(\pi, n)) \cong \begin{cases} \pi/[\pi, \pi], & r = n, \\ 0, & r \neq n. \end{cases}$$

Indicație. $M(\pi, n)$ este un CW-complex, avînd o celulă de dimensiune zero iar celelalte celule de dimensiune n și $n+1$ (Teorema 1 § 4 Cap. III). Se aplică acum Teorema 2. În cazul $n = 1$ se utilizează Teorema 8 § 9. Dacă $n \geq 2$ grupul π este abelian și în acest caz $[\pi, \pi] = 0$.

§11. Omologia Vietoris. Teoria formei pentru spații metrice compacte

În acest ultim paragraf vom defini una din primele teorii de omologie apărute în cazul necelular. Grupurile ce urmează a fi construite au fost considerate pentru mulțimi plane de către L. Brouwer*) iar în cazul mulțimilor oarecari din spații euclidiene și pentru spații metrice chiar (cum vom considera aici) de către L. Vietoris**). Vom utiliza aceste grupuri la o clasificare a *continuumurilor plane*, dintr-un punct de vedere mai slab decît cel omotopic, și anume cel al *teoriei formei*, dar care este aplicabil (spre deosebire de omotopie) și spațiilor care nu sînt CW-complexe.

---

*) Brouwer, L.E.J., *Beweis der Invarianz der Dimensionenzahl*, Math. Ann. **70** (1911), 161–165.

) Vietoris, L., *Über der höheren Zusammenhang kompacter Raume und eine Klasse von zusammen-hangstreuen Abbindungen*, Math. Ann. **97(1927), 454–472.

DEFINIȚIA 1. Fie M un spațiu metric. Un *ε-n-simplex orientat* al lui M este o submulțime ordonată $(e_0, e_1, \ldots, e_n)$, împreună cu orice permutare pară a acesteia și astfel că $\text{diam}\{e_0, e_1, \ldots, e_n\} < \varepsilon$. Punctele e_i sînt numite *vîrfurile simplexului*.

Dacă G este un grup abelian oarecare, atunci un *ε-n-lanț, cu coeficienți în G*, este o combinație formală $\varkappa_n = \alpha_1\sigma_n^1 + \ldots + \alpha_k\sigma_n^k$, cu $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in G$ și σ_n^i ε-n-simplexe orientate în M.

DEFINIȚIA 2. Fie M un spațiu metric și X o submulțime închisă a lui M. Un *ε-n-lanț* în (X, M) este un ε-n-lanț $\varkappa_n$ în M, încît dacă a este un vîrf al lui $\varkappa_n$, $d(a, X) < \varepsilon$.

Mulțimea ε-n-lanțurilor în (X, M) o vom nota prin $C_n(X^\varepsilon, G)_M$. În raport cu operația evidentă de adunare, obținem pe această mulțime o structură de grup abelian.

DEFINIȚIA 3. Dacă $\sigma = (e_0, e_1, \ldots, e_n)$ este un ε-n-simlpex în M, se definește *frontiera* acestuia, $\partial(\sigma) = \Sigma(-1)^i(e_0, e_1, \ldots, \hat{e}_i, \ldots, e_n)$. Frontiera ε-n-lanțului $\varkappa_n = \alpha_1\sigma_n^1 + \ldots + \alpha_k\sigma_n^k$ este $\partial(\varkappa_n) = \alpha_1\partial(\sigma_n^1) + \ldots + \alpha_k\partial(\sigma_n^k)$.

DEFINIȚIA 4. Un *n-lanț infinit* în (X, M) este un șir $\varkappa = (\varkappa_n^1, \varkappa_n^2, \ldots)$ de ε_i-n-lanțuri în (A, M), pentru un compact $A \subset X$ și $(\varepsilon_i)_i$ un șir de numere pozitive cu $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$. Compactul A se notează carrier $\varkappa$ iar șirul $(\varepsilon_i)_i$ este numit un *majorant al lui* $\varkappa$.

DEFINIȚIA 5. Un *ε-n-ciclu* în (X, M) este un *ε-n-lanț* $\varkappa_n$ pentru care $\partial(\varkappa_n) = 0$.

Un n-lanț infinit în (X, M) care are toți termenii cicluri este numit un *ciclu infinit* în (X, M).

ε-n-ciclurile în (X, M) constituie un subgrup $Z_n(X^\varepsilon, G)_M$ al grupului $C_n(X^\varepsilon, G)_M$.

DEFINIȚIA 6. Două *ε-n-cicluri* γ_n^1 și γ_n^2 se numesc *omoloage* dacă există $\varkappa_{n+1} \in C_{n+1}(X^\eta, G)_M$, încît $\partial(\varkappa_{n+1}) = \gamma_n^1 - \gamma_n^2$. Vom scrie $\gamma_n^1 \underset{\eta}{\sim} \gamma_n^2$.

Două *n-cicluri infinite* $\varkappa = (\varkappa_n^1, \varkappa_n^2, \ldots)$ și $\varkappa' = (\varkappa_n'^1, \varkappa_n'^2, \ldots)$ se numesc *omoloage* dacă există $\gamma = (\gamma_{n+1}^1, \gamma_{n+1}^2, \ldots)$, un $(n+1)$-lanț infinit, încît $\partial(\gamma_{n+1}^i) = \varkappa_n^i - \varkappa_n'^i$. Vom scrie $\partial(\gamma) = \varkappa - \varkappa'$.

DEFINIȚIA 7. Un n-ciclu infinit, $\gamma = (\gamma_n^1, \gamma_n^2, \ldots)$, în (X, M), este *omolog cu zero* dacă există un compact $A \subset X$ și un șir de numere pozitive $(\varepsilon_i)_i$, cu $\lim_{i\to\infty} \varepsilon_i = 0$, încît pentru fiecare i există un ε_i-$(n+1)$-lanț $\varkappa_{n+1}^i$ în (A, M), astfel ca $\partial(\varkappa_{n+1}^i) = \gamma_n^i$.

Un n-ciclu infinit γ, ca mai sus, se numește *n-ciclu propriu* dacă șirul $(\gamma_n^1 - \gamma_n^2, \gamma_n^2 - \gamma_n^3, \ldots, \gamma_n^i - \gamma_n^{i+1}, \ldots)$ este un n-ciclu infinit omolog cu zero, adică $\gamma_n^i \underset{\varepsilon_i}{\sim} \gamma_n^{i+1}$ în (X, M).

Mulțimea n-ciclurilor infinite, proprii în (X, M), cu coeficienți în G, se notează $Z_n(X, G)_M$ și formează, în raport cu adunarea șirurilor pe componente, un grup. Mulțimea n-ciclurilor infinite omoloage cu zero constituie un subgrup $B_n(X, G)_M$ a lui $Z_n(X, G)_M$.

DEFINIȚIA 8. Grupul factor $H_n^V(X, G)_M = Z_n(X, G)_M / B_n(X, G)_M$ este numit *n-grupul de omologie Vietoris, cu coeficienți în G, al lui X (în M)*.

Dacă γ este un n-ciclu propriu, clasa sa de omologie este notată prin $[\gamma]_M$.

TEOREMA 1. *Grupurile $H_n^V(X, G)_M$ nu depind de spațiul metric M în care este scufundat X.*

Demonstrație. Fie $[\gamma]_M \in H_n(X, G)_M$, $\gamma = (\gamma_n^1, \gamma_n^2, \ldots)$ și carrier $\gamma = A$ iar $(\varepsilon_i)_i$ un majorant al lui γ. Asociem fiecărui vîrf e al ciclului γ_n^i un punct $\beta_i(e) \in X$, încît $d(\beta_i(e), e) < \varepsilon_i$. Astfel, $\beta_i(\gamma_n^i)$ este un $3\varepsilon_i$-n-ciclu și $(\beta_1(\gamma_n^1), \beta_2(\gamma_n^2) \ldots)$ este un n-ciclu propriu în X omolog cu γ.

Astfel, fiecare clasă de omologie $[\gamma]_M$ conține un ciclu avînd toate vîrfurile în X. Este ușor de verificat de asemenea că dacă două n-cicluri proprii sînt omoloage în (X, M), atunci acestea conduc la cicluri omoloage în (X, X). Rezultă că $H_n^V(X, G)_M \cong H_n^V(X, G)_X$.

Datorită Teoremei 1, vom omite cel mai adesea indicele M, scriind $H_n^V(X, G)$.

TEOREMA 2. *O aplicație continuă $f: X \to Y$, între două spații metrice, induce cîte un homomorfism $f_*: H_n^V(X, G) \to H_n^V(Y, G)$, pentru fiecare $n \geq 0$ și orice grup abelian G, încît sînt satisfăcute proprietățile:*

a) *Dacă* $f \simeq f' \Rightarrow f_* = f'_*$;

b) *Dacă* $g: Y \to Z \Rightarrow (gf)_* = g_* f_*$.

Demonstrație. Fie $\gamma = (\gamma_n^1, \gamma_n^2, \ldots)$, un *n-ciclu propriu în* (X, M). Putem presupune, după Teorema 1, că vîrfurile lui γ sînt toate în X. Fie carrier $\gamma = A$. Deoarece A este compactă, $f|A$ este uniform continuă. Deci, pentru fiecare $\eta > 0$, $\exists \varepsilon > 0$, încît pentru orice ε-n-simplex $\sigma = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$, cu $a_i \in A$, $f(\sigma) = (f(a_0), f(a_1), \ldots, f(a_n))$ este un η-n-simplex, cu vîrfurile în compactul $f(A)$, situat în Y. Rezultă de aici ușor că $f(\gamma) = (f(\gamma_n^1), f(\gamma_n^2), \ldots)$ este un n-ciclu propriu în Y. Dacă $\gamma \sim \gamma'$, atunci $f(\gamma) \sim f(\gamma')$, cum se constată imediat. Putem lua deci $f_*[\gamma] = [f(\gamma)]$, care definește homomorfismul cerut. Proprietatea b) rezultă în mod evident.

Dacă $f \simeq f'$ și $\gamma \in Z_n(X, G)_X$, atunci se poate arăta fără dificultate că $f(\gamma)$ și $g(\gamma)$ sînt cicluri omoloage în Y și prin urmare $f_*[\gamma] = g_*[\gamma]$

COROLAR 1. *Două spații metrice echivalente omotopic au grupurile de omologie Vietoris, în dimensiuni egale, izomorfe.*

DEFINIȚIA 9. Dat un grup abelian G, spunem că acesta este *local m-generat* dacă fiecare subgrup al său, finit generat, are rangul $\leqslant m$. Cel mai mic cardinal cu această proprietate se numește *rangul grupului G*. Rangul unui grup, dacă nu este finit, se notează ∞. Dacă X este un spațiu metric compact, atunci rangul grupului $H_n^V(X, \mathbb{Z})$ este numit *n-numărul Betti**) al lui X și va fi notat $\beta_n(X)$

Vom arăta în continuare că grupurile de omologie Vietoris sînt invariante la o relație de echivalență mai slabă decît omotopia, iar numerele Betti, definite mai sus, permit clasificarea continuumurilor plane.

Următoarea lemă rezultă din Teoremele 5, 6, 7 § 12 Cap. I.

LEMA 1. *Orice spațiu metric se poate scufunda într-un spațiu* AR.

*) În acest paragraf ne referim numai la numerele Betti *via* omologia Vietoris. Nu se vor confunda cu cele simpliciale sau singulare (vezi Obs. 3).

DEFINIȚIA 10. Fie X, Y două spații metrice compacte*) și $X \subseteq M$, $Y \subseteq N$, cu $M, N \in$ AR. Printr-un *șir fundamental*, $F: X \to Y$, se înțelege un șir de aplicații continue $F_k: M \to N$, $k = 1, 2, \ldots$, satisfăcînd următoarea condiție:

Pentru fiecare vecinătate V a lui Y în N, există o vecinătate U a lui X în M, încît $F_k|U \simeq F_{k+1}|U$ în V, pentru *aproape tot șirul* $\{F_k\}_k$, adică, cu excepția unui număr finit de indici k, există $H_k: U \times I \to V$, continuă, cu $H_k(u, 0) = F_k(u)$, $H_k(u, 1) = F_{k+1}(u)$, $\forall u \in U$.

Vom nota un asemenea șir fundamental prin $F = \{F_k, X, Y\}_{M,N}$. Dacă există o aplicație $f: X \to Y$, încît $F_k(x) = f(x)$, $\forall x \in X$, $\forall k$, se spune că F este *generat de f*.

LEMA 2. *Orice aplicație continuă, $f: X \to Y$, între spații metrice compacte, generează un șir fundamental.*

Demonstrație. Fie $X \subseteq M \in$ AR, $Y \subseteq N \in$ AR. Există $\tilde{f}: M \to N$, încît $\tilde{f}(x) = f(x)$, $\forall x \in X$ (Teorema 7 § 12 Cap. I) și luînd $F_k = \tilde{f}$, $\forall k$, avem un șir fundamental $\{\tilde{f}, X, Y\}_{M,N}$ generat de f.

În particular, dacă $X = Y$, obținem *șirul fundamental identitate* $i_{X,M} = \{1_M, X, X\}_{M,M}$.

Compunerea a două șiruri fundamentale $F = \{F_k, X, Y)_{M,N}$, $G = \{G_k, Y, Z\}_{N,R}$, se definește prin $GF = \{G_kF_k, X, Z\}_{M,R}$.

DEFINIȚIA 11. Două *șiruri fundamentale* $F = \{F_k, X, Y\}_{M,N}$ și $F' = \{F'_k, X, Y\}_{M,W}$ se numesc *omotope* și vom scrie $F \simeq F'$ dacă, pentru fiecare vecinătate V a lui Y în N, există o vecinătate U a lui X în M, încît $F_k | U \simeq F'_k|U$ în V, pentru aproape orice k. O clasă de echivalență în raport cu această relație se numește *clasă fundamentală* și o vom nota prin $[F]$, dacă este reprezentată de șirul fundamental F. Spațiile M și N nu joacă rol esențial.

Două spații metrice compacte X și Y, pentru care există două șiruri fundamentale $F: X \to Y$ și $G: Y \to X$, astfel ca $GF \simeq i_{X,M}$ și $FG \simeq i_{Y,N}$, se numesc de *aceeași formă***) și vom scrie $\mathrm{sh}(X) = \mathrm{sh}(Y)$. Dacă este verificată doar relația $GF \simeq i_{X,M}$ scriem $\mathrm{sh}(X) \leqslant \mathrm{sh}(Y)$ și spunem că X *este fundamental dominat de Y*.

*) Noțiunile pot fi considerate și fără ipoteza de compactitate, dar cu oarecare precauții, vezi [5].

**) În l. engleză, *shape of topological spaces*.

Este clar că relația dintre spații de a avea aceeași formă este o relație de echivalență. Aceasta generalizează relația de echivalență omotopică, cum rezultă din următoarea teoremă evidentă.

TEOREMA 3. *Dacă X și Y sînt două spații metrice compacte, echivalente omotopic, atunci* $\operatorname{sh}(X) = \operatorname{sh}(Y)$.

OBSERVAȚIA 1. Reciproca Teoremei 3 este falsă, deoarece nu orice șir fundamental $F: X \to Y$ este generat de o aplicație continuă $f: X \to Y$, după cum arată următorul exemplu.

EXEMPLUL 1. Fie $X = S^1$, iar Y cercul lui Borsuk (vezi exemplul 5 § 7 Cap. I) și $M = N = \mathbb{R}^2$. Este ușor de văzut, utilizînd faptul că Y nu este local conex (exemplul 5 § 7 Cap. I), că orice aplicație $f: S^1 \to Y$ este nul omotopă. (Chiar orice aplicație $f: S^n \to Y$ este nul omotopă, încît $\pi_n(Y) = 0, \forall n$.) Deci, fiecare șir fundamental $F: X \to$ $\to Y$, generat de o aplicație, este omotop cu un șir fundamental constant $\{y_0, X, Y\}_{M,N}$.

Putem arăta însă că există un șir fundamental, $F =$ $= \{F_k, X, Y\}_{M,N}$, neomotop cu un șir fundamental constant. Considerăm o coroană A_1 care să fie vecinătate compactă a lui X în $\mathbb{R}^2$ și luăm un șir de „coroane" B_k, cu $B_{k+1} \subset B_k$, încît să fie vecinătăți compacte ale lui Y în $\mathbb{R}^2$ și care să „tindă" la Y (fig. 87), astfel că fiecare vecinătate V a compactului Y în $\mathbb{R}^2$ să conțină aproape toate vecinătățile B_k. Presupunem că B_k nu sînt contractibile. Fixăm o orientare a planului $\mathbb{R}^2$ și luăm pentru fiecare k

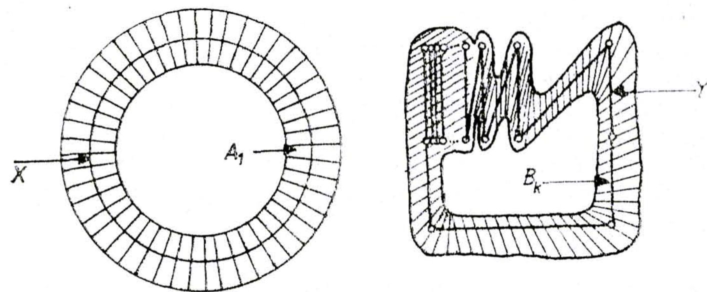


Fig. 87

un homeomorfism păstrînd orientarea, $F_k: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, încît $F_k(A_1) = B_k$. Avem că $F_k(X)$ este o curbă simplă închisă inclusă în B_k și necontractibilă la un punct în B_1. Cum $B_{k+1} \subset B_k$ și F_k păstrează orientarea, se verifică ușor că $F_k|A_1 \simeq F_{k+1}|A_1$ în B_k, $k = 1, 2, \ldots$ Deoarece B_k „tinde" la Y, se verifică imediat că $F_k|A_1 \simeq F_{k+1}|A_1$ în V, pentru orice vecinătate V a compactului Y, pentru aproape orice k. Se obține un șir fundamental $F = \{F_k, X, Y\}_{M,N}$. Dacă ar fi omotop cu un șir constant $\{y_0, X, Y\}_{M,N}$, deoarece B_1 este o vecinătate a lui Y în $N = \mathbb{R}^2$, ar exista o vecinătate U a lui X în $M = \mathbb{R}^2$, încît $F_k|U \simeq e_{y_0}$ în B_1, pentru aproape orice k. Dar $X \subset U$ și deci $F_k|X \simeq e_{y_0}$ în B_1, de unde ar rezulta că $F_k(X)$ este contractibil în B_1. Am obținut astfel că șirul fundamental F nu este generat de o aplicație $f: X \to Y$. Mai mult, inversele homeomorfismelor F_k determină un morfism $G = \{G_k, Y, X\}_{N,M}$, încît $GF = i_{X,M}$ și $FG = i_{Y,N}$, astfel încît obținem propoziția următoare.

PROPOZIȚIA 1. *Cercul lui Borsuk are aceeași formă cu S^1 (dar, deoarece $\pi_1(Y) = 0$ și $\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$, cele două spații sînt omotopic distincte).*

TEOREMA 4. *Fie X și Y două spații metrice compacte, $X \subseteq M \in \mathrm{AR}$, $Y \subseteq N \in \mathrm{AR}$. Dacă $Y \in \mathrm{ANR}$, atunci fiecare clasă fundamentală $[F]$ de la X la Y este generată de o aplicație $f: X \to Y$.*

Demonstrația se poate urmări în [5, p. 61].

COROLAR 2. *Dacă X, $Y \in \mathrm{ANR}$ și sînt compacte, atunci X și Y au același tip omotopic dacă și numai dacă au aceeași formă.*

Demonstrație. O implicație rezultă din Teorema 3. Reciproc, dacă $F: X \to Y$, $G: Y \to X$, cu $FG \simeq i_Y$ și $GF \simeq i_X$, după Teorema 4 există $f: X \to Y$ și $g: Y \to X$, încît $F_k|X = f$, $G_k|Y = g$, de unde obținem $gf \simeq 1_X$, $fg \simeq 1_Y$.

OBSERVAȚIA 2. Din Corolarul 2 și Propoziția 1, rezultă că cercul lui Borsuk nu este ANR.

TEOREMA 5. *Fie $F = \{F_k, X, Y\}_{M,N}$ un șir fundamental. Atunci, pentru orice n-ciclu propriu $\gamma = (\gamma_n^1, \gamma_n^2, \ldots) \in$ $\in Z_n(X, G)_M$ există un șir crescător de indici $\{i_k\}$, încît pentru orice șir $\{j_k\}$, satisfăcînd condiția $j_k \geq i_k$, $\forall k$, șirul*

$F(\gamma) = (F_1(\gamma_n^{j_1}), F_2(\gamma_n^{j_2}, \ldots)$ *este un n-ciclu propriu în* (Y, N), *ce nu depinde decît de clasa lui* γ.

Dacă F' *este omotop cu* F, *n-ciclurile* $F(\gamma)$ *și* $F'(\gamma)$ *sînt omoloage.*

Demonstrație. Deoarece F este un șir fundamental, pentru fiecare vecinătate V a lui Y (în N) există o vecinătate U a lui X (în M), încît $F_k|U \simeq F_{k+1}|U$ în V, pentru aproape toți indicii k. Deci, $\forall \eta_k > 0$, cu $\lim \eta_k = 0$, $\exists \delta_k$, cu $\lim \delta_k = 0$, încît :

a) $F_k(\gamma), F_{k+1}(\gamma) \in Z_n(Y^{\eta_k}, G)_N$ și $F_k(\gamma) \underset{\eta_k}{\sim} F_{k+1}(\gamma)$ în Y, $\forall \gamma \in Z_n(X^{\delta_k}, G)_M$;

b) Dacă $\gamma, \gamma' \in Z_n(X^{\delta_k}, G)_M$ și $\gamma \underset{\delta_k}{\sim} \gamma'$, atunci $F_k(\gamma) \underset{\eta_k}{\sim} F_k(\gamma')$ în Y, $\forall k$.

Fie $\{\varepsilon_i\}_i$ un majorant al lui γ. Vom lua $\{i_k\}$, încît $\varepsilon_j \leqslant \delta_k$, $\forall j \geqslant i_k$. Atunci, dacă $j_k \geqslant i_k$, $\forall k$, $\gamma_n^{j_k}$ și $\gamma_n^{j_{k+1}}$ sînt două δ_k-n-cicluri încît $\gamma_n^{j_k} \underset{\delta_k}{\sim} \gamma_n^{j_{k+1}}$ în X și prin urmare $F_k(\gamma_n^{j_{k+1}}) \underset{\eta_k}{\sim} F_{k+1}(\gamma_n^{j_{k+1}})$, $F_k(\gamma_n^{j_k}) \underset{\eta_k}{\sim} F_k(\gamma_n^{j_{k+1}})$ și deci $F_k(\gamma_n^{j_k}) \underset{\eta_k}{\sim} F_{k+1}(\gamma_n^{j_{k+1}})$ în Y. Astfel, $\{F_k(\gamma_n^{j_k})\}$ este un n-ciclu propriu, cu majorantul $(\eta_k)_k$.

Dacă $\gamma' = (\gamma_n'^1, \gamma_n'^2, \ldots)$ este un alt n-ciclu propriu, omolog cu γ, atunci șirul de indici $\{i_k\}$ poate fi ales încît pentru $j_k \geqslant i_k$, $k = 1, 2, \ldots$, șirurile $\{F_k(\gamma_n^{j_k})\}$ și $\{F_k^j(\gamma)\}$ să fie n-cicluri proprii omoloage în Y. Dacă $F' = \{F'_k, X, Y\}_{M,N}$ este un alt șir fundamental omotop cu F, atunci șirul de indici $\{i_k\}$ se poate alege încît șirurile $\{F_k(\gamma_n^{j_k})\}$ și $\{F'_k(\gamma_n^{j_k})\}$ să fie ambele n-cicluri proprii, omoloage în Y, pentru fiecare șir de indici $\{j_k\}$, satisfăcînd inegalitățile $j_k \geqslant i_k$, $k = 1, 2, \ldots$

COROLAR 3. *Dat un șir fundamental* $F : X \to Y$, *acesta induce un homomorfism* $F_* : H_n^V(X, G) \to H_n^V(Y, G)$, $\forall n \geqslant 0$, *cu proprietățile următoare :*

a) *Pentru șirul fundamental identitate* i_X, *avem* $(i_X)_* = 1_{H_n^V(X,G)}$;

b) *Dacă* $G : Y \to Z$ *este un alt șir fundamental, atunci* $(GF)_* = G_* F_*$;

c) *Dacă* $F' \simeq F \Rightarrow F'_* = F_*$.

Demonstrație. Aplicăm Teorema 4, definind $F_*([\gamma]) = [F(\gamma)]$, $\forall [\gamma] \in H_n^V(X, G)$. Din demonstrația Teoremei 5, rezultă în mod evident că aplicația F_* este bine definită și că este un homomorfism.

Demonstrația celorlalte proprietăți o lăsăm în seama cititorului.

COROLAR 4. a) *Dacă* X *și* Y *au aceeași formă, deci* $\mathrm{sh}(X) = \mathrm{sh}(Y)$, *atunci* $H_n^V(X, G) \cong H_n^V(Y, G)$, $\forall n$ *și pentru orice grup abelian* G ;

b) *Dacă* $\mathrm{sh}(X) \geqslant \mathrm{sh}(Y)$, *atunci grupul* $H_n^V(Y, G)$ *este izomorf cu un subgrup al grupului* $H_n^V(X, G)$.

Demonstrație. a) Rezultă imediat din Cor. 3.

b) Există șirurile fundamentale $F : X \to Y$, $G : Y \to X$, încît $FG \simeq i_{Y,N} \Rightarrow (FG)_* = 1_{H_n^V(Y,G)}$, deci $F_* G_* = 1_{H_n^V(Y,G)}$, care arată că G_* este monomorfism.

OBSERVAȚIA 3. Pentru cercul lui Borsuk S_B, avem $\pi_1(S_B) = 0$. Ținînd seama că S_B este spațiu liniar conex, putem aplica exerc. 5 § 9 și rezultă că $H_1(S_B) = 0$, în vreme ce $H_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$. Avînd în vedere Prop. 1, deducem că grupurile de omologie singulară nu sînt invariante ale tipului formei (și deci sînt diferite de grupurile de omologie Vietoris).

DEFINIȚIA 12. Un *continuum* este un spațiu compact și conex.

EXEMPLE. 2. Spațiul constînd dintr-un singur punct.

3. Cercul S^1.

4. Cercul lui Borsuk.

5. Un buchet (finit) de cercuri.

6. Cercelul Hawaian, adică un buchet infinit de cercuri (vezi fig. 88).

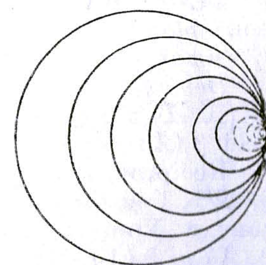


Fig. 88

7. Mulțimea S a punctelor din plan, definită prin

$$\begin{cases} y = \sin(1/x), & \text{pentru } 0 < |x| \leqslant 1 \text{ (vezi fig. 88)}, \\ -1 \leqslant y \leqslant 1, & \text{pentru } x = 0. \end{cases}$$

Următoarea teoremă se demonstrează utilizînd așa-numita *dualitate Alexander-Pontriaghin* (vezi [31, p. 125]) care, pentru un continuum plan X (situat în $\mathbb{R}^2$), stabilește izomorfismul $H_1^V(X, Z) \cong \cong H_0^V(\mathbb{R}^2 \setminus X, Z)$.

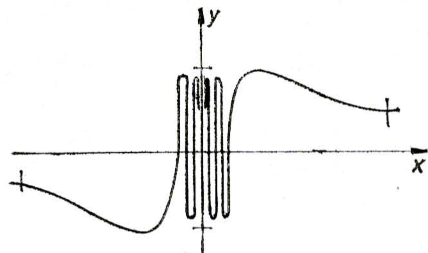


Fig. 89

TEOREMA 6. *Pentru două continuumuri plane X și Y, pentru care 1-numerele Betti sînt egale, $\beta_1(X) = \beta_1(Y)$, spațiile $\mathbb{R}^2 \setminus X$ și $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ au același număr de componente liniar conex.*

LEMA 3. *Dacă X este un continuum plan, atunci $\mathbb{R}^2 \setminus X$ are o mulțime cel mult numărabilă de componente liniar conexe* *).

Demonstrație. $\mathbb{R}^2$ este un spațiu topologic separabil (Prop. 7 § 5 Cap. I). Putem arăta acum că orice familie $\mathscr{D} = \{D\}$ de mulțimi deschise disjuncte din $\mathbb{R}^2$ este cel mult numărabilă. Fie $p_1, p_2, \ldots$ un șir dens în $\mathbb{R}^2$. Dacă $D \in \mathscr{D}$, există $p_n \in D$. Vom nota indicele respectiv prin $n(D)$. Dacă $\emptyset \in \mathscr{D}$, vom nota $n(\emptyset) = 0$. Am asociat fiecărei mulțimi nevide $D \in \mathscr{D}$ un număr $n(D)$, încît $p_{n(D)} \in D$. Dacă $n(D_1) = n(D_2) \neq 0 \Rightarrow p_n(D_1) \in D_1 \cap D_2$, contrar ipotezei. Este clar acum că familia componentelor spațiului $\mathbb{R}^2 \setminus X$, dacă X exte continuum, este formată din deschise disjuncte și aplicăm rezultatul de mai sus.

TEOREMA 7 (teorema lui Borsuk). *Două continuumuri plane X și Y au aceeași formă,* $\mathrm{sh}(X) = \mathrm{sh}(Y)$, *dacă și numai dacă 1-numerele Betti ale acestora coincid.*

Demonstrație. Dacă $\mathrm{sh}(X) = \mathrm{sh}(Y)$, atunci, după Cor. 4, $H_1^V(X, \mathbb{Z}) \cong H_1^V(Y, \mathbb{Z}) \Rightarrow \mathrm{rang}\, H_1^V(X, \mathbb{Z}) = \mathrm{rang}\, H_1^V(Y, \mathbb{Z})$ **), deci $\beta_1(X) = \beta_1(Y)$.

Reciproc, dacă $\beta_1(X) = \beta_1(Y)$, atunci, după Teorema 6, $\mathbb{R}^2 \setminus X$ și $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ au același număr de componente liniar conexe. Vom considera cazul $\beta_1(X) = \beta_1(Y) = \infty$, cazul $\beta_1(X) = \beta_1(Y) < \infty$ demonstrîndu-se analog și ceva mai simplu. După Lema 3, aranjăm componentele spațiului $\mathbb{R}^2 \setminus X$ într-un șir $A_0, A_1, \ldots$ și componentele spațiului

*) Utilizînd Teorema 5, deducem $\beta_1(X) \leq \aleph_0$.
**) $\mathbb{Z}$ este grupul numerelor întregi.

$\mathbb{R}^2 \setminus Y$ într-un șir $B_0, B_1, \ldots$, încît mulțimile A_0, B_0 sînt ambele nemărginite (X și Y fiind compacte, $\mathbb{R}^2 \setminus X$ și $\mathbb{R}^2 \setminus Y$ sînt nemărginite) și $A_i \neq A_j$, $B_i \neq B_j$, dacă $i \neq j$. Atunci, există, pentru $k = 1, 2, 3, \ldots$, niște deschise plane U_k și V_k, încît :

i) U_k și V_k sînt conexe, $X \subset U_k$ și $Y \subset V_k$, iar frontiera lui U_k (resp. V_k) în $\mathbb{R}^2$ este reuniunea a $k + 1$ curbe simple închise (homomorfe cu S^1), cîte două disjuncte, $C_0, C_1, \ldots C_k$ (resp. $D_0, D_1, \ldots, D_k$) și, în plus, $C_i \subset A_i$ ($D_i \subset B_i$), pentru $i = 0, 1, 2, \ldots, k$;

ii) Există un șir de numere pozitive $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$, tinzînd la zero, încît $d(x, X) \leq \varepsilon_k$ dacă $x \in A_i \cap U_k$ și $d(y, Y) \leq \varepsilon_k$ dacă $y \in B_i \cap V_k$, pentru $\forall i = 0, 1, \ldots, k$;

iii) $\bar{U}_{k+1} \subset U_k$ și $\bar{V}_{k+1} \subset V_k$, pentru $\forall k = 1, 2, \ldots$

Din i) rezultă că există un șir de homeomorfisme $F_k : \mathbb{R}^2 \to \to \mathbb{R}^2$, păstrînd o orientare fixată a spațiului $\mathbb{R}^2$ și satisfăcînd condițiile

iv) $F_k(C_i) \subset D_i$, pentru $i = 1, 2, \ldots, k$,

v) $F_{k+1} | (\mathbb{R}^2 \setminus U_k) = F_k | (\mathbb{R}^2 \setminus U_k)$, pentru orice k.

Considerăm acum o vecinătate arbitrară V a compactului Y în $\mathbb{R}^2$. Din ii) urmează că există un indice k_0, încît $V_{k_0} \subset V$. Luînd $U = U_{k_0}$, conchidem, după v), că $F_k | U \simeq \simeq F_{k+1} | U$ în V, pentru orice $k \geq k_0$. Am obținut astfel un șir fundamental $F = \{F_k, X, Y\}_{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2}$.

În mod analog, luînd $G_k = F_k^{-1}$, obținem un șir de homeomorfisme $G_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, care dau un șir fundamental $G = \{G_k, Y, X\}_{\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2}$. Din egalitatea $G_k(F_k(x)) = x = = F_k(G_k(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow GF = i_{X, \mathbb{R}^2}$ și $FG = i_{Y, \mathbb{R}^2}$.

Deoarece $\mathbb{R}^2 \in AR$ (exemplul 8 § 12, Cap. I), rezultă că $\mathrm{sh}(X) = \mathrm{sh}(Y)$.

În mod analog, se obține teorema următoare.

TEOREMA 8. *Dacă X și Y sînt două continuumuri plane, atunci* $\mathrm{sh}(X) \geq \mathrm{sh}(Y)$ *dacă și numai dacă* $\beta_1(X) \geq \beta_1(Y)$.

COROLAR 5. *Există o mulțime numărabilă de forme ale continuumurilor plane, ce poate fi ordonată punîndu-se în corespondență biunivocă cu mulțimea numerelor naturale, completată cu simbolul ∞.*

OBSERVAȚIA 4. Clasificarea obținută în Teoremele 7, 8 și Cor. 5 nu ar fi putut fi realizată în cadrul teoriei omotopiei. Cercul S^1 și cercul lui Borsuk S_B deși au pro-

prietăţi globale asemănătoare, fiind ambele continuumuri plane şi separînd fiecare planul în cîte două regiuni, totuşi acestea sînt distincte omotopic, aşa cum am văzut. Aceasta deoarece, clasificarea omotopică a spaţiilor topologice se bazează pe studiul aplicaţiilor de la un spaţiu la alt spaţiu. Or, această tehnică nu este întotdeauna aplicabilă (vezi, de exemplu, Obs. 1 § 2 Cap. III), datorită complicaţiilor locale în structura spaţiilor topologice. În cazul cercului lui Borsuk, se întîmplă că acesta nu este local conex. Domeniul de eficacitate al teoriei omotopiei îl constituie spaţiile cu o structură suficient de regulată, cum sînt CW-complexele sau spaţiile ANR, deoarece teoria omotopiei deduce proprietăţile globale ale spaţiilor topologice din cele locale. Ideea de a înlătura acest neajuns a avut-o matematicianul polonez Karol Borsuk, care în anul 1968 *) a introdus *teoria formei***). Borsuk a propus să se studieze proprietăţile globale ale spaţiilor neglijînd complicaţiile din structura lor locală. Soluţia a fost de a înlocui aplicaţiile dintre spaţii cu şiruri fundamentale, cum am văzut mai sus. Teoria a fost ulterior mult dezvoltată, fiind în prezent un important domeniu al topologiei, existînd în literatura mondială peste 500 de lucrări destinate acestei teorii, două monografii [5], [34] şi mai multe lucrări de sinteză, dintre care menţionăm [6], [14].

O definiţie generală a unei teorii a formei poate fi dată în limbajul *teoria categoriilor*.

Notăm prin H-Top categoria omotopică a spaţiilor topologice, avînd ca obiecte toate spaţiile topologice şi ca morfisme de la un spaţiu X la un spaţiu Y clasele de omotopie ale aplicaţiilor de la X la Y. Mulţimea acestor morfisme este notată prin $[X, Y]$. Putem introduce de asemenea subcategoria plină H-CW a categoriei H-Top, conţinînd obiectele care au tipul de omotopie al unor CW-complexe. În baza teoremei lui Mardešić, categoria H-CW coincide cu categoria omotopică a spaţiilor ANR şi cu categoria omotopică a spaţiilor triangulabile.

DEFINIŢIA 13. Fie C o subcategorie plină a categoriei H-Top, astfel încît aceasta extinde categoria H-CW, deci, simbolic, $\text{H-CW} \subseteq C \subseteq \text{H-Top}$.

---

*) Borsuk K., *Concerning homotopy properties of compacta*, Fund. Math. **62**(1968), 223–254.

**) În l. engleză, *shape theory*; în l. rusă, *teoria şeipov*, iar în l. franceză, *théorie de la forme*.

O *teorie a formei*, pe categoria C, constă dintr-o categorie Sh C, avînd aceleaşi obiecte ca şi C, împreună cu un functor covariant $\text{Sh}: C \to \text{Sh}\, C$, astfel încît, pentru orice $X \in \text{Ob}\, C$ şi $P \in \text{Ob H-CW}$ şi pentru orice morfism $F \in \text{Sh}\, C(X, P)$, să existe un singur morfism $f \in [X, P]$ pentru care $\text{Sh}\,(f) = F$.

Categoria Sh C se numeşte *categoria formei* (*shape category*) *asociată cu* C. Morfismele categoriei Sh C sînt numite Sh-*morfisme*, iar functorul Sh poartă denumirea de *functor-formă*.

Construcţia efectivă a unei teorii a formei a fost făcută pentru:

a) C = categoria omotopică a spaţiilor metrice compacte, de către K. Borsuk (aşa cum am văzut), morfismele în Sh C fiind clase de şiruri fundamentale;

b) C = categoria omotopică a spaţiilor Hausdorff compacte, care faţă de a) înlocuieşte spaţiul $M \in \text{AR}$ cu un ANR inclus în cubul Hilbert H. Au obţinut rezultate fundamentale, pe lîngă Borsuk, S. Mardešić, J. Segal şi W. Holsztyński;

c) C = H-Top. Extinderea teoriei formei la toate spaţiile topologice a fost făcută de către S. Mardešić şi ulterior de către Küti Morita. Ei au utilizat *sisteme inverse* în categoria H-CW pentru a *aproxima* spaţiile topologice arbitrare prin CW-complexe.

Teoretic, orice problemă de *topologie geometrică*, care poate fi globalizată, prin înlocuirea proprietăţilor locale cu condiţii asupra omotopiei în vecinătăţi, conduce la o problemă de *teoria formei*.

EXERCIŢII

1. Să se arate că dacă $\text{Sh}: C \to \text{Sh}\, C$ este o teorie a formei, atunci:

a) Dacă $X, Y \in C$ şi $X \simeq Y$, atunci $\text{Sh}(X)$ şi $\text{Sh}(Y)$ sînt izomorfe în Sh C; scriem $\text{sh}(X) = \text{sh}(Y)$;

b) Dacă $X, Y \in \text{H-CW}$, atunci $X \simeq Y \Leftrightarrow \text{sh}(X) = \text{sh}(Y)$;

c) Sh C este o extindere a categoriei C.

2. Să se arate că spaţiile metrice compacte, ca obiecte, şi clasele fundamentale, ca morfisme, formează o categorie.

3. Să se arate că spaţiile X şi Y din fig. 90 au aceeaşi formă.

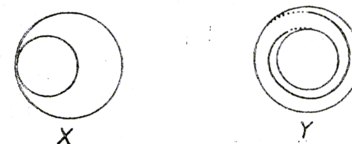


Fig. 90.

BIBLIOGRAFIE

1. Armstrong, M. A., *Basic Topology*, Mc Graw Hill Book Co. (UK) Limited, Maidenhead. Berkshire, England, 1979
2. Blackett, D. W., *Elementary Topology. A Combinatorial and Algebraic Approach*, Academic Press Inc. New York, London, 1967
3. Borisovici, Ju. G., Blizniacov, N. M., Izrailevici, Ja. A., Fomenko, T. N., *Introducere în topologie* (în l. rusă), Vîșhaia școla, Moscova, 1980
4. Borsuk, K., *Theory of Retracts*, PWN-Polish Sci. Publ., Warszawa, 1967; Mir, Moscova, 1971 (în l. rusă)
5. Borsuk, K., *Theory of Shape*, PWN-Polish Sci. Publ., Warszawa, 1975; Mir, Moscova, 1976 (în l. rusă)
6. Borsuk, K., Dydak, J., *What is the Theory of Shape?*, Bull. Austral. Math. Soc. **22**(1980), 161—198
7. Brown, R., *Elements of Modern Topology*, Mc Graw Hill Book Co., London, 1968
8. Bucur, I., *Algebră omologică*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1965
9. Andreian Cazacu, C., Deleanu, A., Jurchescu, M., *Topologie. Categorii. Suprafețe riemanniene*, Ed. Academiei, București, 1966
10. Costinescu, O., *Elemente de topologie generală*, Ed. Tehnică, București, 1969
11. Costinescu, O., Amihăesei, C., Bîrsan, T., *Topologie generală. Probleme*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1974
12. Craioveanu, M., *Lecții de topologie*, vol. I, Univ. Timișoara, 1979
13. Croom, F. H., *Basic Concepts of Algebraic Topology*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978
14. Dydak, J., Segal, J., *Shape Theory. An Introduction*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1978
15. Feen, R. A., *Techniques of Geometric Topology*, Cambridge Univ. Press, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1983
16. Gheorghiev, Gh., Oproiu, V., *Varietăți diferențiabile finit și infinit dimensionale*, vol. I, Ed. Academiei, București, 1976
17. Giblin, P. J., *Graphs, Surfaces and Homology*, Second Edition, Chapman and Hall, London and New York, 1981
18. Godbillon, C., *Éléments de Topologie Algébrique*, Hermann, Paris, 1971
19. Gray, B., *Homotopy Theory. An Introduction to Algebraic Topology*, Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975

20. Greenberg, J. M., Harper, J. R., *Algebraic Topology. A First Course*, Benjamin/Cummings, Publ. Co., London, Amsterdam, Don Mills, Ontario. Sydney. Tokyo, 1967
21. Henle, M. A., *A Combinatorial Introduction to Topology*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1979
22. Hilton, P. J., Wylie, S., *Homology Theory. An Introduction to Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1960; Mir, Moscova, 1966 (în l. rusă)
23. Hu, S. T., *Homotopy Theory*, Academic Press, New York and London, 1959; Mir, Moscova, 1964 (în l. rusă).
24. Hu, S. T., *Theory of Retracts*, Wayne State Univ. Press, Detroit, 1965
25. Hu, S. T., *Homology Theory: A First Course in Algebraic Topology*, Holden-Day Inc., San Francisco, 1966
26. Husemoller, D., *Fibre Bundles*, Mc Graw Hill, Series in Higher Math., New York, 1966
27. James, I. M., *General Topology and Homotopy Theory*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1984
28. Komatzu, M., *Geometria varietăților* (în l. rusă; trad. din l. japoneză) Znanie, Moscova, 1981
29. Kosniowski, C., *A First Course in Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1980
30. Kuratowski, K., *Introduction to Set Theory and Topology*, PWN-Polish Sci. Publ., Warszawa, 1972
31. Lefschetz, S., *Algebraic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publ., **XXVII** (1942)
32. Luchian, T., *Algebră abstractă*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1975
33. Lundell, A. T., Weingram, S., *The Topology of CW Complexes*, Van Nostrand Reinhold Co., New York, Cincinnati, Toronto, London, Melbourne, 1969
34. Mardešić, Š., Segal, J., *Shape Theory, The Inverse System Approach*, North-Holand Publ. Co., Amsterdam, New York, Oxford, 1982
35. Mardešić, Š., *Shapes for Topological Spaces*, General Topology and its Appl., **3**(1973), 265—282
36. Massey, W. S., *Algebraic Topology: An Introduction*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1967
37. Maunder, C. R. F., *Algebraic Topology*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1980
38. May, P. J., *Simplicial Objects in Algebraic Topology*, D. Van Nostrand Co. Inc., Princeton, New Jersey, Toronto, London, Melbourne, 1967
39. Miron, R., Pop, I., *Topologie algebrică: Omologie, omotopie, spații de acoperire*, Ed. Academiei, București, 1974
40. Miron, R., *Introducere în geometria diferențială*, Univ. Iași, 1972
41. Naber, G. L., *Topological methods in Euclidean spaces*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, London, New York, New Rochelle, Melbourne, Sydney, 1980
42. Pop, I., *Varietăți diferențiabile. Culegere de probleme*, Univ. Iași, 1975
43. Pop, I., Sava, C., Zheng, Xu, He, *Topologie algebrică. Exerciții rezolvate*, Univ. Iași, 1983
44. Pontreaghin (L.S., *Varietăți netede și aplicațiile lor în teoria omotopiei* (în l. rusă), Nauka, Moscova, 1985
45. Răileanu, L., *Varietăți topologice și diferențiale. O introducere în topologie diferențială*, Univ. Iași, 1984

46. Ringel, G., *Map Color Theorem*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1974
47. Rohlin, V. A., Fuks, D. B., *Introducere în topologie. Capitole de geometrie* (în l. rusă), Nauka, Moscova, 1977
48. Rourke, C. P., Sanderson, B. J., *Introduction to Piecewise-Linear Topology*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1982
49. Seifert, H., Threlfall, W., *A Textbook of Topology and Topology of 3-dimensional Fibered Spaces*, Academic Press, New York, London, Toronto, Sydney, San Francisco, 1980
50. Singer, I. M., Thorpe, J. A., *Lecture Notes on Elementary Topology and Geometry*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1976
51. Spanier, E. H., *Algebraic Topology*, Mc Graw Hill Book, Co., New York, San Francisco, St. Louis, Toronto, London, Sydney, 1966; Mir, Moscova, 1971 (în l. rusă).
52. Steenrod, N., Eilenberg, S., *Foundations of Algebraic Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1952; Gos. Izdat, Fiz. Mat. Lit., Moscova, 1958 (în l. rusă).
53. Teleman, C., *Elemente de topologie și varietăți diferențiabile*, Ed. Didactică și Pedagogică, București, 1964
54. Teleman, C., *Geometrie diferențială locală și globală*, Ed. Tehnică, București, 1974
55. Teleman, K., *Metode și rezultate în geometria diferențială modernă*, Ed. Științifică și Enciclopedică, București, 1979
56. Whithehead, G. W., *Elements of Homotopy Theory*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1978
57. Whitney, H., *The self-intersections of a smooth n-manifold in 2n-space* Ann. Math. **45** (1944), 220–246

INDEX

Tehnoredactor: OLIMPIU POPA

Coli de tipar: 22,50
Bun de tipar: 29.05.1990

Universul c. 244
str. Brezoianu 23—25
București—România